Глава 1

ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА

§ 2. Вектори — безкоординатна и координатна дефиниции

2.1. Вектори. Векторът е елемент на векторно пространство. Това почти тавтологично твърдение „определя“ понятието вектор *безкоординатно*.

В конкретните приложения векторите се появяват често и като набори от координати (компоненти) в дадена координатна система; при това обаче е необходимо да знаем как се преобразуват тези координати при смяна на координатната система. Координатното описание на вектора ще обсъдим по-подробно в § 2.2. Преди това е необходимо да напомним няколко добре известни факти от линейната алгебра.

Нека $\mathcal{E}$ е векторно пространство. Обектите на $\mathcal{E}$ означаваме с получерни букви $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}, \ldots$ Напомняме, че във векторно пространство са зададени две операции: *умножение* на вектор със скалар $\lambda \in \mathcal{R}$ (интересува ни само реалният случай, така че $\mathcal{R}$ е числовата ос) и *събиране* на вектори. Геометрично изобразяваме векторите като насочени отсечки (с фиксирано и общо за всички тях начало). Тогава събирането им се осъществява по добре познатото правило на многоъгълника. Операциите „умножение на число“ и „събиране“ се подчиняват на няколко естествени (от гледна точка на „здравия разум“ и интуицията) аксиоми, чието изреждане тук е излишно.

Предполагаме, освен това, че пространството $\mathcal{E}$ е *евклидово*, т. е. че съществува скаларно произведение или, иначе казано, симетрична билинейна (положителнодефинитна) форма, която на всеки два вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ съпоставя числото $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}$

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \longrightarrow \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\,, \tag{2.1}$$

линейно по всеки аргумент. Дължината $a \equiv |\boldsymbol{a}|$ на вектора $\boldsymbol{a}$ тогава е

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\ .$$

2.2. Координатно разлагане на вектор. Напомняме, че система от вектори $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha)$, се нарича *линейно независима*, ако, при $\lambda_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, \alpha$,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i\, \boldsymbol{a}_i = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda_i = 0\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, \alpha\,.$$

С други думи, линейна комбинация на линейно независима система от вектори се анулира тогава и само тогава, когато тя е тривиална.

Размерността (или *димензията*) на пространството е естествено число $n = \dim \mathcal{E}$ със следните свойства:

а) съществува линейно независима система от n вектора;

б) всяка система от $n+1$ вектора е линейно зависима.

По-надолу, за да подчертаем, че работим в n-мерно пространство $\mathcal{E}$, ще използваме означението $\mathcal{E}_n$ (макар че във всички конкретни механични приложения е достатъчно да се ограничим с тримерния случай $n = 3$).

Системите от n линейно независими вектора се наричат *базиси*. Всеки вектор $\boldsymbol{x}$ се разлага еднозначно по елементите на базиса:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{a}_i = x^i \boldsymbol{a}_i = x^k \boldsymbol{a}_k\,, \tag{2.2}$$

където x^i, $i = 1, \ldots, n$, са компонентите на вектора $\boldsymbol{x}$ спрямо разглеждания базис.

В (2.2) е въведено *правилото на Айнщайн*, което ще се използва навсякъде по-нататък: *ако във формула от вида* (2.2) *се срещат два еднакви индекса, единият долен, другият - горен, се подразбира сумиране по тези индекси от 1 до* n. (Фактът на повторение на индекса заменя символа $\sum$ на сумиране!) Записвайки в (2.2) сумата един път с помощта на индекса 'i', а един път с 'k', подчертаваме, че използваният за означение символ *е без значение* — щом той се повтаря, имаме сумиране. С други думи е съществен не конкретният символ i, k и т.н., а само фактът на двукратното му използване във формулата, един път като долен, друг път като горен. Поради това обстоятелство такива индекси се наричат *неми*.

