§ 21. Теорема за кинетичната енергия

21.1. Теорема за кинетичната енергия на механична система. Отново започваме с класическия пример на механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \ldots, N$.

Записваме уравнението на движението на всяка една от точките M_k във вида (19.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}\,, \quad k = 1, \ldots, N\,, \tag{21.1}$$

предполагайки, че масите m_k на точките остават постоянни. Умножаваме всяко едно от уравненията (21.1) скаларно с $\boldsymbol{v}_k$ и сумираме по k:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{v}_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \boldsymbol{v}_k\,. \tag{21.2}$$

Но

$$\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v_k^2}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_k^2 = \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k\,,$$

и затова лявата страна на (21.2) може да се препише като

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,, \tag{21.3}$$

където

$$T = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k v_k^2 \tag{21.4}$$

е *кинетичната енергия* на системата.

В дясната страна на (21.2) на свой ред се появиха величините

$$W^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{v}_k\,, \quad W^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \boldsymbol{v}_k \tag{21.5}$$

— това са съответно *мощностите* $W^{\,\mathrm{ext}}$ и $W^{\,\mathrm{int}}$ на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата[3].

[3] За всеки случай да напомним, че мощността е сила по скорост, а работата е сила по преместване, така че мощността е работата, извършена за единица време.

Използването на (21.3) — (21.5) в (21.2) показва, че

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = W^{\,\mathrm{ext}} + W^{\,\mathrm{int}}\,. \tag{21.6}$$

Равенството (21.6) е добре известната теорема за кинетичната енергия от аналитичната механика. Изразено с думи (21.6) означава, че скоростта на изменението на кинетичната енергия на система е сума от мощностите на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата.

Обръщаме внимание, че за разлика от теоремите за количеството движение (§ 19.3) и кинетичния момент (§ 20.2), където вътрешните сили изчезнаха в окончателните формулировки, мощностите на вътрешните сили в уравнението (21.6) *не могат* да се пренебрегнат. Макар те да се разпадат на двойки $(\boldsymbol{F}_{ij}, \boldsymbol{F}_{ji})$ равни и противоположно насочени сили с директриси, определени от отсечките $\overrightarrow{M_iM_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, нищо не може да се твърди за скоростите $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_j$ на самите точки M_i и M_j, така че няма причини да очакваме, че изразът

$$\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{F}_{ji} \cdot (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)$$

ще се анулира в общия случай.

Да припомним сега, че $\boldsymbol{v}_k = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k/\mathrm{d}t$. От дефинициите (21.5) на мощностите на външните и на вътрешните сили тогава следва

$$\begin{aligned} W^{\,\mathrm{ext}} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}\,, \\ W^{\,\mathrm{int}} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}\,, \end{aligned} \tag{21.7}$$

където

$$\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k\,, \quad \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \tag{21.8}$$

са съответно *елементарните работи* на външните и на вътрешните сили, извършени при елементарните премествания $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_k$ на точките M_k на системата, $k = 1, \ldots, n$. Припомняме, че примовете в дефинициите (21.8) означават, че въведените елементарни работи не са пълни диференциали в общия случай.

Заместването на (21.7) в (21.6) дава

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}} + \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}}\,, \tag{21.9}$$

т. е. в сила е следната

Теорема 21.1 (за кинетичната енергия на механична система). *Диференциалът на кинетичната енергия е равен на сумата от елементарните работи на външните и на вътрешните сили, действащи върху точките от системата.*

21.2. Теорема за кинетичната енергия на материален обем. Разглеждаме движението на непрекъснатата среда, в която отделяме материален обем $\mathcal{V}$. Записваме уравнението на движението (19.13) на точките от средата

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,. \tag{21.10}$$

Както и в случая на уравнението на Нютон (21.1), умножаваме (21.10) скаларно с $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}t$ и интегрираме по материалния обем $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{V}} (\nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\,. \tag{21.11}$$

Преобразуваме последователно интегралите в (21.11), като започваме от този в лявата страна:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\\ =\int_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t\\ =\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m\right)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}T\,.\end{aligned} \tag{21.12}$$

Тук

$$T \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2}v^2\mathrm{d}m \tag{21.13}$$

представлява, по дефиниция, *кинетичната енергия* на материалния обем $\mathcal{V}$. Преобразованията в (21.12), да поясним, следват схемата, използвана в края на § 19.4 и § 20.2 — основната идея, напомняме, е в това, че $\mathcal{V}$ е материален обем, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материална производна, която може да се изнася пред знака на интеграла по областта $\mathcal{V}$; в същото време елементарната маса $\mathrm{d}m$ се запазва във всяка частица от средата (§ 18) и т. н.

