§ 17. Тензор на скоростта на деформацията. Теорема на Хелмхолц

17.1. Тензор на скоростта на деформацията. Разглеждаме положенията $\mathcal{B}_t$ и $\mathcal{B}_{t+\triangle t}$ на среда в процеса на деформацията ѝ в два близки момента от време t и $t + \triangle t$. Нека $\boldsymbol{u}$ е преместването на материална частица M за интервала $(t, t + \triangle t)$, а $\boldsymbol{v}$ е нейната скорост, вж. фиг. 17.1. Тогава

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t + o(\triangle t)\,. \tag{17.1}$$

Тензорът на деформацията (15.27), съответстващ на това поле на преместване, е

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_\varepsilon^{\triangle t} &= \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}^*) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla)\ \triangle t + o(\triangle t)\,, \end{aligned}$$

тъй като $\boldsymbol{B} = \nabla\boldsymbol{u} = \nabla\boldsymbol{v}\,\triangle t + o(\triangle t)$ съгласно (15.27). Следователно

$$\frac{\boldsymbol{T}_\varepsilon^{\triangle t}}{\triangle t} = \tfrac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla) + o(\triangle t)\,. \tag{17.2}$$

Въвеждаме тензора

$$\boldsymbol{T}_\xi = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\boldsymbol{T}_\varepsilon^{\triangle t}}{\triangle t},$$

който се нарича *тензор на скоростта на деформацията.* Съгласно (17.3)

$$\boldsymbol{T}_\xi = \tfrac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla)\ , \tag{17.3}$$

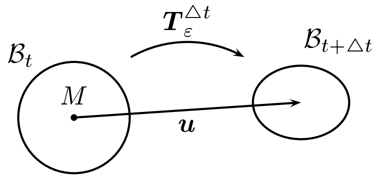
т. е. $\boldsymbol{T}_\xi$ е симетризираният градиент на полето на скоростта. В декартова система компонентите на $\boldsymbol{T}_\xi$ са

$$\xi_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(v_{j,i} + v_{i,j}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\,. \tag{17.4}$$

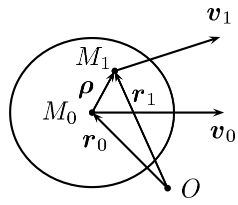
17.2. Теорема на Хелмхолц. Фиксираме материална частица M_0, която се движи със скорост $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0)$ в момента t. Интересува ни разпределението на скоростите в околност на M_0.

Нека $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1)$ е скоростта на точката M_1, близка до M_0. Тук

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\rho}\,,\quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{M_0M_1}\,,\quad |\boldsymbol{\rho}| \ll 1\,,$$



Фиг. 17.1



Фиг. 17.2

вж. фиг. 17.2. По формулата на Тейлър

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\rho}\right) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + o(|\boldsymbol{\rho}|)\,,$$

т. е.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + o(|\boldsymbol{\rho}|)\,, \tag{17.5}$$

където $\nabla \boldsymbol{v}$ е градиентът на полето $\boldsymbol{v}$ в точката M_0.

Представяме тензора $\nabla \boldsymbol{v}$ като сума от симетричен и антисиметричен тензор:

$$\nabla \boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla\right) + \tfrac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\nabla\right)\,,$$

вж. (4.17). Симетричната част очевидно съвпада с тензора на скоростта на деформацията (17.3), т. е.

$$\nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}_\xi + \boldsymbol{\Omega}\,, \quad \boldsymbol{\Omega} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\nabla\right)\,. \tag{17.6}$$

Заместваме (17.6) в (17.5):

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho} + o(|\boldsymbol{\rho}|)\,. \tag{17.7}$$

(Очевидно $\boldsymbol{T}_\xi$ е симетричен тензор, така че $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{T}_\xi = \boldsymbol{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho}$.)

За изясняване на физическия смисъл на формулата (17.7) да изразим антисиметричния тензор $\boldsymbol{\Omega}$ чрез съответния му вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\omega}\,, \quad \text{т. е.} \quad \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \quad \left(\textstyle\sum_k\right)\,, \tag{17.8}$$

вж. (8.34). За вектора $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ тогава имаме[2]

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{E} : (\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}\,,$$

[2] В декартови компоненти

$$(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega})_i = \rho_j \Omega_{ji} = \rho_j \varepsilon_{jik}\omega_k = \varepsilon_{jik}\omega_k\rho_j = (\boldsymbol{\omega} \times \rho)_i \quad \left(\textstyle\sum_{k,j}\right)\,,$$

вж. (8.27).

вж. (17.8) и (8.28). Това позволява да напишем (17.7) във вида:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho} + o(|\boldsymbol{\rho}|)\,. \tag{17.9}$$

Формулата (17.9) изразява *теоремата на Хелмхолц* за разпределението на скоростите в малка околност на частица на деформируема среда. Интерпретацията ѝ е ясна и нагледна. Първият член в (17.9) е резултат от транслацията на разглежданата околност на частицата. Вторият член описва движението ѝ като абсолютно твърдо тяло: тук $\boldsymbol{\omega}$ се интерпретира като вектора на моментната ъглова скорост при това движение (по формулата на Ойлер (6.3) $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ е съответната скорост на точката M_1 при това движение). Последният член в (17.9), а именно $\boldsymbol{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho}$, е скоростта на M_1 в резултат на чистата деформация на частицата.