Глава 4

ОБЩИ ТЕОРЕМИ НА МЕХАНИКАТА НА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ СРЕДИ

§ 18. Уравнение на непрекъснатостта

18.1. Диференциране на интеграл по променлив обем. Нека $\mathcal{V}$ е материален обем, т. е. област, съставена от материални частици. Спрямо лагранжевите координати X_k този обем ще остава неизменен по време на движението на средата, тъй като координатите X_k на частиците не се променят. Спрямо ойлеровата координатна система x_i обаче обемът ще е променлив, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$.

Да разгледаме функцията

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i, t) \, \mathrm{d}V \tag{18.1}$$

и за пресметнем скоростта ѝ на изменение във времето. Обръщаме внимание на специфичността на функцията $\Phi(t)$ — това е интеграл по променлив обем, чиято подинтегрална функция също зависи от времето.

Нека областта $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ за интервала от време $t, t + \triangle t)$ се е променила с $\triangle\mathcal{V}$, така че

$$\mathcal{V}(t + \triangle t) = \mathcal{V}(t) \cup \triangle\mathcal{V} \,.$$

Пресмятаме производната на функцията $\Phi(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}\Bigg[&\int_{\mathcal{V} \cup \triangle\mathcal{V}} f(x_i, t + \triangle t) \, \mathrm{d}V \\ &+ \int_{\mathcal{V}} f(x_i, t) \, \mathrm{d}V \Bigg] = \Psi_1(t) + \Psi_2(t) \,, \end{aligned} \tag{18.2}$$

където

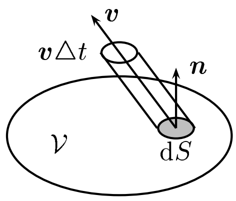
$$\Psi_1(t) = \int_{\mathcal{V}} \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(x_i, t + \triangle t) - f(x_i, t)}{\triangle t} \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.3}$$

$$\Psi_2(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{\triangle \mathcal{V}} f(x_i, t) \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.4}$$

а $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$. (Граничният преход внесохме под знака на интеграла в (18.3), отчитайки, че интеграционната област $\mathcal{V}$ в този случай е неизменна.)

Подинтегралната функция в дясната страна на (18.3) е локалната производна $\partial f/\partial t$ (забележете, че пространствените координати x_i остават неизменни при пресмятането на диференчното частно спрямо времето):

$$\Psi_1(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f(x_i, t)}{\partial t} \, \mathrm{d}V \,. \tag{18.5}$$



Фиг. 18.1

За пресмятане на функцията $\Psi_2(t)$ в (18.4) е необходимо да пресметнем изменението $\triangle\mathcal{V}$ на областта $\mathcal{V}$ за време $\triangle t$. Това изменение е резултат от движението на точките от повърхнината $\mathcal{S}$ на обема $\mathcal{V}$. Разбиваме $\mathcal{S}$ на инфинитезимални части и разглеждаме една от тях чийто координати в момент t са x_i. Нека нейното лице е dS, а единичният вектор на външната ѝ нормала е $\boldsymbol{n}$. За малък промеждутък от време $\triangle t$ тази част ще се премести с $\boldsymbol{v}\,\triangle t$, където $\boldsymbol{v}$ е съответният вектор на скоростта, и ще „замете“ след себе си наклонен цилиндър с основа dS и височина $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\triangle t$, вж. фиг. 18.1. Обемът на този цилиндър е

$$\mathrm{d}V = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \triangle t \, \mathrm{d}S \,.$$

Интегралът в дясната страна на (18.4) ще пресметнем, като умножим така намереното dV с $f(x_i, t)$ (стойността на функцията f върху разглежданото парче dS) и „сумираме“ по всички парчета:

$$\int_{\mathcal{S}} f(x_i, t) \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, \triangle t \,.$$

Оттук

$$\Psi_2(t) = \int_{\mathcal{S}} f(x_i, t) \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (f(x_i, t)\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.6}$$

прилагайки формулата на Гаус (11.41). Остава да заместим (18.5) и (18.6) в (18.2) за да намерим търсената формула за диференциране на интеграла по променлив обем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i,t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V\,. \tag{18.7}$$

Преобразуваме формулата (18.7) в еквивалентна форма, която в някои случаи е по-удобна. За целта забелязваме[1], че

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = f\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f\,,$$

което заместваме в подинтегралния израз на (18.7):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = \underline{\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f} + f\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,.$$

Подчертаният член е пълната производна $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ на функцията f, вж. (14.18). Това позволява да напишем (18.7) в еквивалентната форма

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i,t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V\,. \tag{18.8}$$

18.2. Уравнение на непрекъснатостта. Нека отново $\mathcal{V}$ е материален обем. Масата на този обем е

$$M = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}V\,, \tag{18.9}$$

където ρ е плътността на средата. По време на движение $\mathcal{V}$ изменя формата си (спрямо неподвижната координатна система x_i), но количеството маса в него остава неизменно:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{18.10}$$

Формулата (18.10) изразява *закона за запазването на масата* на материалния обем.

[1] За проверка използваме декартови координати:

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = (fv_i)_{,i} = fv_{i,i} + v_i f_{,i} \quad \left(\textstyle\sum_i\right)\,.$$

Да приложим към дясната страна на (18.10) правилото (18.7) за диференциране на интеграл по променлив обем:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V = 0\,. \tag{18.11}$$

Тъй като (18.11) е в сила за произволен материален обем, то свивайки този обем в точка, намираме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0\,. \tag{18.12}$$

Уравнението (18.12) се нарича *уравнение на непрекъснатостта*. Това е локалната формулировка на закона за запазването на масата на материалния обем.

Уравнението (18.12) може да се запише и в еквивалентната форма

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{18.13}$$

вж. (18.8).

18.3. Несвиваеми среди. Ако големината на произволен материален обем $\mathcal{V}$ не се мени по време на движението[2], то средата се нарича *несвиваема*.

Тъй като масата на материалния обем е винаги неизменна (§ 18.2), то плътността на несвиваемата среда е постоянна във всяка материална частица:

$$\rho = \rho(X_k, t) \equiv \text{const} \quad \text{при фиксирани } \mathrm{X_k}\,.$$

(Но тази постоянна, забележете, може да бъде различна в различните частици!) Оттук

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{18.14}$$

Заместено в уравнението на непрекъснатостта (18.13), последното равенство показва, че

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0\,, \tag{18.15}$$

т. е. полето на скоростта в несвиваема среда е винаги соленоидално.

В ойлерови координати условието за несвиваемост (18.14) има вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0\,. \tag{18.16}$$

[2] Да поясним: формата на обема може да се мени по произволен начин, но мярката му — големината на обема — трябва да остава неизменна.

вж. (14.18). Обръщаме внимание, че локалната производна $\partial\rho/\partial t$ тук *не се анулира*, макар че средата е несвиваема. Причината е че при нейното пресмятане сравняваме плътностите на *различните* материални частици, които преминават през фиксирана пространствена точка в моментите от време t и $t + \mathrm{d}t$. А тези частици, както вече подчертахме, имат различна плътност в общия случай.