§ 20. „Теорема“ за кинетичния момент. Симетричност на тензора на напрежението

20.1. Теорема за кинетичния момент на механична система. Както и в § 19.1, разглеждаме механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \dots, N$. Действащите върху точките сили отново се разделят на вътрешни и на външни, вж. (19.1), така че за всяка точка M_k можем да запишем втория закон на Нютон във вида (19.2).

Фиксираме (неподвижен) полюс O и нека $\boldsymbol{r}_k = \overrightarrow{OM_k}$, $k = 1, \dots, N$, са радиус-векторите на точките M_k спрямо този полюс. Умножаваме всяко едно от уравненията (19.2) векторно с $\boldsymbol{r}_k$ и сумираме по k

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, (m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{M}_O^{\,\mathrm{ext}} + \boldsymbol{M}_O^{\,\mathrm{int}} \,, \tag{20.1}$$

където

$$\boldsymbol{M}_O^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \,, \quad \boldsymbol{M}_O^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}$$

са главните моменти, съответно, на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата. Веднага забелязваме, че

$$\boldsymbol{M}_O^{\,\mathrm{int}} = 0 \,, \tag{20.2}$$

по същите причини, по които се анулира главния вектор на вътрешните сили, вж. § 19.1.

За опростяване на лявата страна на (20.1) използваме равенството

$$\boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, (m_k \boldsymbol{v}_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, (\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k) \ . \tag{20.3}$$

То се проверява чрез директно диференциране

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, (\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k) = \underline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \times (m_k \boldsymbol{v}_k)} + \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \, (m_k \boldsymbol{v}_k)$$

— подчертаният член е нула, защото $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k / \mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_k$.

Съотношенията (20.2) и (20.3) позволяват да препишем (20.1) във вида

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,, \tag{20.4}$$

където

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times (m_k \boldsymbol{v}_k) \tag{20.5}$$

е т. нар. *кинетичен момент* (или *момент на количеството движение на системата*).

Равенството (20.5) изразява втората от основните теореми на аналитичната механика, а именно:

Теорема 20.1 (за кинетичния момент). *Скоростта на изменението на кинетичния момент на система е равно на главния момент на външните сили, действащи върху точките от системата.*

20.2. Аксиома на Ойлер за кинетичния момент на материален обем. Да разгледаме първо, вместо механичната система от краен брой точки, по-общия случай на абсолютно твърдо тяло, заемащо обем $\mathcal{V}$. Практически дословно повторение на разсъжденията от § 19.2 ще ни доведе до израза

$$\boldsymbol{G}_O \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,, \tag{20.6}$$

който именно се приема в аналитичната механика за дефиниция на кинетичен момент на абсолютно твърдото тяло $\mathcal{V}$. Аналогично на теоремата за количеството движение (§ 19.1), и тук равенството (20.4) губи за такова тяло статута си на теорема. Това равенство се постулира от Ойлер като независимо твърдение, от което той извежда знаменитите си уравнения на динамиката на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка, вж. § 6.3.

При изучаване на движението на непрекъсната среда равенството (20.4) отново не може да се разглежда като строго следствие на втория закон на Нютон. Нещо повече, обемът $\mathcal{V}$ и тук трябва да бъде материален. За такъв обем Ойлер постулира валидността на следната аксиома, напълно аналогична по дух на аксиомата за количеството движение (19.8), а именно:

Втора аксиома на Ойлер (за кинетичния момент на материален обем). *Нека $\mathcal{V}$ е произволен материален обем на непрекъсната среда. Тогава*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,, \tag{20.7}$$

където $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ *е материалната производна, а* $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ *е главният момент на външните сили, действащи върху обема* $\mathcal{V}$*.*

20.3. Симетричност на тензора на напрежението. Ще покажем, че основното следствие на ойлеровата аксиома (20.7) е симетричността на тензора на напрежението на Коши.

