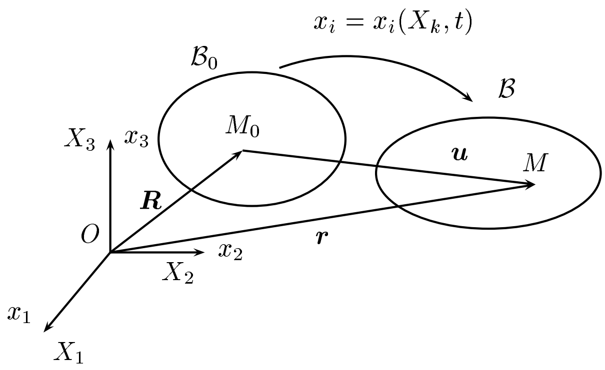
Глава 3

КИНЕМАТИКА НА НЕПРЕКЪСНАТИ СРЕДИ

§ 14. Ойлерово и лагранжево описание на движението на непрекъснати среди. Локална и материална производни

14.1. Ойлерово и лагранжево описание на движението. Да разгледаме деформируема среда, която в един „начален“ момент $t = 0$ заема областта от пространството $\mathcal{B}_0$. В момента t средата се е деформирала и заема вече областта $\mathcal{B}$, вж. фиг. 14.1.



Фиг. 14.1. Движение на непрекъсната среда

Както и при изучаване на движението на абсолютно твърдо тяло, да вземем два екземпляра, $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$, на декартова координатна система, които съвпадат в началния момент от време $t = 0$. Оставяме едната система, $Ox_1x_2x_3$, *неподвижна* в пространството, докато втората, $OX_1X_2X_3$, „залепваме“ за тялото. В резултат тя се движи заедно с него, а координатните ѝ линии се деформират заедно с тялото (ако то се движи като абсолютно твърдо, движението на подвижната система спрямо неподвижната е суперпозиция на транслация и чиста ротация).

От дефиницията на подвижната система е видно, че координатите X_k на материалните частици *не се изменят* по време на движението. Те идентифицират еднозначно тези частици и затова се наричат *материални* (или *лагранжеви*) координати. Неподвижните координати x_i на свой ред се наричат пространствени (или *ойлерови*).

Ясно е сега, че движението на средата ще бъде еднозначно зададено, ако знаем положението в пространството (т. е. ойлеровите координати x_i) на всяка материална точка във всеки момент от време. Математически тази информация се съдържа във функциите

$$x_i = x_i(X_k, t)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,, \quad t \geq 0\,, \tag{14.1}$$

като

$$x_k \equiv X_k \quad \text{при} \quad t = 0\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Тъй като съотношенията (14.1) представляват взаимно-еднозначно преобразование на тримерното пространство (за всяко фиксирано t), те могат да се „обърнат“:

$$X_k = X_k(x_i, t)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,, \quad t \geq 0\,. \tag{14.2}$$

Уравненията (14.2) определят началното положение, т. е. материалните координати на частица от тялото, която в момент t се намира в положение x_i в пространството.

Да отбележим, че в качеството на лагранжева система можем да изберем и произволна криволинейна координатна система ξ_k. Съществено е само, че ξ_k е „залепена“ неподвижно за средата, т. е. координатите ξ_k на материалните точки остават неизменни по време на движението. Законът (14.1) в този случай придобива формално по-общия вид

$$x_i = x_i(\xi_k, t)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,, \quad t \geq 0\,,$$

но смисълът и интерпретацията му остават същите.

14.2. Преместване и скорост. Полето на преместване на материална частица при движението (14.1) на средата се дефинира като

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}\,, \tag{14.3}$$

вж. фиг. 14.1. Оттук, спрямо неподвижната координатна система,

$$u_p(X_k, t) = x_p(X_k, t) - X_p\,, \quad p, k = 1, 2, 3\,. \tag{14.4}$$

— това са компонентите на преместването в момент t на материалната частица, която в началния момент $t = 0$ заема положението X_k в пространството.

