§ 22. Първи закон на термодинамиката

22.1. Първи закон на термодинамиката. Теоремата за кинетичната енергия (§ 21.2) представлява, най-общо казано, уравнението за баланса на механичната енергия. Тя има енергетична природа, тъй като свързва изменението на кинетичната енергия с извършената в материалния обем работа. Но това е законът за запазване на енергията *единствено* в случая, когато механичната енергия не се превръща в топлинна или друг вид енергия (например, радиация). Ако това условие се наруши, в (21.20) ще се появят допълнителни членове. Резултатът от тяхното отчитане е първият закон на термодинамиката, към чиято формулировка преминаваме.

При деформацията и течението на непрекъснатите среди като правило винаги има преход от механична в топлинна енергия и обратно[5]. Поради това постулираме, че освен кинетичната енергия материалният обем $\mathcal{V}$ притежава и т. нар. *вътрешна енергия* $\mathcal{E}$, така че пълната му енергия E е сумата

$$E = T + \mathcal{E}\,. \tag{22.1}$$

Предполагаме освен това, че

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon \,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V\,, \tag{22.2}$$

където ε е плътността на вътрешната енергия (количеството ѝ на единица маса).

За да поясним понятието вътрешна енергия на най-примитивно интуитивно ниво да си представим два екземпляра на един и същ материален обем $\mathcal{V}$, които се движат с еднакви скорости, но имат различна температура. Макроскопическата величина T — кинетичната енергия на двата обема — ще бъде една и съща. Обемът с по-висока температура ще има обаче по-голяма вътрешна енергия в резултат на нагряване, което е претърпял (да припомним, че температурата е пропорционална на средната кинетична енергия на молекулите, от които е съставен обема).

Ясно е, че пълната енергия на обема може да се измени единствено в резултат на действието на външни сили и на количеството топлина,

[5] При нагряване телата се разширяват, при деформиране те се затоплят, и т. н.

което влиза в него. С други думи постулираме, че

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = W^{\mathrm{ext}} + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t} \tag{22.3}$$

— скоростта на изменението на пълната енергия на материален обем е сума от мощността на външните сили и на количеството топлина $\mathrm{d}'Q$, влязло в обема за единица време. В това именно се състои *първия закон на термодинамиката*, формулиран математически с формулата (22.3). Знакът „прим“ в означението за количеството топлина $\mathrm{d}'Q$ подчертава, че тава количество в общия случай не е пълен диференциал (аналогично на елементарните работи на външните и вътрешните сили в (21.8), вж. § 21.1).

Преди да се заемем с описанието на топлинните потоци в тяло (§ 22.2) ще опростим (22.3). Заместваме (22.1) и (21.27) в (22.3):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(T+\mathcal{E})}{\mathrm{d}t} = \dot{T} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{T} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t}\,, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t}\,. \tag{22.4}$$

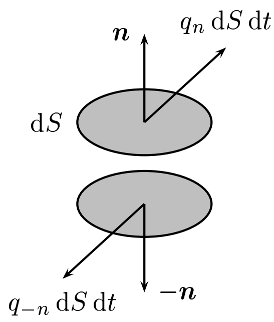
22.2. Вектор на топлинния поток. За описание на разпространението на топлината в тяло ще приложим метода на мислените сечения на Бернули, като модифицираме по очевиден начин разсъжденията, довели в § 7.1 до понятието тензор на напрежението на Коши.

Фиксираме точка от тялото и разглеждаме елементарна площадка с лице $\mathrm{d}S$ и единична нормала $\boldsymbol{n}$, вж. фиг. 22.1. Количеството топлина, което ще премине през тази площадка в посока на нормалата $\boldsymbol{n}$ за интервала от време $(t, t+\mathrm{d}t)$ е $q_n \,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$. Тук q_n е плътността на потока, т. е. количеството топлина, преминаващо през единица площ за единица време. В обратна посока ще премине очевидно същото количеството топлина $q_{-n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$, вж. фиг. 22.1. Но докато количеството топлина $q_n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$ „влиза“ през горната площадка, през долната това количество „излиза“ и затова

$$q_{-n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = -q_n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{т. е.} \quad q_{-n} = -q_n\,. \tag{22.5}$$