2.3. Дуален базис. Нека $\{\boldsymbol{a}_i\}$ е базис в $\mathcal{E}_n$. Разглеждаме системата от вектори $\{\boldsymbol{a}^j\}$ със свойството

$$\boldsymbol{a}^j \cdot \boldsymbol{a}_i = \delta_i^j\,, \tag{2.3}$$

$i, j = 1, \ldots, n$. Тук δ_i^j са добре познатите *символи на Кронекер*:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & i \neq j\,. \end{cases}$$

Лесно се проверява, че векторите $\{\boldsymbol{a}^j\}$ са линейно независими и поради това също образуват базис в $\mathcal{E}_n$, наречен *дуален* (на $\{\boldsymbol{a}_i\}$). Очевидно базисът, дуален на $\{\boldsymbol{a}^j\}$, е изходният базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$.

При $n = 3$ съществува проста и удобна формула за явно пресмятане на дуалния базис, именно

$$\boldsymbol{a}^1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)}\,, \quad \boldsymbol{a}^2 = \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_2 \cdot (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1)}\,, \quad \boldsymbol{a}^3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_3 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2)}\,. \tag{2.4}$$

(Забележете, че формулите за $\boldsymbol{a}^2$ и $\boldsymbol{a}^3$ се получават от тази за $\boldsymbol{a}^1$ чрез циклична смяна на индексите $1 \to 2 \to 3 \to 1$.) Формулите (2.4) са известни като *формули на Гибс*.

Ако базисът съвпада с дуалния си, т. е. ако

$$\boldsymbol{a}^i = \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{2.5}$$

то той се нарича *ортонормиран* (елементите му са взаимно перпендикулярни и имат единични дължини, както веднага следва от (2.3)).

След въвеждането на базиса $\{\boldsymbol{a}^i\}$, дуален на $\{\boldsymbol{a}_i\}$, естествено е да разгледаме също и разлагането на вектора спрямо този базис $\{\boldsymbol{a}^i\}$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}^i = x_i \boldsymbol{a}^i = x_k \boldsymbol{a}^k\,. \tag{2.6}$$

„Логиката“ на айнщайновото правило за сумиране ни кара да запишем сега компонентите x_i на вектора $\boldsymbol{x}$ спрямо дуалния базис, използвайки долни индекси.

2.4. Формули за компонентите. Разглеждането на базиса $\{\boldsymbol{a}_i\}$ заедно с неговия дуален $\{\boldsymbol{a}^i\}$ е много удобно за пресмятане на компонентите на вектор. Наистина, ако умножим скаларно вектора $\boldsymbol{x}$ в (2.2) с вектора $\boldsymbol{a}^k$, то

$$\boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^k \cdot \left(x^i \boldsymbol{a}_i\right) = x^i \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{a}_i = x^i \delta_i^k = x^k\,,$$

което веднага следва от дефинициите на дуалния базис (2.3) и на символа на Кронекер. Следователно

$$x^k = \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{x}, \quad x_k = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{2.7}$$

Втората формула тук се получава аналогично, но след скаларно умножаване на двете страни на (2.6) с вектора $\boldsymbol{a}_k$.

Обръщаме внимание, че формулата (2.7) е очевидно обобщение на добре познатия начин за пресмятане на компонентите на вектор при разлагането му по ортонормиран базис $\boldsymbol{e}_i$:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha, \quad x_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}, \quad \alpha = 1, \ldots, n\,.$$

Очевидно е, че ако базисът е ортонормиран, то отпада разликата между компонентите на векторите с долни и горни индекси.

Нека

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{a}^i = x^i \boldsymbol{a}_i, \quad \boldsymbol{y} = y_i \boldsymbol{a}^i = y^i \boldsymbol{a}_i\,,$$

са вектори от $\mathcal{E}_n$. Скаларното им произведение тогава се пресмята по формулата

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(x_i \boldsymbol{a}^i\right) \cdot \left(y^j \boldsymbol{a}_j\right) = x_i y^j \delta_i^j = x_\alpha y^\alpha \tag{2.8а}$$

или, аналогично,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x^\alpha y_\alpha\,. \qquad (2.8б))$$

За ортонормиран базис (2.8b) е добре познатата формула

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha y_\alpha\,, \tag{2.9}$$

доколкото в случая няма разлика между компонентите с долни и горни индекси.

