

§ 15. Тензор на деформацията

15.1. Тензор на дисторсията. Разглеждаме движението на среда, зададено със закона (14.1). При фиксиран момент от време t той определя взаимно еднозначно съответствие

$$x_i = x_i(X_k) = x_i(X_k, t), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (15.1)$$

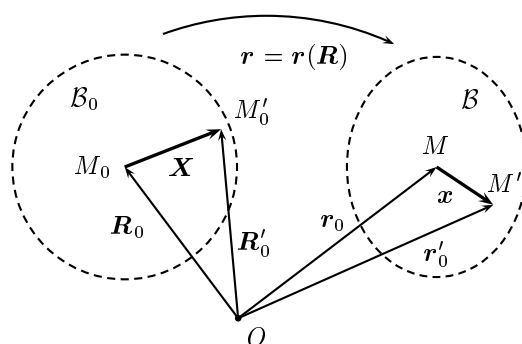
между областите \mathcal{B}_0 и \mathcal{B} , заемани от средата в моментите t_0 и t съответно:

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}. \quad (15.2)$$

Ще наричаме \mathcal{B}_0 и \mathcal{B} *начално* и *крайно* състояние, а съответствието (15.2) — *деформация* на средата. По този начин деформацията се представя чрез векторната функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}) \quad (15.3)$$

на векторен аргумент, чието координатно представяне е (15.1).



Фиг. 15.1

Разглеждаме деформацията (15.2) в малка околност на частицата M_0 от средата. Нека M'_0 е близка до M_0 . Векторът $\mathbf{X} = \overrightarrow{M_0 M'_0}$ наричаме *материална нишка* (или *влакно*), тъй като е съставен от материални частици. В началното положение \mathcal{B}_0 радиус-векторите на частиците M_0 и M'_0 са съответно \mathbf{R}_0 и \mathbf{R}'_0 , вж. фиг. 15.1. В деформираното състояние тези частици „лягат“ съответно в точките M и M' с радиус-вектори

\mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_0 , а материалната нишка \mathbf{X} заема положението $\mathbf{x} = \overrightarrow{MM'}$, вж. фиг. 15.1. (Тъй като векторът \mathbf{X} е предположен малък, „образът“ му \mathbf{x} след деформацията остава праволинеен с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\mathbf{X}|$.)

Търсим връзката между нишката \mathbf{X} и образа ѝ \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_0 &= \mathbf{r}(\mathbf{R}'_0) = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0 + \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{R}_0) + \mathbf{X} \cdot \nabla \mathbf{r} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} + o(|\mathbf{X}|) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + o(|\mathbf{X}|). \end{aligned}$$

Тъй като $\mathbf{x} = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0$, вж. фиг. 15.1, то с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\mathbf{X}|$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}. \quad (15.4)$$

Тук \mathbf{A} е двувалентният тензор

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{r} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} \quad (15.5)$$

— градиентът на закона на деформацията (15.3) в частицата M_0 — наречен *тензор на дисторсията*. В декартова система (15.4) има вида

$$\begin{aligned} (\mathbf{x})_i &= x'_i - x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (\mathbf{X})_j = A_{ji} (\mathbf{X})_j \quad \left(\sum_j \right), \\ A_{ji} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad (\mathbf{X})_j = X'_j - X_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (15.6)$$

където X_j и X'_j са координатите на M_0 и M'_0 съответно, а x_j и x'_j — на M и M' . Забележете, че в (15.4) пишем тензора \mathbf{A} *вдясно* от \mathbf{X} защото контракцията е по индекса ‘ j ’, вж. (15.6), а този индекс е пръв в координатното представяне $A_{ji} = \partial_j x_i$ на \mathbf{A} (наблата е поставена пред \mathbf{r} в дефиницията (15.5) на тензора на дисторсията).

Съотношението (15.4) показва, че локално — в малка околност на всяка частица от средата — деформацията е линейно преобразование, определено от тензора на дисторсията \mathbf{A} в тази частица.

Да напомним, че тензорът на дисторсията \mathbf{A} , като линейно преобразование на тримерното пространство \mathcal{E}_3 , притежава поне един собствен вектор, вж. § 4.9 и (4.48). Този чисто алгебричен факт в случая има нетривиална и неочевидна интерпретация: той означава, че *каквато и да е* деформацията на средата, във всяка нейна точка съществува поне една материална нишка, която запазва посоката си след деформирането.