И така, за да характеризираме топлинния поток в точка на неравномерно нагрятото тяло, трябва да знаем скаларната функция q_n на векторния аргумент $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} \longrightarrow q_n\,, \quad \forall \boldsymbol{n} \in \Re^3\,, \quad |\boldsymbol{n}| = 1\,. \tag{22.6}$$



Фиг. 22.1

Сравнението с (7.1) показва, че ситуацията е напълно аналогична на тази при описанието на вътрешните напрежения в тяло, но тук тя е „смъкната“ една тензорна валентност по-надолу: вместо векторната функция на векторен аргумент (7.1) сега се появява скаларната функция на векторен аргумент (22.6). Доказателството обаче на линейността на функцията (22.6) е идентично по дух с това на линейността на (7.1) и се базира отново на тетраедъра на Коши, вж. Фиг. 7.2.

Именно за време $\mathrm{d}t$ в тетраедъра влиза количеството топлина

$$\mathrm{d}Q = \Big(q_{e_1}\,\mathrm{d}S_1 + q_{e_2}\,\mathrm{d}S_2 + q_{e_3}\,\mathrm{d}S_3 + q_{-n}\,\mathrm{d}S\Big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{22.7}$$

Означенията са същите, използвани в § 7.1

Обемните източници (ако такива има) създават в тетраедъра допълнителното количество топлина

$$\mathrm{d}Q^{\mathrm{vol}} = F(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\,.$$

При това, както е известно от физиката, сумарното количество топлина $\mathrm{d}Q + \mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}}$, което тетраедърът поема, увеличава температурата му с $\mathrm{d}\theta$ съгласно закона

$$\mathrm{d}Q + \mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}} = c_v\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}V\,, \tag{22.8}$$

където $\mathrm{d}V$ е обемът на тетраедъра, а c_v е т. нар. *коефициент на топлопоглъщане*. Да напомним, че това е количеството топлина, което трябва да „погълне“ единица обем от тялото за единица време, за да увеличи температурата си с един градус например по Целзий. (В друга температурна скала коефициентът c_v ще се умножи с подходящ множител.) В (22.8) обемът на тялото е фиксиран (не се мени по време на нагряването), което обяснява индекса ‘v’ в означението c_v.

Както и в § 7.1 забелязваме, че лицата на стените на тетраедъра $\mathrm{d}S_k$, $k = 1, 2, 3$, и $\mathrm{d}S$ са безкрайно малки величини от ред a^2, където a

е характерният размер на тетраедъра, докато обемът му $\mathrm{d}V$ е безкрайно малка величина от ред a^3. Следователно $\mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}}$ и дясната страна на (22.8) могат да се пренебрегнат при свиването на тетраедъра в точка в сравнение с $\mathrm{d}Q$. Тогава (22.8) се свежда просто до анулирането на сумарното количество топлина $\mathrm{d}Q$, вж. (22.7), влизащо или излизащо през четирите стени на тетраедъра, т. е. $\mathrm{d}Q = 0$.

Като използваме (22.5), записваме последното уравнение, $\mathrm{d}Q = 0$, във вида

$$q_n = \sum_{k=1}^{3} q_k \,\frac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}S}\,, \quad q_k = q_{e_k}\,, \quad k = 1, 2, 3\,, \tag{22.9}$$

вж. (22.7).

Но

$$\mathrm{d}S_k = \cos\,(\widehat{\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{n}})\ \mathrm{d}S = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_k\, \mathrm{d}S\,,$$

което позволява да напишем (22.9) във вида

$$q_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}\,, \quad \boldsymbol{q} = \sum_{k=1}^{3} q_k \boldsymbol{e}_k\,, \tag{22.10}$$

където $\boldsymbol{q}$ е *векторът на топлинния поток*. Формулата (22.10) е „топлинният“ аналог на формулата на Коши (7.9).

22.3. Локална формулировка на първия закон на термодинамиката. Количеството топлина, което влиза в обема $\mathcal{V}$ за време $\mathrm{d}t$ е

$$\mathrm{d}'Q = -\int_{\mathcal{S}} q_n \,\mathrm{d}S\, \mathrm{d}t\,,$$

вж. (22.5). С помощта на (22.10) и (11.41) оттук намираме

$$\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\, \mathrm{d}V\,,$$

което заместваме в (22.4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \rho\dot{\varepsilon}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}V\,. \tag{22.11}$$

Тъй като (22.11) е в сила за произволен материален обем, то свивайки последния в точка намираме

$$\rho\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi - \nabla \cdot \boldsymbol{q}\,. \tag{22.12}$$

Равенството (22.12) представлява локалната формулировка на първия закон на термодинамиката.