Както и в § 19.3, изрязваме мислено от средата материален обем $\mathcal{V}$. Съставяме главния момент на външните сили, действащи върху $\mathcal{V}$ — това са отново обемните сили с плътност $\boldsymbol{f}$ и силите на вътрешните напрежения:

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S\,,$$

вж. фиг. 19.2, и използваме аксиомата за кинетичния момент (20.7):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S\,. \tag{20.8}$$

Преобразуваме първо лявата страна на (20.8) по начин, аналогичен на този, използван в края на § 19.4 при извода на формулата (19.11):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}m \\ &= \int_{\mathcal{V}} \underline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m\,,\end{aligned} \tag{20.9}$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_0 = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times (\rho\,\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}m\,, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{20.10}$$

където $\boldsymbol{a}$ е ускорението на материалната частица. (Подчертаният член в (20.9) се анулира, защото $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ по дефиниция на скоростта на частицата.) В (20.9) използваме, да припомним, че $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материална производна, $\mathcal{V}$ е материален обем, така че $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ може да се внесе под знака на интеграла $\int_{\mathcal{V}}$, а $\mathrm{d}m = \mathrm{const}$ — масата $\mathrm{d}m$ на материалната частица остава неизменна по време на движението.

Упражнение 20.1. *Изведете формулата* (20.10), *ползвайки в* (20.9) *правилото* (18.7) *за диференциране на интеграл по променлив обем и уравнението на непрекъснатостта* (18.12).

Преобразуваме повърхнинния интеграл в дясната страна на (20.8) в обемен. За целта прилагаме първо формулата на Коши $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_\sigma$, вж. (7.9). В декартова система

$$(\boldsymbol{\sigma}_n)_k = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)_k = n_\ell\,\sigma_{\ell k} \quad \left(\textstyle\sum_\ell\right)$$

и затова

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n)_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, (\boldsymbol{\sigma}_n)_k = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{\ell k}\, n_\ell\,. \tag{20.11}$$

Прилагаме формулата на Гаус към i-тата компонента на повърхнинния интеграл в (20.8), като използваме (20.11):

$$\int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n)_i \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} n_\ell\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{\ell k}\,\mathrm{d}S$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \partial_\ell\, (\varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{\ell k})\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk}\, (x_j\, \sigma_{\ell k,\,\ell} + x_{j,\ell}\sigma_{\ell k})\,\mathrm{d}V \qquad \Big(\textstyle\sum_{j,k.\ell}\Big)\,. \tag{20.12}$$

Но $x_{j,\ell} = \delta_{j\ell}$, и затова

$$\varepsilon_{ijk}\, x_{j,\ell}\, \sigma_{\ell k} = \varepsilon_{ijk}\, \delta_{j\ell}\, \sigma_{\ell k} = \varepsilon_{ijk}\, \sigma_{jk} = (\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^*)_i\,,$$

като двоеточието означава, да напомним, контракция по две двойки индекси. На свой ред $\sigma_{\ell k,\,\ell} = (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)_k$ е k-тата компонента на дивергенцията $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma$ на тензора $\boldsymbol{T}_\sigma$, вж. § 13.5. Тогава $\varepsilon_{ijk}\, x_j\, \sigma_{\ell k,\,\ell}$ е k-тата компонента на векторното произведение $\boldsymbol{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)$ и равенство (20.12), написано безкоординатно, приема вида

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \Big(\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^*\Big)\,\mathrm{d}V\,. \tag{20.13}$$

Заместваме (20.10) и (20.13) в (20.8):

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \underline{(\rho\, \boldsymbol{a} - \rho \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^* \,\mathrm{d}V\,.$$

Подчертаният член се анулира вследствие на уравнението на движението (19.13). Следователно

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^* \,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{20.14}$$

Но (20.14) е в сила за *произволен* материален обем $\mathcal{V}$. Свивайки този обем в точка намираме, че

$$\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^* = 0\,. \tag{20.15}$$

От (20.15) следва симетричността на тензора на напрежението

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \boldsymbol{T}_\sigma^*\,. \tag{20.16}$$

Наистина съотношението (20.15), записано в декартова система, ни дава например

$$(\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^*)_1 = \varepsilon_{1jk}\, \sigma_{jk} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0\,,$$

т. е. $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Аналогично намираме $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, което и означава, че тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ наистина е симетричен.