§ 19. Динамични аксиоми на Ойлер. „Теорема“ за количеството движение

19.1. Теорема за количеството движение на механична система. Разглеждаме механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \ldots, N$. Върху всяка точка действа сила $\boldsymbol{F}_k$, която представяме във вида

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}_k^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\text{int}}\,, \quad k = 1, \ldots, N\,. \tag{19.1}$$

Тук $\boldsymbol{F}_k^{\text{int}}$ е равнодействащата на *вътрешните* сили, т. е. на силите, действащи върху k-тата точка в резултат от взаимодействието ѝ с останалите точки от системата. На свой ред $\boldsymbol{F}_k^{\text{ext}}$ е резултат от действието на *външните* сили, които се появяват от взаимодействието на M_k с обекти, външни спрямо системата (т. е. не включени в състава ѝ).

Да забележим веднага, че множеството от вътрешните сили се разпада на двойки равни и срещуположно насочени сили с общи директриси, определени от отсечките $\overrightarrow{M_iM_j}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Това е очевидно следствие на третия закон на Нютон (закона за действието и противодействието).

Записваме втория закон на Нютон за всяка една от точките M_k

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\text{int}}\,, \quad k = 1, \ldots, N\,, \tag{19.2}$$

и сумираме спрямо k

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k\right) = \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \boldsymbol{F}^{\,\text{int}}\,, \tag{19.3}$$

където

$$\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\text{ext}}\,, \quad \boldsymbol{F}^{\,\text{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\text{int}}$$

са главните вектори съответно на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата. Но $\boldsymbol{F}^{\,\text{int}} = 0$ съгласно направената по-горе забележка за характера на вътрешните сили. Ако въведем т. нар. *количество на движението* (или *импулс*) на системата

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k\,, \tag{19.4}$$

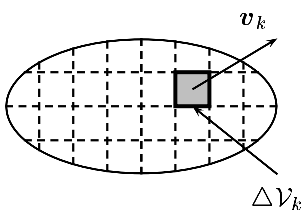
то (19.3) може да се напише във вида

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}} . \tag{19.5}$$

Равенството (19.5) изразява една от основните теореми на аналитичната механика, а именно:

Теорема 19.1 (за количеството движение). *Скоростта на изменението на количеството движение на система е равно на главния вектор на външните сили, действащи върху точките от системата.*

19.2. Количество на движение на абсолютно твърдо тяло. Да припомним начина по който се въвежда понятието количество на движението на абсолютно твърдо тяло в аналитичната механика.



Фиг. 19.1

Разглеждаме абсолютно твърдо тяло $\mathcal{V}$, вж. фиг. 19.1. Разбиваме областта $\mathcal{V}$ на (взаимно непресичащи се) части $\triangle\mathcal{V}_k$, всяка една от тях с маса Δm_k. Масовият център на частта $\triangle\mathcal{V}_k$ се движи със скорост $\boldsymbol{v}_k$. Разглеждаме всяка част като материална точка и въвеждаме приближено количеството на движението на тялото $\mathcal{V}$ като сумата

$$\boldsymbol{Q} \approx \sum_k \boldsymbol{v}_k \triangle m_k . \tag{19.6}$$

Естествено е сега да извършим граничния преход, при който разбиването на обема става все „по-фино“, т. е. диаметърът на частите $\Delta\mathcal{V}_k$ се стреми към нула. Но (19.6) е очевидно риманова сума и при указания граничен преход тя се стреми към (тройния) интеграл

$$\boldsymbol{Q} \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m , \tag{19.7}$$

който именно се приема в аналитичната механика за дефиниция на понятието количество на движението на абсолютно твърдото тяло $\mathcal{V}$.

19.3. Аксиома на Ойлер за количеството движение на материален обем. Поради качествения характер на разсъжденията, довели ни до дефиницията (19.7) на количеството движение на абсолютно твърдо тяло, равенството (19.5) не може да се третира вече като теорема, т. е. като математически строго твърдение, произтичащо от втория закон на Нютон. Това равенство се използва от Ойлер като една от изходните точки при построяване на динамиката на твърдо тяло, но вече като аксиома, *независима* от нютоновите закони. (Това обяснява защо наименованието „теорема“ в заглавието на този параграф е поставено в кавички.)

Аналогичен е подходът на Ойлер и при изучаване на движението на непрекъснатата среда. В този случай равенството (19.5) отново не може да се третира като строго следствие на втория закон на Нютон. Нещо повече, за непрекъснатата среда и обемът $\mathcal{V}$ не може да е произволен, имайки предвид, че той се движи и деформира заедно със средата. Естественото предположение се състои в това, че обемът $\mathcal{V}$ е материален, т. е. той е съставен от едни и същи материални частици, вж. § 18.1. За такъв обем Ойлер постулира валидността на следното основно за механиката на непрекъснатите среди твърдение:

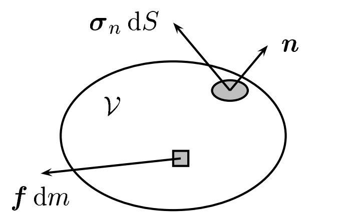
Първа аксиома на Ойлер (за количеството движение на материален обем). *Нека $\mathcal{V}$ е произволен материален обем на непрекъсната среда. Тогава*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}\,, \tag{19.8}$$

където $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материалната производна, а $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ е главният вектор на външните сили, действащи върху обема $\mathcal{V}$.

