§ 25. Модел на линейно-еластично тяло. Уравнения на Ламе

25.1. Линейно-еластично тяло. Тензорен закон на Хук. Еластичното тяло се характеризира с предположението, че във всяка негова точка тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ еднозначно се определя от тензора на деформацията $\boldsymbol{T}_\varepsilon$

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \mathcal{F}(\boldsymbol{T}_\varepsilon)\,. \tag{25.1}$$

Тензорната функция $\mathcal{F}$ в (25.1) се нарича *закон на деформирането* или *закон на материала*. Предположили сме допълнително, че тялото е хомогенно, т. е. функцията $\mathcal{F}$ е една и съща във всички точки на тялото.

Да предположим също така, че деформацията е малка. Това позволява да заместим тензора $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ в (25.1) с тензора на малката деформация $\boldsymbol{T}_e = \frac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla)$, където $\boldsymbol{u}$ е полето на преместването на точките от тялото, вж. § 15.5. Освен това $\|\boldsymbol{T}_e\| \ll 1$, което позволява да разложим функцията $\mathcal{F}$ в ред на Тейлър в околността на недеформираното състояние $\boldsymbol{T}_\mathrm{e} = 0$ и да се ограничим само с първите два члена на разлагането

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \boldsymbol{T}^0_\sigma + \boldsymbol{H}\!:\!\boldsymbol{T}_e\,. \tag{25.2}$$

Очевидно $\boldsymbol{T}_\sigma = \boldsymbol{T}^0_\sigma$ при $\boldsymbol{T}_e = 0$, т. е. $\boldsymbol{T}^0_\sigma$ представляват т. нар. *остатъчни напрежения* (residual stresses) в тялото, които могат да съществуват даже когато то е недеформирано.[1]

Да предположим, че остатъчни напрежения няма, $\boldsymbol{T}^0_\sigma = 0$. В (25.2) остава единствено линейния по деформацията $\boldsymbol{T}_e$ член

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \boldsymbol{H}\!:\!\boldsymbol{T}_e\,, \quad \text{или} \quad \sigma^{ij} = H^{ijkl}\, e_{kl}\,. \tag{25.3}$$

Законът на материала (25.3) характеризира *модела на линейно еластичното* или *тяло на Хук*. Четиривалентният тензор $\boldsymbol{H}$ се нарича *тензор на еластичните модули* или *тензор на Хук*.

Четиривалентният тензор $\boldsymbol{H}$, чрез указаната в контракция по две двойки индекси, определя линейно преобразование в пространството от симетрични двувалентни тензори. Напомняме, че двата тензори $\boldsymbol{T}_\sigma$ и $\boldsymbol{T}_\varepsilon$

[1] Да отбележим, че съществуването на подобни напрежения е напълно реалистично. Такива са например т. нар. *термични напрежения*. Последните се появяват в резултат на бързо охлаждане на предварително нагрято тяло. Остатъчни напрежения съществуват и ако тялото съдържа някакви дефекти например ако сме го слепили („припаснали“) от няколко части, които не се „пасват“ много добре.

са симетрични. Поради това компонентите на тензора $\boldsymbol{H}$ са симетрични в първата и втората двойка индекси

$$H^{ijkl} = H^{jikl}\,, \quad H^{ijkl} = H^{ijll}\,. \tag{25.4}$$

Тъй като пространството от симетрични двувалентни тензори е шестмерно, то общият брой на компонентите на $\boldsymbol{H}$ е 36. Може да се покаже, използвайки вече термодинамични съображения, че тензорът $\boldsymbol{H}$ притежава и т. нар. *външна симетрия*:

$$H^{ijkl} = H^{klji}\,, \tag{25.5}$$

т. е. $\boldsymbol{H}$ е симетричен при смяната на първата и втората двойка индекси. Следователно $\boldsymbol{H}$ може да се разглежда като симетрично линейно преобразование в пространството на двувалентни тензори, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}$, и поради това общият брой на компонентите му е 21. Това означава, че за пълно описание на еластичните свойства на произволно линейно еластично тяло са достатъчни не повече от 21 еластични константи. Ако тялото има някаква симетрия (свойствата му са едни и същи в определени направления, както е при кристалите), то броят на еластичните константи е по-малък. При това очевидно колкото е „по-богата“ е симетрията на тялото, толкова по-малко са тези константи. За „най-богатата“ симетрия — изотропията — броят на еластичните константи е точно две, както ще се убедим веднага.