Да обърнем внимание, че последното твърдение може да се разглежда като обобщение на добре известен факт от кинематиката на абсолютно твърдо тяло. Именно, съгласно теоремата на Ойлер-Даламбер (§ 4.12) всяко движение на такова тяло е ротация около ос. Тази ос очевидно остава неподвижна и представлява прототипа на онова влакно в точката на деформируемата среда, чиято посока не се мени при деформацията. (Самото влакно обаче, макар и да не мени посоката си при деформацията, в общия случай ще се свива или разтегля.)

Да представим тензора на дисторсията в „полярния“ вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{U}, \quad (15.7)$$

вж. (5.19), където $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ е ортогонално преобразование, \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 са съответно квадратните корени от тензорите

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}, \quad (15.8)$$

вж. (5.18). В разглеждания случай, когато \mathbf{A} е тензорът на дисторсията, тензорите (15.8) се наричат *тензори на Коши-Грийн*. Представянето (15.7) означава, че всяка деформация на средата се реализира локално като суперпозиция на ортогонално преобразование (т. е. на движение на околността на разглежданата материална частица като абсолютно твърдо тяло) и на „чиста“ деформация, определена от симетричните тензори на Коши-Грийн (15.8). Ако чиста деформация няма, т. е. тези тензори са единични, то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

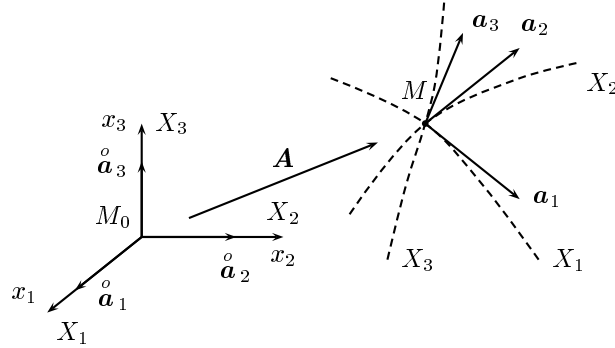
и дисторсията \mathbf{A} е ортогонален тензор, така че околността на разглежданата частица се движи като абсолютно твърдо тяло. Следователно локалната деформация на средата ще се определя от разликата

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}. \quad (15.9)$$

До същия извод ще достигнем и в § 15.3 по друг може би по-нагледен начин, вж. (15.17).

15.2. Диадно представяне на тензора на дисторсията. Нека $\overset{o}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{e}_i$ са единичните вектори на неподвижната координатна система x_i , $i = 1, 2, 3$. Тъй като $X_k \equiv x_k$ в момент $t = 0$, то $\overset{o}{\mathbf{a}}_i$ могат да се разглеждат и като вектори на локалния базис на декартовата система X_k в началното състояние

$$\overset{o}{\mathbf{a}}_k = \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_k}, \quad \left(\overset{o}{\mathbf{a}}_k \right)_j = \frac{\partial X_j}{\partial X_k} = \delta_{jk}. \quad (15.10)$$



Фиг. 15.2

Да погледнем сега на лагранжевите координати X_k като на криволинейни координати в деформираното състояние \mathcal{B} . (Съотношенията (15.1) казват, че положението на всяка точка от \mathcal{B} се определят еднозначно от материалните ѝ координати X_k .) Координатните линии на тази криволинейна система, които в началния момент са прави, успоредни на координатните оси, в деформираното състояние се изкривяват (лагранжевата система X_k е „залепена“ за тялото и се „деформира“ заедно с него). Съответно локалният базис

$$\mathbf{a}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_k}, \quad (\mathbf{a}_k)_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \quad (15.11)$$

в частицата от средата също се деформира и в общия случай вече не е ортонормиран, вж. фиг. 15.2.

Не е сложно да се види, че линейното преобразование, което трансформира началния локален базис $\{\overset{o}{\mathbf{a}}_k\}$ в базиса $\{\mathbf{a}_k\}$ в деформираното състояние е вече познатият ни тензор на дисторсията:

$$\mathbf{A} : \{\overset{o}{\mathbf{a}}_k\} \longrightarrow \{\mathbf{a}_k\}. \quad (15.12)$$

т. е., че

$$\mathbf{a}_k = \overset{o}{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{A}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (15.13)$$

Това е следствие на (15.10) и (15.11) и на очевидното твърдение

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_k} \quad (\sum_j).$$

(Забележете, че $\partial X_j / \partial X_k = \delta_{jk}$.)