2.5. Линейни форми и дуално пространство. По-долу ще се срещнем с т. нар. *линейни форми* над $\mathcal{E}_n$. По дефиниция това са линейни изображения, които на всеки вектор $\boldsymbol{x}$ съпоставят числото $f(\boldsymbol{x}) \in \Re$:

$$\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n\,,$$

линейно по $\boldsymbol{x}$, т. е.

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})\,, \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}_n\,,\ \alpha, \beta \in \Re\,.$$

Съвкупността от линейните форми над дадено линейно пространство $\mathcal{A}$ отново образува линейно пространство, което се означава с $\mathcal{A}^*$ и се нарича *дуално* на $\mathcal{A}$. Лесно се показва, че $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^*$. В общия случай, когато $\mathcal{A}$ е векторно, но *не е евклидово* пространство (в него не е зададено скаларно произведение), пространствата $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ *не могат* да се отъждествят, и следва да се третират като *различни*. За да се подчертае това, елементите на $\mathcal{A}$ се наричат вектори, а елементите на $\mathcal{A}^*$, т. е. формите — *ковектори*.

В разглеждания случай на евклидово пространство обаче $\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n^*$ могат да се отъждествят в този смисъл, че всяка форма над $\mathcal{E}_n$ се поражда чрез скаларното умножение с даден вектор от $\mathcal{E}_n$. С други думи, ако $\xi(\boldsymbol{x})$ е форма над $\mathcal{E}_n$, то съществува вектор $\boldsymbol{\xi}$, такъв че

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x} \,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathcal{E}_n \,. \tag{2.10}$$

Наистина ако $\boldsymbol{a}_i$ е базис в $\mathcal{E}_n$ то, съгласно (2.8a),

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \xi\left(x^i \boldsymbol{a}_i\right) = x^i \xi(\boldsymbol{a}_i) = x^i \xi_i \,,$$

т. е.

$$\xi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \text{където} \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_i \boldsymbol{a}^i \,, \quad \xi_i = \xi(\boldsymbol{a}_i) \,.$$

2.6. Метрически коефициенти. „Жонглиране“ с индекси. Доколкото $\{\boldsymbol{a}_i\}$ и $\{\boldsymbol{a}^j\}$ са базиси в едно и също пространство $\mathcal{E}_n$, всеки вектор от единия базис може да се разложи по елементите на другия:

$$\boldsymbol{a}^i = g^{ij}\, \boldsymbol{a}_j \,, \quad \boldsymbol{a}_i = g_{ij}\, \boldsymbol{a}^j \,. \tag{2.11}$$

Коефициентите g^{ij} и g_{ij} се наричат *метрически*, по причини, които ще поясним по-долу (§ 3). Пресмятането им е елементарно — умножаваме първото съотношение в (2.11) скаларно с $\boldsymbol{a}_k$, а второто с $\boldsymbol{a}^k$. Използването на (2.3) веднага води до съотношенията

$$g^{kj} = \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{a}^j \,, \quad g_{kj} = \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_j \,. \tag{2.12}$$

Следователно матрицата $\|g_{kj}\|$ носи информация за дължините на векторите $\{\boldsymbol{a}_i\}$ и за ъглите между тях. Аналогично, $\|g^{kj}\|$ носи същата информация за дуалния базис $\{\boldsymbol{a}^i\}$.

Очевидно матриците $\|g_{kj}\|$ и $\|g^{kj}\|$ са взаимно-обратни, т. е.

$$g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta^i_j \,. \tag{2.13}$$

Ясно е също, че за ортонормиран базис

$$g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij} \, ,$$

т. е. и двете матрици $\|g^{kj}\|$ и $\|g_{kj}\|$ са единичните.

С помощта на метрическите коефициенти се установява простите връзки между компонентите x^i и x_i на един и същ вектор

$$x^i = g^{ij} x_j \, , \quad x_i = g_{ij} \, x^j \, , \tag{2.14}$$

които са очевидни следствия от (2.7) и (2.11).