25.2. Закон на Хук за изотропно тяло. Уравнения на Ламе. За изотропно тяло тензорът $\boldsymbol{H}$ има вече познатия вид (9.18), така че законът на Хук (25.3) се опростява съществено

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \lambda\,\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\varepsilon + 2\mu\,\boldsymbol{T}_\varepsilon\,. \tag{25.6}$$

Константите λ и μ в (25.6) се наричат *коефициенти на Ламе*.

Внасянето на (25.6) в уравнението на движение (19.13) на средата дава

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \mu\,\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\,\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{f}\,. \tag{25.7}$$

Да предположим допълнително, че скоростта на точките е малка, $|\boldsymbol{v}| \ll 1$. Тогава

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \approx \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}$$

т. като деформацията е малка, т. е. $\|\nabla\boldsymbol{u}\| \ll 1$, и затова $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ е малка от по-висок порядък. На свой ред

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \approx \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{25.8}$$

по причини, аналогични на току-що изложените. Внасянето на (25.8) в (25.7) води до вече линейната система от частни диференциални уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\, \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{f}\,. \tag{25.9}$$

— това са *уравненията на Ламе*, които се удовлетворяват от полето на преместването $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$ в изотропно линейно-еластично тяло. Изследването на тези уравнения и решаването им[2] за конкретни тела е предмет на *математическата теория на еластичността*.

Важно е да отбележим, че предположението за малка скорост на деформацията, заедно с уравнението на непрекъснатостта (18.12), влече

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0\,.$$

Това означава, че изменението на плътността на тялото по време на еластичното му деформиране е *пренебрежимо*, $\rho \equiv \rho_0$ за всяка материална точка, и единственото неизвестно в системата на Ламе (25.9) е полето на преместването $\boldsymbol{u}$. Следователно тази система е *затворена* в смисъл, че за трите компоненти на $\boldsymbol{u}$ разполагаме с три уравнения.

25.3. Обемен модул и модул на срязване. Да предположим, че тензорът на (малката) деформацията $\boldsymbol{T}_e$ в изотропно тяло е сферичен, т. е.

$$\boldsymbol{T}_e = \tfrac{1}{3}\,\theta\, \boldsymbol{I}\,, \quad \theta = \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_e\,.$$

С други думи, разглеждаме чиста дилатация — равномерно обемно разширение (или свиване, в зависимост от знака на θ), вж. (15.30) (§ 15.6). От закона на Хук (25.6) тогава следва, че тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ е също сферичен

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_\sigma &= p\,\boldsymbol{I}\,, \quad p = \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma\,, \\ p &= k\theta\,, \quad k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu\,. \end{aligned} \tag{25.10}$$

Тук p е хидростатичното налягане, което причинява дилатацията θ. Коефициентът k на пропорционалност между p и θ се нарича *обемен модул* или *модул на обемното разширение*.

Нека сега $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ е произволен, не обезателно сферичен тензор. Образуваме следите на двете страни на закона на Хук (25.6):

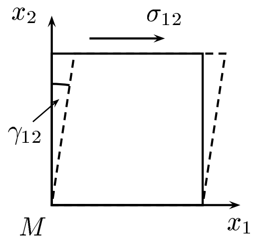
$$\tfrac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = k \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_e\,, \quad k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu\,. \tag{25.11}$$

[2] при съответните начални и гранични условия например зададени премествания или напрежения по границата на тялото

т. е. обемното разширение на изотропно тяло е винаги пропорционално на хидростатичното налягане $p = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\sigma$, с коефициентът на пропорционалност, равен на обемния модул k.

Да разгледаме сега друг характерен тип деформирано състояние в точка M от тялото — чисто срязване в равнината Mx_1x_2. Тензорът на деформацията $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ в този случай има компоненти

$$\boldsymbol{T}_e = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 25.1. Чисто срязване в еластично тяло

Да напомним, че при такова деформиране квадрат със страни по осите Mx_1 и Mx_2 се „сплесква“, превръщайки се в ромб, като следствие от скосяването γ_{12} на правия ъгъл Mx_1x_2, вж. фиг. 25.1. При това, да напомним, $\gamma_{12} = 2e_{12}$, вж. (15.23).