Равенствата (15.13) позволяват да запишем тензора на дисторсията в следния удобен диаден вид:

$$\mathbf{A} = \overset{o}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i, \quad (15.14)$$

вж. (4.1) (§ 4.1).

Да отбележим, че локалният базис $\overset{o}{\mathbf{a}}^i = \overset{o}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, в началното състояние беше избран ортонормиран — лагранжевата система X_k е декартова, от съображения за простота и нагледност. За произволна лагранжева система горните разсъждения заедно със съотношенията (15.12) — (15.14) остават непроменени, единствено локалният базис $\overset{o}{\mathbf{a}}_i$ вече е произволен.

15.3. Тензор на деформацията. Нека \mathbf{X} и \mathbf{Y} са две материални нишки с начало в частицата M_0 в недеформираното състояние. След деформацията те се превръщат съответно в нишките \mathbf{x} и \mathbf{y} , като

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}. \quad (15.15)$$

Тук \mathbf{A} е тензорът на дисторсията в частицата M_0 .

Деформацията в околността на частицата M_0 ще дефинираме чрез изменението на метриката (изменението на дължините и на ъглите), която се определя, да напомним, чрез скаларното произведение на векторите. Именно, въвеждаме тензора \mathbf{T}_ε , чиято билинейна форма

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}), \quad (15.16)$$

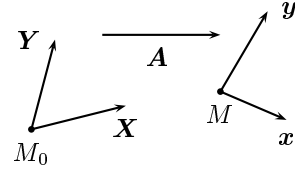
$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{E}_3$, определя споменатото изменение на метриката вследствие на деформирането (15.2) (с точност до множителя $1/2$ избран следвайки историческа традиция). Тензорът \mathbf{T}_ε се нарича *тензор на деформацията*.

Заместваме (15.4) в (15.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{Y} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

— да припомним, че $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Y}$, където \mathbf{I} е единичният тензор. Следователно

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}). \quad (15.17)$$



Фиг. 15.3

Както и трябваше да се очаква, тензорът на деформацията се оказва пропорционален на „отклонението“ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}$ на единия от тензорите на Коши-Грийн от единичния тензор, вж. (15.9) и края на § 15.1.

15.4. Интерпретация на компонентите на тензора на деформация. Да заместим диадното представяне (15.14) на тензора на дисторсията в (15.17). Тъй като

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i,$$

вж. (4.4) и (4.5), то

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* &= \left(\overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left(\mathbf{a}_j \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j \right) = g_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \\ \mathbf{I} &= \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \quad \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_j, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon &= \varepsilon_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right) \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right). \end{aligned} \tag{15.18}$$

Компонентите на тензора на деформацията се оказват пропорционални на разликата на метрическите коефициенти в началното и деформираното състояние спрямо диадния базис $\overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j$.

Преминаваме към интерпретацията на компонентите на тензора на деформация. Разглеждаме материална нишка \mathbf{X} с дължина $d \overset{\circ}{s}_k$, насочена по k -тата координатна линия X_k в началното състояние, т. е.

$$\mathbf{X} = d \overset{\circ}{s}_k \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k = d \overset{\circ}{s}_k \mathbf{e}_k \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right).$$

Образът на тази нишка след деформацията е

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = d \overset{\circ}{s}_k \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{A} = d \overset{\circ}{s}_k \mathbf{a}_k \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right),$$

вж. (15.4), а дължината ѝ е

$$ds_k = |\mathbf{x}| = d \overset{\circ}{s}_k |\mathbf{a}_k| \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right).$$

Разглеждаме относителното изменение на дължината на нишката \mathbf{X} :

$$\ell_k = \frac{ds_k - d \overset{\circ}{s}_k}{d \overset{\circ}{s}_k} = |\mathbf{a}_k| - 1,$$

т. е.

$$g_{kk} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k = |\mathbf{a}_k|^2 = (1 + \ell_k)^2 \quad \left(\sum_k' \right),$$

което замества в (15.18):

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2}(g_{kk} - 1) = \frac{1}{2} \left[(1 + \ell_k)^2 - 1 \right] = \ell_k + \frac{1}{2}\ell_k^2 \quad \left(\sum_k' \right). \quad (15.19)$$

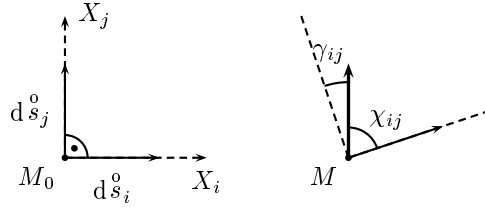
(Тъй като базисът $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_k$ е ортонормиран, то $\overset{\circ}{g}_{kk} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k = 1$.)