Първият интеграл в дясната страна на (21.11) представлява очевидно елементарната работа на външните сили, приложени към $\mathcal{V}$. Както и в случая на механична система тези сили можем да разделим на външни и на вътрешни:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{ext}} + \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{int}}\,. \tag{21.14}$$

Външните сили са резултат от взаимодействието на точките от обема $\mathcal{V}$ с обекти, външни спрямо него, например, с останалата част от средата. (Класически пример на външна сила е впрочем и силата на тежестта.) Вътрешните сили се появяват от взаимодействието на частиците от $\mathcal{V}$ помежду си — това може да е резултат, да речем, на кулоновите (електростатични) взаимодействия, ако тези частици носят електричен заряд.

С използването на (21.14) разглеждания интеграл се записва като

$$\begin{aligned} \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}} &= \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} + \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}\,, \\ \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} &= \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}V\,, \quad \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} = \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f}^{\,\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}V\,, \end{aligned} \tag{21.15}$$

където индексът 'm' говори, че разглежданата работа е извършена от масовите (обемните) сили.

Да разгледаме и последния интеграл в дясната страна на (21.11). В декартова система той може да се преобразува по следния начин

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij,j}\, v_i\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left[\, \partial_j\, (\sigma_{ij}\, v_i) - \sigma_{ij} v_{i,j}\, \right] \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathcal{S}} n_j \sigma_{ij} v_i\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t - \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \xi_{ij}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t \qquad \left(\textstyle\sum_{i,j}\right)\,, \end{aligned} \tag{21.16}$$

където $\xi_{ij} = \frac{1}{2}\,(v_{i,j} + v_{j,i})$ са компонентите на тензора на скоростта на деформацията $\boldsymbol{T}_\xi$, вж. § 17.1. Но $n_j \sigma_{ij} = (\boldsymbol{\sigma}_n)_i$, съгласно формулата на Коши (7.9). Това ни позволява да препишем (21.16) в следния безкоординатен вид

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t\,. \tag{21.17}$$

Силите на напрежението $\boldsymbol{\sigma}_n$ действат върху повърхнината $\mathcal{S}$ на материалния обем $\mathcal{V}$. Поради тази причина първият интеграл в дясната страна на (21.17) представлява елементарната работа на външните повърхнинни сили

$$\mathrm{d}'A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t\,. \tag{21.18}$$

Да напомним, че вътрешните напрежения представляват също повърхнинни сили, появяващи се при разрязването на тялото вътре в обема му, вж. § 7.1. Характеристика на тези сили е тензорът на напрежението

$\boldsymbol{T}_\sigma$. Поради това вторият интеграл в дясната страна на (21.17) може да се интерпретира като елементарна работа на вътрешните повърхнинни сили

$$\mathrm{d}' A_\mathrm{s}^\mathrm{int} = -\int_\mathcal{V} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t\,. \tag{21.19}$$

Аналогично на (21.15), индексът 's' тук говори, че разглежданата работа в случая е извършена от повърхнинните сили.

Отчитайки формулите (21.12), (21.15), (21.18) и (21.19), записваме формулата (21.11) във вида

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}' A_\mathrm{m}^\mathrm{ext} + \mathrm{d}' A_\mathrm{m}^\mathrm{int} + \mathrm{d}' A_\mathrm{s}^\mathrm{ext} + \mathrm{d}' A_\mathrm{s}^\mathrm{int}\,. \tag{21.20}$$

Това равенство, изразено с думи, представлява съдържанието на следната

Теорема 21.2 (**за кинетичната енергия на материален обем**). *Диференциалът на кинетичната енергия на материален обем е равен на сумата от елементарните работи на външните и на вътрешните сили, действащи върху точките от обема.*

Да отбележим, че за разлика от постулатите за количеството движение (§ 19.3) и кинетичния момент (§ 20.2), Теорема 21.2 е *строго* следствие на уравнението на движение (21.10) на материална частица. Поради това терминът теорема тук е използван без кавички.

21.3. Локална формулировка на теоремата за кинетичната енергия. Фиксираме материална точка и материален обем $\mathcal{V}$ с маса M около нея. Разделяме (21.20) на M и свиваме обема $\mathcal{V}$ в дадената точка устремявайки, в частност, M към нула. За всеки един от членовете, появяващи се при тази операция, последователно намираме

$$\begin{gathered}
\frac{1}{M}\int_\mathcal{V} \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\mathrm{d}m \xrightarrow[M\to 0]{} \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right),\\
\frac{1}{M}\int_\mathcal{V} \rho \boldsymbol{f}_\mathrm{m}^\mathrm{ext}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \xrightarrow[M\to 0]{} \boldsymbol{f}_\mathrm{m}^\mathrm{ext}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,,\\
\frac{1}{M}\int_\mathcal{V} \rho \boldsymbol{f}_\mathrm{m}^\mathrm{int}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \xrightarrow[M\to 0]{} \frac{1}{\mathrm{d}M}\left(\int_{\mathrm{d}\mathcal{V}} \boldsymbol{f}_\mathrm{m}^\mathrm{int}\,\mathrm{d}m\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0\,,\\
\frac{1}{M}\int_\mathcal{V} \nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\,t \xrightarrow[M\to 0]{} \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t\,,\\
\frac{1}{M}\int_\mathcal{V} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \xrightarrow[M\to 0]{} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t\,.
\end{gathered} \tag{21.21}$$