Тъй като в случая $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_e = 0$, то от закона на Хук (25.6) следва

$$\boldsymbol{T}_\sigma = 2\mu\boldsymbol{T}_e = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\gamma_{12}\,. \qquad (25.12)$$

Следователно модулът на Ламе μ представлява коефициентът на пропорционалност между ъгъла на скосяването γ_{12} и срязващото напрежение σ_{12}. Поради тази причина μ се нарича *модул на срязване*. (В техническата литература той често се бележи с G.)

По-общо, да отделим в тензорите на деформация и напрежение съответните сферични и девиаторни части:

$$\boldsymbol{T}_e = \tfrac{1}{3}\theta\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_e\,, \quad \theta = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_e\,, \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}_e = 0\,,$$
$$\boldsymbol{T}_\sigma = p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_\sigma\,, \quad p = \tfrac{1}{3}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_e\,, \quad \mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}_\sigma = 0\,.$$

Съгласно закона на Хук (25.6), сферичните и девиаторните части на $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ са *пропорционални*:

$$p = k\theta\,, \quad \boldsymbol{D}_\sigma = 2\mu\boldsymbol{D}_e\,, \qquad (25.13)$$

като коефициентите на пропорционалност са съответно обемният модул и удвоеният модул на срязване.

25.4. „Обръщане“ на закона на Хук. Да изразим сега тензора на деформацията $\boldsymbol{T}_e$ чрез този на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ за изотропно еластично тяло. Очевидно $\boldsymbol{T}_e$ и $\boldsymbol{T}_\sigma$ са свързани отново с линейна връзка

$$\boldsymbol{T}_e = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}_\sigma \,, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}^{-1} \,. \tag{25.14}$$

Четиривалентният тензор се нарича $\boldsymbol{M}$ *тензор на еластичната податливост* или *тензор на коравините*. $\boldsymbol{M}$ е *обратен* на тензора на еластичността $\boldsymbol{H}$ (обратен, в смисъл на естественото в случая разглеждане на четиривалентните тензори като линейни преобразования в пространството от двувалентни тензори).

За изотропно тяло не само $\boldsymbol{H}$, но и $\boldsymbol{M}$ трябва да е изотропен, т. е. обратният закон на Хук трябва да има същата структура както и (25.6):

$$\boldsymbol{T}_e = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}_\sigma = \alpha \, \boldsymbol{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma + 2\beta \, \boldsymbol{T}_\sigma \,, \tag{25.15}$$

с коефициенти α и β, които трябва да изразим чрез тези на Ламе.

За тази цел да вземем първо следите от двете страни в (25.15)

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_e = (3\alpha + 2\beta) \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma \,. \tag{25.16}$$

Заместваме (25.15) и (25.16) в закона на Хук (25.6)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_\sigma &= \lambda(3\alpha + 2\beta) \, \boldsymbol{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma + 2\mu \Big[\alpha \, \boldsymbol{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma + 2\beta \, \boldsymbol{T}_\sigma \Big] \\ &= \Big\{ \lambda(3\alpha + 2\beta) + 2\mu\alpha \Big\} \boldsymbol{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma + 4\mu\beta \, \boldsymbol{T}_\sigma \,. \end{aligned} \tag{25.17}$$

Последното равенство е в сила *за всяко* $\boldsymbol{T}_\sigma$. В частност, ако $\boldsymbol{T}_\sigma$ е девиатор, т. е. $\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = 0$, то

$$\boldsymbol{T}_\sigma = 4\mu\beta \, \boldsymbol{T}_\sigma \,, \quad \text{т. е.} \quad 4\mu\beta = 1, \quad 2\beta = \frac{1}{2\mu} \,. \tag{25.18}$$

Следователно

$$\Big\{ \lambda(3\alpha + 2\beta) + 2\mu\alpha \Big\} \, \boldsymbol{I} \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = 0$$