Формулата (15.19) означава, че диагоналните компоненти ε_{kk} на матрицата на тензора на деформацията се определят еднозначно от относителните удължения ℓ_k на материалните нишки, разположени по координатните оси X_k , $k = 1, 2, 3$.

Да предположим, че удължението на материалните нишки е малко, $|\ell_k| \ll 1$. В този случай можем да пренебрегнем ℓ_k^2 спрямо ℓ_k в (15.19):

$$\varepsilon_{kk} = \ell_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \left(\sum_k' \right), \quad (15.20)$$

т. е. при малка деформация диагоналните компоненти ε_{kk} на тензора на деформацията просто съвпадат с относителните удължения на съответните материални нишки.



Фиг. 15.4

Да разгледаме сега две материални нишки, разположени по осите X_i и X_j , $i \neq j$, съответно с дължини $d s_i^0$ и $d s_j^0$, вж. фиг. 15.4. Образът на тези нишки след деформацията е

$$\mathbf{a}_i = d s_i^0 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{A} = d s_i^0 \mathbf{a}_i,$$

$$\mathbf{a}_j = d s_j^0 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_j \cdot \mathbf{A} = d s_j^0 \mathbf{a}_j$$

— те вече не са ортогонални. Косинусът на ъгъла χ_{ij} между тях е

$$\cos \chi_{ij} = \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_i| |\mathbf{a}_j|} = \frac{g_{ij}}{(1 + \ell_i)(1 + \ell_j)}.$$

Оттук

$$g_{ij} = (1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \sin \gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.21)$$

където $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\pi - \chi_{ij}$ е ъгълът на „скосяване“ на ъгъла между разглежданите нишки, който първоначално е прав, вж. фиг. 15.4. Величината γ_{ij} можем да наречем *ъглова деформация*.

Заместваме (15.21) в (15.18):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \sin \gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.22)$$

тъй като в случая $\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{\mathbf{a}}_i \cdot \overset{o}{\mathbf{a}}_j = 0, i \neq j$.

Равенството (15.22) означава, че недиагоналните компоненти на тензора на деформацията са свързани както с относителните удължения на нишките, насочени по координатните оси, така и със скосяванията на ъглите между тях.

Да предположим, че не само удълженията ℓ_i са малки, но и ъглите γ_{ij} са също малки. От (15.22) тогава следва, че

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.23)$$

т. е. недиагоналната компонента на тензора на деформацията в случая е точно половината от съответната ъглова деформация.

15.5. Тензор на малката деформация. Представяме вектора, определящ положението на точката M в деформираното състояние като

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}. \quad (15.24)$$

Тук \mathbf{u} е векторът на преместването на M , вж. (14.3) и Фиг. 14.1. Заместваме (15.24) в дефиницията (15.5) на тензора на дисторсията :

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{R} + \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} = \mathbf{I} + \mathbf{B}, \quad (15.25)$$

където

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} \quad (15.26)$$

е градиентът на полето на преместването \mathbf{u} . (Очевидно $\nabla \mathbf{R} = \mathbf{I}$ — в декартовата система X_k , тъй като $(\nabla \mathbf{R})_{ij} = X_{j,i} = \delta_{ij}$.)

Изразяваме тензора на деформацията \mathbf{T}_ε чрез тензора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{B}^*) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Деформацията наричаме *малка*, ако $|\mathbf{B}| \ll 1$, т. е. ако компонентите на \mathbf{B} в една (а следователно и във всяка друга) координатна система са много малки. Тогава $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*$ може да се пренебрегне по сравнение както с \mathbf{B} , така и с \mathbf{B}^* , подчертаният член в (15.27) е пренебрежимо малък и тензорът на деформацията се опростява:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) . \quad (15.28)$$

Тензорът, дефиниран в (15.28), се нарича *тензор на малката деформация*. Той често се означава в литературата с \mathbf{T}_ε , за да се отличи от тензора на голямата деформация \mathbf{T}_ε , в който участва и *нелинейния* (спрямо преместването \mathbf{u}) член $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*$. Тъй като $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{u}$, то

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \text{def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) , \quad (15.29)$$

където сме въвели оператора на симетризирания градиент ‘def’.

