§ 16. Уравнения на съвместимостта на Сен-Венан

16.1. Съвместимост на деформациите. Нека $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ е поле на двувалентен (симетричен) тензор. Интересува ни представимо ли е то във вида

$$\boldsymbol{T} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\nabla\right)\ , \tag{16.1}$$

където $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ е векторно поле. С други думи, питаме кога полето $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ представлява поле на тензора на (малката) деформация, породено от преместването $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ на тяло в тримерното пространство.

В общия случай произволно поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ не може да се представи във вида (16.1). Причината е например в това, че полето $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ се определя координатно от шест функции, които искаме да се изразят с помощта *само* на три — компонентите на $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Следователно за да е в сила представянето (16.1) е необходимо $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ да се подчинява на определени условия. Това са именно *условията на съвместимост на Сен-Венан*. Преди да преминем към техния формален извод да се спрем на тяхната интерпретация.

Да разрежем мислено тяло на малки части с център в точките $\boldsymbol{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Отделяме всяко парче от тялото и го подлагаме на деформацията $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_k)$. Връщаме обратно деформираните парчета в съответните точки $\boldsymbol{x}_k$ и се опитваме да слепим от тях ново тяло. Ясно е, че в общия случай на произволно (симетрично) тензорно поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_k)$ това няма да е възможно: отделните парчета ще се припокриват, или между тях ще има фуги. Ново „гладко“ тяло ще получим единствено, ако деформациите $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_k)$ са „съвместими“ помежду си, т. е. ако те се пораждат от векторно поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ съгласно формулата (16.1).

Горното разсъждение става още по-нагледно, ако тялото е тънка пластина, която се деформира в равнината си. По-конкретно, можем да си представим паркет: ако той е бил наводнен при авария, след изсъхването всяка от плочките се деформира по свой начин. Ако тази деформация е съвместима, то паркетът ще остане равнинен и следи от аварията няма да има. Както е печално известно обаче, деформацията на плочките е несъвместима и в резултат паркетът се изкорубва, появяват се фуги и прочие неприятности за собственика.

16.2. Уравнения на съвместимостта на Сен-Венан. Да „слезем една валентност по-надолу“ и да припомним, че едно векторно поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ е потенциално, ако то е представимо във вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$, вж. (11.23). Ясно е, че не всяко поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ е потенциално: $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ се определя с помощта на трите си компоненти-функции, които в общия случай не могат да се представят чрез единствената скаларна функция $f(\boldsymbol{x})$. В § 11.7 изведохме условието за потенциалност като приложихме оператора ротация към двете страни на (11.23) и забелязахме, че $\nabla \times \nabla = 0$.

Аналогично ще постъпим и „една валентност по-нагоре". Ако тензорното поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ е представимо във вида (16.1), то прилагайки операцията ротация един път от ляво и един път от дясно на $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ необходимо ще получим нула:

$$\operatorname{Rot} \boldsymbol{T} = \nabla \times \boldsymbol{T} \times \nabla = 0\,. \tag{16.2}$$

Полето $\operatorname{Rot} \boldsymbol{T}$ се нарича *биротация* (или *биротор*) на тензорното поле $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. То е тензорният аналог на биротора на векторно поле, дефиниран в § 11.6. Очевидно $\operatorname{Rot} \boldsymbol{T}$ е също двувалентно тензорно поле което е симетрично, щом $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ е симетрично.

Анулирането на биротацията на тензорното поле представлява условието за съвместимост на на Сен-Венан, т. е. условието за представимост на тензорното поле във вида (16.1).

В декартова система тензорното уравнение (16.2) има вида

$$(\nabla \times \boldsymbol{T} \times \nabla)_{ij} = \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} t_{pq,\alpha\beta} = 0\,, \tag{16.3}$$

вж. (11.34) и § 11.6.

Да опростим уравнението (16.3) като използваме схемата по която достигнахме в § 9.6 до известната формула (9.36) за разкриване на двойното векторно произведение. Схемата е основана отново на изотропността на алтерниращия тензор и на вече познатата ни структура на изотропните тензори (§ 9.4), но се налага да се реализира „две валентности по-горе", т. е. вместо с четиривалентни ще работим сега с шествалентни тензори.

Забелязваме, че $\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta}$ са компонентите на шествалентния тензор $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$ в декартова координатна система. Тензорът $\boldsymbol{E}$ е изотропен, следователно $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$ е също изотропен тензор от четна (шеста) валентност. Съгласно § 9.4, компонентите

$$(\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E})_{ip\alpha jq\beta} = \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} \tag{16.4}$$

ще представляват линейни комбинации на изомерите на тензора с компоненти $\delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta}$. С други думи, следва да построим всевъзможните комбинации на индексите в тройките $(ip\alpha)$ и $(jq\beta)$ по двойки (като първият индекс е от едната тройка, а вторият от другата) и чрез тях да изразим компонентите (16.4). Тази процедура вече е позната от § 9.6, където я осъществихме в двата по-прости случая (контракция по две, а след това по една двойка индекси в шествалентния тензор $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$). В случая на контракция по една двойка индекси резултатът беше формулата (9.33), записана удобно чрез детерминанта. Оказва се, че аналогично детерминантно записване е в сила и за компонентите (16.4) на тензора $\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{E}$, именно

$$\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{iq} & \delta_{i\beta} \\ \delta_{pj} & \delta_{pq} & \delta_{p\beta} \\ \delta_{\alpha j} & \delta_{\alpha q} & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}, \tag{16.5}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} &= \delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{ij}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha q} - \delta_{iq}\delta_{pj}\delta_{\alpha\beta} \\ &\quad + \delta_{iq}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\beta}\delta_{pj}\delta_{\alpha q} - \delta_{i\beta}\delta_{pq}\delta_{\alpha j} \,. \end{aligned} \tag{16.6}$$