за всеки тензор $\boldsymbol{T}_\sigma = 0$, вж. (25.17). Това е възможно само ако множителят във фигурната скоба в последното равенство се анулира. Оттук

$$\alpha = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \,. \tag{25.19}$$

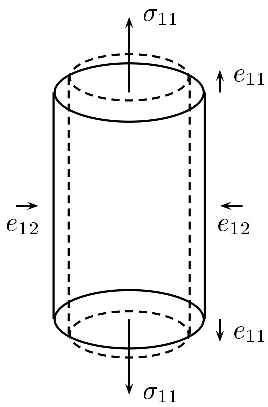
Съотношенията (25.18) и (25.19) позволяват да намерим търсения обратен закон на Хук

$$\boldsymbol{T}_e = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{T}_\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\sigma\right). \tag{25.20}$$

Упражнение 25.1. *„Обърнете“ закона на Хук, използвайки пропорционалността* (25.13) *на сферичните и девиаторните части на тензорите* $\boldsymbol{T}_e$ *и* $\boldsymbol{T}_\sigma$*.*

25.5. Коефициент на Поасон. Да разгледаме едноосен опън (по оста x_1) на цилиндричен образец, вж. фиг. 25.2. В декартовата система $x_1x_2x_3$ тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ има компоненти

$$\|\sigma_{ij}\| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 25.2

Тъй като $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\sigma = \sigma_{11}$, от (25.20) намираме компонентите на тензора на деформацията

$$e_{11} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{11} - -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\sigma_{11}\right) = \frac{1}{E}\,\sigma_{11}\,,$$

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\sigma_{11}\,, \tag{25.21}$$

$$e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0\,.$$

От първото съотношение на (25.21) можем да изразим модула на Юнг чрез коефициентите на Ламе

$$E = \mu\,\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,. \tag{25.22}$$

От първото и второто съотношение (25.21) изключваме σ_{11}:

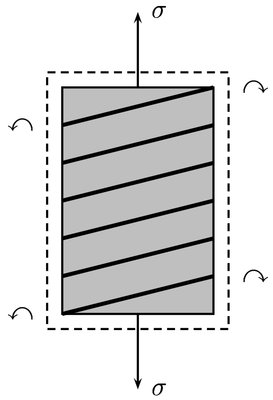
$$e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,E\,e_{11}\,, \tag{25.23}$$

т. е.

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}\,. \tag{25.24}$$

Коефициентът ν, свързващ напречната деформация с надлъжната при едноосен опън, е една от най-важните характеристики на еластично тяло. Той се нарича *коефициент на Поасон.* От дефиницията му (25.24) и от (25.22), (25.23) следва, че

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\,. \tag{25.25}$$



Фиг. 25.3. Разтягане на армиран образец

Знакът „минус“ в дефиницията на ν е свързан с интуитивния факт, че болшинството (ако не и всички материали, с които се сблъскваме в практиката) при едноосен опън се свиват в напречна посока. Това обаче *не е* универсално свойство на телата. За анизотропни материали, армирани еднопосочно с много корави влакна, е лесно да се съобрази, че надлъжната деформация ще се съпровожда с напречно разширение в резултат на завъртането на влакната, вж. фиг. 25.3. Оказва се, че и за изотропни материали със специална вътрешна структура коефициентът на Поасон може да е отрицателен. Единственото ограничение върху ν следва от термодинамични съображения, които тук не се обсъждат:

$$-1 < \nu < 0,5\,. \tag{25.26}$$

Нещо повече, съществуват модели на макроскопично изотропни среди, чийто коефициент на Поасон е произволно близък до -1.

Ще отбележим също, че за изотропно тяло ν е *единствената* безразмерна еластична константа. Всяка друга безразмерна характеристика на такова тяло се изразява чрез ν. В частност, отношението $\lambda/(3\lambda+2\mu)$ в в обратния закон на Хук (25.20) е базразмерно. С помощта на (25.25) виждаме, че то е равно на $\nu/(1+\nu)$ и следователно законът (25.20) може да се напише и във вида

$$\boldsymbol{T}_e = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{T}_\sigma - \frac{\nu}{1+\nu}\,\boldsymbol{I}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\sigma\right). \tag{25.27}$$

За несвиваемо тяло коефициентът на Поасон е $\nu = 0,5$. За да покажем това вземаме цилиндричен образец с радиус $r_0 = 1$ и височина

$\ell_0 = 1$, вж. фиг. 25.3. Началният му обем е $V_0 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. След деформацията (навсякъде тук предположена малка) височината на цилиндъра е вече $1 + e_{11}$, а радиусът е $1 - \nu e_{11}$. Обемът на деформирания цилиндър тогава е

$$\begin{aligned} V &= \pi(1-\nu e_{11})^2(1+e_{11}) \\ &\approx \pi(1-2\nu e_{11})(1+e_{11}) \approx \pi\Big[1+(1-2\nu)e_{11}\Big], \end{aligned}$$

тъй като $|e_{11}| \ll 1$. Следователно обемната деформация на разглеждания цилиндър е

$$\theta = \nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{V-V_0}{V_0} = (1-2\nu)e_{11}\,. \tag{25.28}$$

За несвиваем материал $\theta = 0$, т. е. $\nu = 0,5$.