19.4. Уравнение на движението на непрекъсната среда. Основно следствие на първата ойлерова аксиома е уравнението на движението на непрекъснатата среда.

Да отделим мислено материалния обем $\mathcal{V}$ от средата. Върху този обем действат масовите сили с плътност $\boldsymbol{f}$, т. е. върху инфинитезималния обем с маса $\mathrm{d}m$ е приложена силата $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m$, вж. фиг. 19.2. В резултат от отделянето на обема $\mathcal{V}$ от средата, по границата му $\mathcal{S}$ се появяват и силите на вътрешните напрежения — върху всяка елементарна площадка с лице $\mathrm{d}S$ и с единичен вектор на външната нормала $\boldsymbol{n}$, действа повърхнинната сила $\boldsymbol{\sigma}_n\mathrm{d}S$, вж. отново фиг. 19.2 и § 7.1. Следователно главният вектор на външните сили, приложени към материалния обем



Фиг. 19.2

$\mathcal{V}$, е

$$\boldsymbol{F}^{\,\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S$$

и ойлеровата аксиома (19.8) се свежда до равенството

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S\,, \tag{19.9}$$

което, да подчертаем, е в сила за *произволен* материален обем $\mathcal{V}$.

За превръщането на втория интеграл в дясната страна на (19.9) от повърхнинен в обемен използваме първо формулата на Коши (7.9), а след това тази на Гаус (11.41)

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,\mathrm{d}V\,. \tag{19.10}$$

На свой ред интегралът в лявата страна на (19.9) се преобразува в обемен с помощта на правилото (18.8) за диференциране на интеграл по променлив обем:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}}\left(\frac{\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} + \rho\boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}V\\ &= \int_{\mathcal{V}}\left(\rho\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\left[\underline{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}}\right]\right)\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V\,, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{19.11}$$

— подчертаният член в квадратните скоби се анулира вследствие на уравнението на непрекъснатостта (18.12). В последния ред на (19.11) $\boldsymbol{a}$ е ускорението на материалната частица, т. е. материалната производна на скоростта спрямо времето, вж. (14.23).

С помощта на (19.10) и (19.11) написваме (19.9) във вида

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho\boldsymbol{a} - \rho\boldsymbol{f} - \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma)\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{19.12}$$

Равенството (19.12) е в сила за произволен материален обем $\mathcal{V}$. Като свиваме този обем в точка (предполагайки подинтегралната функция непрекъсната) получаваме съотношението:

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,. \tag{19.13}$$

Уравнението (19.13) представлява локалната формулировка на ойлеровата „теорема“ за количеството движение. То се нарича *уравнение* *на движението* на непрекъснатите среди. Подчертаваме, че то е в сила за произволна среда, независимо от нейната специфика (еластична, вискозна и т. н.) и от характера на нейното движение.

Да напомним, че с уравнението на движението (19.13), изведено по един по-нагледен и евристичен начин в декартова координатна система, вече се срещнахме в § 7.5, вж. (7.18) и (7.19). Интерпретацията му беше също обсъдена в края на § 7.5. Да я повторим и тук.

Ако частицата е абсолютно твърда, то в нея отсъстват вътрешни напрежения и е в сила втория закон на Нютон $\boldsymbol{\rho a} = \boldsymbol{\rho f}$; тук единствената сила е масовата. Деформацията на частицата води до появата на вътрешни напрежения, които се описват чрез тензора на напрежението на Коши. Уравнението на движението на частицата вече е (19.13), което ще препишем във вида

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\Phi}\,, \quad \boldsymbol{\Phi} = \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma\,.$$

Сравнението на последното уравнение с втория закон на Нютон за недеформируема частица показва, че деформируемостта локално се проявява като една масова сила, равна на дивергенцията $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma$ на тензора на напрежението.

Да отбележим в заключение на този пункт, че формулата (19.11) може да се изведе и по-просто, без използване на правилото (18.7) за диференциране на интеграл по променлив обем. Именно, производната $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ в (19.9) е материална, т. е. производна във фиксирана материална частица. Обемът $\mathcal{V}$ е също материален, съставен по такъв начин само от материални частици. Поради това $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ може да се внесе под знака на интеграла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m\right)\,. \tag{19.14}$$

Но $\mathrm{d}m$ е масата на елементарния материален обем от средата, която не се изменя по време на движението (законът за запазването на масата, изразен локално чрез уравнението на непрекъснатостта (18.12), вж. § 18.2). Поради това $\mathrm{d}m$ може да се изнесе пред знака на материалната производна в дясната страна на (19.14)

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m\right) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}V\,,$$

което съвпада с (19.11).

19.5. Уравнение на движението в ойлерови координати. Да запишем уравнението (19.13) спрямо ойлеровите координати, използвайки връзката между пълната и локалната производна

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma \,, \tag{19.15}$$

вж. (14.23).

Уравнението (19.15) показва, че във всички задачи на механиката на непрекъснатите среди, в които скоростта $\boldsymbol{v}$ на движението на частиците не е пренебрежимо малка, участва нелинейния член $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$. Това прави подобни задачи са *нелинейни* и обяснява големите трудности при тяхното решаване.