В последните два реда на (21.21) използвахме, че за елементарния обем $\mathrm{d}\mathcal{V}$ е в сила равенството $\mathrm{d}V = \mathrm{d}m/\rho$. В третия ред забелязахме, че работата на вътрешните сили се анулира при свиването на обема в точка. Причината е добре позната — вътрешните сили се разпадат на двойки равни и противоположно насочени сили, така че главният им вектор се анулира (§ 19.1). При свиването на обема в точка преместването $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ може да се изнесе пред знака на интеграла, който именно представлява споменатия главен вектор за елементарния обем.

От (21.20) и (21.21) следва търсената локална формулировка на теоремата за кинетичната енергия, именно

$$\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t\,. \tag{21.22}$$

Два частни случая на (21.22) заслужават специално отбелязване.

Нека тялото е недеформируемо. Тогава $\boldsymbol{T}_\sigma = 0$ и от (21.22) следва

$$\mathrm{d}\tfrac{1}{2}v^2 = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Това очевидно е познатата от аналитичната механика теорема за кинетичната енергия на материална точка.

Да допуснем, че вътрешни масови сили няма, а в тялото действат само нормални напрежения, т. е. тензорът на напрежението е сферичен

$$\boldsymbol{T}_\sigma = -p\boldsymbol{I}\,. \tag{21.23}$$

(Такава среда е идеалната течност, а p е налягането, вж. § 23.) В този случай (локално)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}'A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} &= \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}'A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} &= \frac{p}{\rho}\operatorname{tr}\boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\\
&= -\,\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}
\end{aligned}$$

— във втория ред сме заместили $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ с $-\dfrac{p}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, използвайки уравнението на непрекъснатостта (18.12). Окончателно, локалната формулировка (21.22) на теоремата за кинетичната енергия има вида

$$\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}\,, \tag{21.24}$$

ако тензорът на напрежението е сферичен, вж. (21.23).

21.4. Алтернативен извод на теоремата за кинетичната енергия. По-горе, в § 21.2 при извода на основното съотношение (21.20) на теоремата за кинетичната енергия умишлено следвахме, практически дословно, схемата и означенията, използвани при извода на аналогичното съотношение (21.9) за механична система в § 21.1. В случая[4], когато $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} = 0$ равенството (21.20) може да се изведе и по един по-прост начин, като не се търси аналогията с механична система.

Именно нека $W = W^{\mathrm{ext}}$ е мощността на външните сили, действащи върху материалния обем $\mathcal{V}$. Тези сили са масовите, с плътност $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}$, и повърхнинните сили $\boldsymbol{\sigma}_n$ на напреженията и затова тяхната мощност е

$$\begin{aligned} W &= W_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, . \end{aligned} \tag{21.25}$$

Прилагаме към втория интеграл (21.25) първо формулата на Коши (7.9), а след това тази на Гаус (11.41):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{T}_\sigma \cdot \boldsymbol{v}) \ \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{T}_\sigma \cdot \boldsymbol{v}) \ \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : (\nabla \boldsymbol{v}) \ \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \, \mathrm{d}V \, , \end{aligned}$$

което заместваме в (21.25)

$$W = \int_{\mathcal{V}} \Big(\underline{\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \rho \boldsymbol{f}} \Big) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \, \mathrm{d}V \, . \tag{21.26}$$

Подчертаната сума в първия интеграл в дясната страна е инерционният член $\rho \boldsymbol{a}$, съгласно уравнението на движението (19.13)

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \rho \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}V$$

[4] Силите $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}$ могат да бъдат резултат, както вече отбелязахме, на кулонови взаимодействие при електрически заредени среди; такива среди тук не се разглеждат (това би изисквало привличане и на уравненията на Максуел на електродинамиката и би довело до значително усложняване). Освен това, да напомним, в локалната формулировка (21.22) $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}$ отпадна.

$$= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2} v^2 \,\mathrm{d}m = \dot{T}\,,$$

където T е кинетичната енергия на материалния обем $\mathcal{V}$, вж. (21.4). Използването на последното равенство в (21.25) дава окончателно

$$W = \dot{T} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V\,. \tag{21.27}$$

Лесно се вижда, че (21.27) е равносилно на (21.20) при направеното предположение $\boldsymbol{f}^{\,\mathrm{int}}_{\mathrm{m}} = 0$.

Да отбележим в заключение, че величината

$$W^{\mathrm{str}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V$$

е въведена от Стокс (1851), който я е нарекъл *мощност на напреженията*. В тази терминология (21.27) означава, че мощността на външните сили, действащи върху материален обем отделен от тялото, поражда скорост на изменение на кинетичната енергия и стоксовата мощност на напреженията.