25.6. Уравнения на Белтрами-Митчел. Произволно тензорно поле не може да служи като поре на тензора на напреженията в линейно-еластично тяло. Това следва например от факта, че тензорът на (малката) деформация трябва да удовлетворява уравненията на съвместимост на Сен-Венан

$$\nabla\times\boldsymbol{T}_e\times\nabla = 0\,,$$

вж. (16.3). Заместването на (25.14) в последното равенство дава

$$\nabla\times\Big(\boldsymbol{M}:\boldsymbol{T}_\sigma\Big)\times\nabla = 0 \tag{25.29}$$

— това са именно *уравненията на Белтрами-Митчел*, които следва да се удовлетворяват от тензора на напреженията за еластично тяло с тензор на коравините $\boldsymbol{M}$.

За изотропно тяло уравненията на Белтрами-Митчел могат съществено да се опростят — в (25.29) внасяме обратния закон на Хук (25.27) и прилагаме израза за биротора от § 14. Съществува обаче по-прост извод, основан на уравненията на Ламе, в който уравненията на Сен-Венан изобщо не са необходими.

Ще се ограничим за простота със статичния случай при отсъствие на масови сили. Уравненията на Ламе (25.9) тогава имат вида

$$\mu\,\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\,\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0\,. \tag{25.30}$$

Да вземем първо дивергенцията от двете страни на (25.30). В резултат намираме

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\theta = 0\,,$$

където, да напомним, $\theta = \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_e = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$ е обемната деформация (дилатация) на точките от тялото. Следователно дилатацията при статично деформиране на линейно-еластично тяло (и при отсъствие на масови сили) е *хармонична функция*. За разглежданото изотропно тяло $\theta = \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_e$ е пропорционално на $\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma$, вж. (25.11) и поради това $\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma$ също е *хармонична функция*:

$$\Delta \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = 0\,. \tag{25.31}$$

Да приложим оператора ∇ един път от ляво и един път от дясно към двете страни на (25.30) и да съберем резултатите

$$\mu\, \Delta(\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla) + 2(\lambda + \mu)\, \nabla\nabla\theta = 0\,.$$

Но по дефиниция $\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla = 2\boldsymbol{T}_e$, вж. (15.28), т. е.

$$2\mu\, \Delta \boldsymbol{T}_e + 2(\lambda + \mu)\, \nabla\nabla\theta = 0\,.$$

Внасяме в последното равенство израза за $\boldsymbol{T}_\varepsilon$ чрез $\boldsymbol{T}_\sigma$ от обратния закон на Хук (25.27) и θ изразено чрез $\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma$, вж. (25.11):

$$\Delta \left(\boldsymbol{T}_\sigma - \frac{\nu}{1+\nu}\, \boldsymbol{I}\, \underline{\operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma} \right) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3k}\, \nabla\nabla \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = 0\,.$$

Лапласианът на подчертания член се анулира, вж. (25.31), а

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3k} = \frac{1}{1+\nu}\,,$$

съгласно (25.10) и (25.25). Следователно

$$\Delta\, \boldsymbol{T}_\sigma + \frac{1}{1+\nu}\, \nabla\nabla\, \operatorname{tr} \boldsymbol{T}_\sigma = 0 \tag{25.32}$$

— това е *уравнението на Белтрами-Митчел*, което трябва да се удовлетворява от тензора на напрежението при статично деформиране на изотропно линейно-еластично тяло (при отсъствие на масови сили).

Упражнение 25.2. *Покажете, че тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ при статично деформиране и отсъствие на масови сили в еластично тяло е бихармонична функция, т. е. решение на уравнението*

$$\Delta\Delta \boldsymbol{T}_\sigma = 0\,.$$