За да докажем (16.6) написваме лявата страна на (16.6) във вида

$$\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} = \varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{jm\beta}\,\delta_{pn}\delta_{qm} \qquad \left(\textstyle\sum_{n,m}\right)$$

и използваме (9.33) в дясната страна на последната формула:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} &= \varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{jm\beta}\left(\varepsilon_{nqs}\varepsilon_{pms} + \delta_{nm}\delta_{pq}\right) \\ &= \left(\varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{nqs}\right)\left(\varepsilon_{jm\beta}\varepsilon_{pms}\right) + \delta_{pq}\left(\varepsilon_{im\alpha}\varepsilon_{jm\beta}\right) \\ &= \left(\delta_{\alpha q}\delta_{is} - \delta_{\alpha i}\delta_{\beta s}\right)\left(\delta_{jp}\delta_{\beta s} - \delta_{js}\delta_{p\beta}\right) \\ &\quad + \delta_{pq}\left(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\right) \qquad \left(\textstyle\sum_{n,m,s}\right), \end{aligned}$$

което съвпада с (16.6).

Да заместим компонентите $\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta}$, изразени чрез кронекеровите делти съгласно (16.6), в израза (16.2) на биротора и да представим всяка от съответните контракции в безкоординатен вид:

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta}\,t_{pq,\alpha\beta} &= \delta_{ij}t_{pp,\alpha\alpha} &&\longrightarrow && \boldsymbol{I}\Delta\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}\,, \\ \delta_{ij}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha q}\,t_{pq,\alpha\beta} &= \delta_{ij}t_{\beta\alpha,\alpha\beta} &&\longrightarrow && \boldsymbol{I}\,\nabla\cdot\boldsymbol{T}\cdot\nabla\,, \\ \delta_{iq}\delta_{pj}\delta_{\alpha\beta}\,t_{pq,\alpha\beta} &= t_{ij,\alpha\alpha} &&\longrightarrow && \Delta\boldsymbol{T}\,, \\ \delta_{iq}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha j}\,t_{pq,\alpha\beta} &= t_{\beta i,j\beta} &&\longrightarrow && (\nabla\cdot\boldsymbol{T})\nabla\,, \\ \delta_{i\beta}\delta_{pj}\delta_{\alpha q}\,t_{pq,\alpha\beta} &= t_{j\alpha,\alpha i} &&\longrightarrow && \nabla(\boldsymbol{T}\cdot\nabla)\,, \\ \delta_{i\beta}\delta_{pq}\delta_{\alpha j}\,t_{pq,\alpha\beta} &= t_{pp,ij} &&\longrightarrow && \nabla\nabla\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}\,. \end{aligned}$$

Оттук намираме безкоординатния израз на биротора и в частност, на уравнението на съвместимостта (16.2)

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{T}\times\nabla &= \boldsymbol{I}\left(\Delta\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} - \nabla\cdot\boldsymbol{T}\cdot\nabla\right) \\ &\quad + \nabla(\boldsymbol{T}\cdot\nabla) + (\nabla\cdot\boldsymbol{T})\nabla - \Delta\boldsymbol{T} - \nabla\nabla\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = 0\,. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Уравнението (16.7) може да се опрости. За целта пресмятаме следата на лявата му част: след прости преобразования това дава

$$\Delta \mathrm{tr}\, \boldsymbol{T} - \nabla \cdot \boldsymbol{T} = 0\,, \cdot\nabla\,,$$

т. е. множителят пред единичния тензор в (16.7) се анулира. Това води до следния окончателен вид на уравнението на съвместимостта на Сен-Венан:

$$\nabla(\boldsymbol{T}\cdot\nabla) + (\nabla\cdot\boldsymbol{T})\nabla - \Delta\boldsymbol{T} - \nabla\nabla\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = 0\,. \tag{16.8}$$

В декартова координатна система уравнението (16.8) има вида:

$$\varepsilon_{j\alpha,\alpha i} + \varepsilon_{\alpha i,j\alpha} - \varepsilon_{ij,\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha,ij} = 0 \quad i,j = 1,2,3 \quad \left(\textstyle\sum_\alpha\right)\,.$$

Пример 16.1. Да предположим, че полето $\boldsymbol{T}$ представлява чиста дилатация

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \theta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I} \tag{16.9}$$

т. е. деформацията във всяка точка е обемно разширение (или свиване). Реализируемо ли е такова поле като поле на малка деформация на тримерна среда?

Решение. В случая $\nabla\cdot\boldsymbol{T} = \nabla\theta$, $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = 3\theta$, което заместваме в (16.9):

$$\boldsymbol{I}\Delta\theta + \nabla\nabla\theta = 0\,. \tag{16.10}$$

Пресмятаме следата на лявата част в последното уравнение: $\Delta\theta = 0$, т. е. дилатацията $\theta(\boldsymbol{x})$ необходимо е хармонична функция. Нещо повече, от (16.10) сега следва, че $\nabla\nabla\theta = 0$ и затова

$$\theta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1 \cdot \boldsymbol{x} + C_0\,,$$

където $\boldsymbol{C}_1$ и C_0 са константи (вектор и скалар съответно). Следователно полето (16.9) е поле на (малката) деформация на среда в тримерното пространство единствено ако дилатацията $\theta(\boldsymbol{x})$ е линейна функция на пространствените координати.