Упражнение 15.1. Ако две векторни полета \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 пораждат един и същ тензор на малката деформация, то те се отличават с поле на преместване на абсолютно твърдо тяло, т. е.

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} ,$$

с постоянен вектор $\boldsymbol{\omega}$. (Това твърдение е известно като теорема на Кирхоф.)

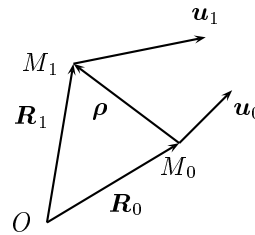
За да поясним понятието малка деформация и да видим, че то съвпада с въведените по-горе предположения за малко относително удължение и малка ъглова деформация, разглеждаме точка M_0 от тялото с радиус-вектор \mathbf{R}_0 , вж. фиг. 15.5. Нека M_1 е близка до M_0 точка, нейният радиус-вектор е $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}$ с малко $\boldsymbol{\rho}$, $|\boldsymbol{\rho}| \ll 1$. Използвайки тейлоровото разлагане, записваме

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{R}_1) = \mathbf{u}(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\mathbf{R}_0) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} + o(|\boldsymbol{\rho}|) ,$$

т. е.

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{B} ,$$

с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\boldsymbol{\rho}|$. Но $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$ е относителното преместване на точката M_1 спрямо M_0 (ако „седнем“ върху точката



Фиг. 15.5

M_0 и се преместим заедно с нея, то спрямо нас M_1 ще се придвижи с $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$). Предположението $|\mathbf{B}| \ll 1$ тогава означава, че относителното преместване на M_1 спрямо M_0 е малко, т. е. близките точки и след осъществената деформация остават близки. Следователно и относителните удължения и скосяванията на ъглите следва да бъдат малки, ако $|\mathbf{B}| \ll 1$, и обратно.

15.6. Израз за обемното разширение при малка деформация. Разглеждаме елементарен куб с обем dV и страни $d\overset{\circ}{s}_i$, насочени по декартовите оси X_k , $k = 1, 2, 3$. След деформацията кубът се „сплесква“, страните му вече имат дължини $ds_i = (1 + \ell_i) d\overset{\circ}{s}_i$, а правите му ъгли се скосяват с γ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, вж. § 15.4. Тъй като при малка деформация $|\ell_i|, |\gamma_{ij}| \ll 1$, то обемът на деформирания куб, с точност до малки от по-висок ред спрямо ℓ_i и γ_{ij} , е

$$dV = (1 + \ell_1)(1 + \ell_2)(1 + \ell_3) dV_0,$$

$dV_0 = d\overset{\circ}{s}_1 d\overset{\circ}{s}_2 d\overset{\circ}{s}_3$. Относителното изменение на обема (обемната деформация или дилатацията) се дефинира като

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1 + \ell_1)(1 + \ell_2)(1 + \ell_3) - 1 \approx \ell_1 + \ell_2 + \ell_3.$$

Но $\ell_i = \varepsilon_{ii}$ (\sum_i), вж. (15.20), и затова

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = u_{\alpha,\alpha} \quad (\sum_{\alpha}),$$

където \mathbf{T}_{ε} е тензорът на малката деформация (15.28). От друга страна $u_{\alpha,\alpha} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, т. е.

$$\theta = \text{tr } \mathbf{T}_{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (15.30)$$

— дивергенцията $\nabla \cdot \mathbf{u}$ на полето на преместване съвпада с обемната деформация в предположение, че деформацията е малка.

В частност, ако тялото е несвиваемо, то полето \mathbf{u} е соленоидално, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Аналогичен факт ще установим в § 18 — полето на скоростите \mathbf{v} в несвиваема среда ще се окаже също соленоидално, вж. (18.15). Да подчертаем обаче, че соленоидалността (15.30) на полето на преместване \mathbf{u} е в сила само при малка деформация. При големи (крайни) деформации условието за несвиваемост има значително по-сложния вид:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}) = 1,$$

който тук няма да коментираме.