Формулата (2.14) е най-простият пример на т. нар. *жонглиране с индекси*, в смисъл, че индексите се „подхвърлят“ отдолу горе и „падат“ обратно с помощта на матриците $\|g^{kj}\|$ и $\|g_{kj}\|$.

2.7. Преобразуване на базиса. Изборът на базиса $\{\boldsymbol{a}_i\}$ при разлагане на вектора е нещо, което зависи от конкретния контекст. В $\mathcal{E}_n$ съществуват безбройно много базиси и всички те са *равноправни* — няма общ критерий, по който можем да дадем предпочитание на един базис в сравнение с други.

Нека $\{\boldsymbol{a}_{i'}\}$ е друг базис в пространството. Него ще наричаме „нов“, докато базисът $\{\boldsymbol{a}_i\}$, с който работихме досега, ще наричаме „стар“. Тогава

$$\boldsymbol{a}_{i'} = A^i_{i'} \, \boldsymbol{a}_i \, , \quad \boldsymbol{a}_i = A^{i'}_i \, \boldsymbol{a}_{i'} \, , \tag{2.15}$$

тъй като, както векторите $\boldsymbol{a}_i$, така и векторите $\boldsymbol{a}_{i'}$, лежат в $\mathcal{E}_n$ и всеки един от тях може да се разложи по векторите на базиса $\{\boldsymbol{a}_{i'}\}$ и $\{\boldsymbol{a}_i\}$, съответно.

Обръщаме внимание, че матриците $\|A^i_{i'}\|$ и $\|A^{i'}_i\|$ са *различни*, въпреки че използваме една и съща буква A в означенията им. Нещо повече, те очевидно са *взаимнообратни*, т. е.

$$A^i_{i'} \, A^{i'}_j = \delta^i_j \, , \quad A^{i'}_i \, A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'} \, . \tag{2.16}$$

Да попитаме първо как се преобразуват дуалните базиси при смяната на базиса. Нека $\boldsymbol{a}^{i'} = B^{i'}_i \, \boldsymbol{a}^i$ е преобразованието на дуалния базис. От дефиницията (2.3) следва

$$\begin{aligned} \delta^{i'}_{j'} &= \boldsymbol{a}^{i'} \cdot \boldsymbol{a}_{j'} = \left(B^{i'}_i \, \boldsymbol{a}^i \right) \cdot \left(A^j_{j'} \, \boldsymbol{a}_j \right) \\ &= B^{i'}_i \, A^j_{j'} \, \boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}_j = B^{i'}_i \, A^j_{j'} \, \delta^i_j = B^{i'}_i \, A^i_{j'} \, , \end{aligned}$$

което означава, че матрицата $\|B_i^{i'}\|$ е обратна на $\|A_{i'}^i\|$. Следователно $B_i^{i'} = A_i^{i'}$, вж. (2.16), т. е.

$$\boldsymbol{a}^{i'} = A_i^{i'}\,\boldsymbol{a}^i\,, \tag{2.17}$$

което означава, че ако базисът се сменя с помощта на матрицата $\|A_{i'}^i\|$, то *дуалният базис се сменя с помощта на обратната матрица* $\|A_i^{i'}\|$. Записваме този прост, но основен за по-нататъшните разсъждения, факт по следния схематичен начин

$$\boldsymbol{a}_i \xrightarrow{A} \boldsymbol{a}_{i'}\,, \quad \boldsymbol{a}^i \xrightarrow{A^{-1}} \boldsymbol{a}^{i'}\,. \tag{2.18}$$

2.8. Координатна дефиниция на вектор. Контравариантни и ковариантни компоненти. Да разложим даден вектор $\boldsymbol{x}$ едновременно и в новия и стар базис

$$\boldsymbol{x} = x^i\,\boldsymbol{a}_i = x^{i'}\boldsymbol{a}_{i'}\,,$$

и да попитаме каква е връзката между компонентите x^i и $x^{i'}$ на този вектор.