От (22.12) се вижда, че даже при отсъствие на топлинни потоци, $\boldsymbol{q} = 0$, вътрешната енергия на деформируемото тяло се мени в резултат на стоксовата мощност $\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi$ на вътрешните напрежения.

22.4. Закон за топлопроводността на Фурие. При отсъствие на механична деформация параметрите на състоянието на неравномерно нагрятото тяло са температурата θ и векторът на топлинния поток $\boldsymbol{q}$ във всяка точка от тялото. Температурата е дефинирана обаче с точност до произволна (адитивна) постоянна. (Да напомним, че във всяка температурна скала е необходимо експлицитно да посочим коя е нулевата температура.) Това означава, че истинският параметър на състоянието не е θ, а по-скоро нейният градиент $\nabla\theta$ (тъй като той е нечувствителен към добавянето на константа към θ).

В този факт можем да се убедим и чрез следното разсъждение. Ако топлинният поток отсъства (тялото е равномерно нагрято), то $\boldsymbol{q} = 0$ и температурата му е постоянна, $\theta = \mathrm{const}$, т. е. $\nabla\theta = 0$. Вярно е и обратното — ако температурата е навсякъде постоянна, то топлинни потоци няма. С други думи,

$$\boldsymbol{q} = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla\theta = 0\,.$$

Наличието на топлинен поток изменя температурата на съседните точки и обратно. Това подсказва, че „поведението“ на неравномерно нагрято тяло се описва от модел, чийто математически израз има вида

$$f\,(t, \nabla\theta, \boldsymbol{q}, \ldots) = 0\,. \tag{22.13}$$

Многоточието в (22.13) включва, евентуално, производни по времето на параметрите на състоянието $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, интеграли, съдържащи $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, и т. н.

Най-простият частен случай на (22.13) е случаят, когато това съотношение включва само векторите $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, свързани при това линейно:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla\theta\,. \tag{22.14}$$

(Напомняме, че всяка линейна векторна функция се описва чрез двувалентен тензор, вж. § 3.2.)

Съотношението (22.14) е известно като *тензорен закон на топлопроводността* или *закон на Фурие–Дюамел*, а $\boldsymbol{K}$ е *тензорът на топлопроводност* на тялото. Това съотношение предполага анизотропност на разпространението на топлината в тялото в смисъл, че едно и също количество топлина „пуснато“ да се разпространява в различни посоки, ще предизвика различно изменение на температурата на елементарния обем. Най-често срещаните тела на практика обаче са „топлинно изотропни“, т. е. двувалентният тензор на топлопроводността $\boldsymbol{K}$ е изотропен и поради това той е сферичен: $\boldsymbol{K} = -\kappa \boldsymbol{I}$. В този случая законът (22.14) се опростява:

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla\theta \,. \tag{22.15}$$

Съотношението (22.15) е известно като *закон на топлопроводността на Фурие*, а множителят κ е *коефициентът на топлопроводност* на тялото. Знакът '$-$' в (22.15) е избран, за да бъде този коефициент κ положителен. (Топлината, да напомним, се разпространява от по-горещото към по-студеното място, т. е. в посока на *отрицателния* градиент на температурата.)

Нека споменем също, че (22.14) е „топлинният“ аналог на закона на Хук на деформацията на линейно еластично тяло, „смъкнат“ надолу по тензорната стълбичка (8.14) (двувалентният тензор на напрежението на Коши $\boldsymbol{T}_\sigma$ е заменен от вектора на топлинния поток, а четиривалентният тензор на еластичните модули $\boldsymbol{H}$ (вж. (25.3) и § 25.1) — с двувалентния тензор $\boldsymbol{K}$ на топлопроводността.

За тяло, подчиняващо се на закона на Фурие (22.15), първият закон на термодинамиката (22.12) приема вида:

$$\rho\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi + \kappa\Delta\theta \,, \tag{22.16}$$

включващ явно полето на температурата θ.