От (2.7) и (2.17) имаме

$$x^{i'} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}^{i'} = \boldsymbol{x}\cdot A_i^{i'}\,\boldsymbol{a}^i = A_i^{i'}\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}^i = A_i^{i'}x^i\,.$$

Аналогично, ако

$$\boldsymbol{x} = x_i\,\boldsymbol{a}^i = x_{i'}\,\boldsymbol{a}^{i'}\,,$$

то от (2.15) и (2.7) следва, че

$$x_{i'} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_{i'} = \boldsymbol{x}\cdot A_{i'}^i\,\boldsymbol{a}_i = A_{i'}^i\,\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_i = A_{i'}^i\,x_i\,.$$

Следователно, при смяна на базиса по закона (2.15), компонентите на вектора $\boldsymbol{x}$ се преобразуват по правилото

$$x^{i'} = A_i^{i'}x^i\,, \quad x_{i'} = A_{i'}^i\,x_i\,. \tag{2.19}$$

Това е т. нар. *векторен закон* за преобразуване на компонентите. Той позволява да дефинираме координатно вектора по следния начин.

Дефиниция 2.1. *Векторът е наредена двойка* $\{\boldsymbol{a}_i, x^i\}$, *състояща се от базис* $\{\boldsymbol{a}_i\}$ *и числа* $\{x^i\}$, *наречени (контравариантни) компоненти на вектора в този базис. При смяна на базиса по закона* (2.15), *компонентите* x^i *се сменят съгласно първото от съотношенията на векторния закон* (2.19).

Забелязваме, че компонентите x^i се преобразуват с помощта на матрицата $\|A_i^{i'}\|$, *обратна* на тази, преобразуваща базиса. Поради това именно компонентите x^i се наричат *контравариантни*.

Напълно аналогично се определя векторът $\boldsymbol{x}$ с помощта на *ковариантните* си компоненти x_i. Това е наредена двойка $\{\boldsymbol{a}_i, x_i\}$ — във всеки базис $\{\boldsymbol{a}_i\}$ е зададен наборът от *ковариантни* компоненти $\{x_i\}$ на вектора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите x_i се сменят по векторния закон, който в случая представлява второто от съотношенията (2.19).

Забелязваме, че компонентите x_i се преобразуват с помощта на *същата* матрица $\|A_{i'}^i\|$, която преобразува и базиса, вж. (2.15). Това обяснява защо компонентите x_i се наричат *ковариантни*.

Координатна дефиниция на вектора може да се резюмира и онагледи с „графичното“ представяне

$$\boldsymbol{x} = \underset{\curvearrowleft}{x^i}\, \underset{\curvearrowright}{\boldsymbol{a}}{}_i = \underset{\curvearrowright}{x_i}\, \underset{\curvearrowleft}{\boldsymbol{a}}{}^i\,, \tag{2.20}$$

в което знакът $\curvearrowright$ съответства на преобразуване или, образно казано, „завъртане“, с помощта на матрицата $A = \|A_{i'}^i\|$, а знакът $\curvearrowleft$ — на обратното „завъртане“ с помощта на матрицата $A^{-1} = \|A_i^{i'}\|$, вж. (2.15).

Формулата (2.20) изразява *инвариантността* на понятието вектор. Това е обект, който *не зависи* от избора на координатната система (базиса). При смяна на базиса с помощта на матрица A, съответстваща на символа $\curvearrowright$, контравариантните компоненти се сменят с помощта на обратната матрица A^{-1}, т. е. символа $\curvearrowleft$ в (2.20). Двете взаимнообратни преобразования A и A^{-1}, съответно, т. е. символите $\curvearrowright$ и $\curvearrowleft$ взаимно „се изяждат“. Като следствие, векторът $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{a}_i$ *не чувства* преобразуването на базиса, както и трябва да бъде за *всеки инвариантен обект*, независещ от избора на координатната система. Това е и смисълът на неговата инвариантност спрямо базиса,