С помощта на (14.2) полето $\boldsymbol{u}$ може да се запише покомпонентно и по следния начин:

$$u_p(x_i, t) = x_p - X_p(x_i, t)\,, \quad p, k = 1, 2, 3\,. \tag{14.5}$$

Тук $u_p(x_i, t)$ са компонентите на преместването на материална частица, която в текущия момент t се намира в положението x_i на пространството.

Скоростта на частицата дефинираме по очевиден начин, а именно, чрез производната

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(X_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{u}(X_k, t)}{\partial t}\,, \tag{14.6}$$

вж. (14.3). Да подчертаем, че при диференцирането спрямо времето материалните координати X_k са фиксирани (което впрочем се подразбира по смисъла на частната производна). Компонентите на скоростта в неподвижната система са

$$v_p = v_p(X_k, t) = \frac{\partial x_p(X_k, t)}{\partial t}\,, \quad p, k = 1, 2, 3\,, \tag{14.7}$$

вж. (14.1).

Изразите (14.6) или (14.7) определят полето на скоростта в момент t при зададени материални координати X_k на частицата. С други думи това е скоростта в момент t на частицата, която в началния момент $t = 0$ е заемала положението X_k в пространството. В редица случаи обаче нас ни интересува скоростта на частицата, която в текущия момент t заема дадена точка x_i от пространството. За намирането на тази скорост е достатъчно да изключим материалните координати X_k в изразите (14.7) като ги заменим с ойлеровите x_i с помощта на (14.2):

$$v_p = v_p(X_k(x_i, t)) = v_p(x_i, t)\,, \quad p, i = 1, 2, 3\,. \tag{14.8}$$

Ще илюстрираме казаното дотук върху следния прост пример.

Пример 14.1. Движението на средата се определя от закона

$$x_1 = X_1(1 + at)\,, \quad x_2 = X_2\,, \quad x_3 = X_3\,. \tag{14.9}$$

(едномерно движение по оста x_1), $a = \mathrm{const}$. Търсим полетата на преместването и скоростта в материални и пространствени координати.

Решение. Компонентите на преместването в материални координати са

$$u_1 = x_1 - X_1 = atX_1\,, \quad u_2 = u_3 = 0\,, \tag{14.10}$$

вж. (14.2). За намиране на преместването спрямо пространствените координати, изключваме X_k в (14.10) с помощта на закона на движението (14.9):

$$u_1 = \frac{atx_1}{1 + at}\,, \quad u_2 = u_3 = 0\,.$$

За намиране на скоростта в материални координати диференцираме (14.10) спрямо времето

$$v_1 = aX_1\,, \quad v_2 = v_3 = 0 \tag{14.11}$$

— това е скоростта в момент t на частицата, чийто координати в момент $t = 0$ са X_k.

За да получим ойлеровото описание на скоростта, изразяваме отново X_k чрез x_i в (14.11) като използваме (14.9):

$$v_1 = \frac{ax_1}{1 + at}\,, \quad v_2 = v_3 = 0\,.$$

Това е скоростта на частицата, която в текущия момент от време t се намира в пространствената точка x_i.

14.3. Материална и локална производни. Разглеждаме физическа величина φ, която се мени в обема на тялото и във времето. Величината φ може да се разглежда като функция както на материалните X_k, така и на ойлеровите координати x_i:

$$\varphi = G(X_k, t) = g(x_i, t)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,. \tag{14.12}$$

Използваме за момента двата символа G и g за да подчертаем, че функциите $G(X_k, t)$ и $g(x_i, t)$ са *различни*, макар че описват *една и съща величина* φ (но по двата различни начина: един път в лагранжеви, другият път в ойлерови координати).

В динамиката на непрекъснатите среди основен интерес представлява скоростта с която се мени величината φ във фиксирана материална точка, т. е. при фиксирани материални координати X_k:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial G(X_k, t)}{\partial t}\,. \tag{14.13}$$

Образно казано, „сядаме“ върху материалната точка X_k, движим се заедно с нея, и следим с каква скорост се мени във времето величината φ при това движение.

Производната (14.13) се нарича *материална* (или още *пълна* или *субстанциална*) производна на φ. Правото d в нейното означение подчертава, че пресмятането ѝ се извършва във *фиксирана* материална частица[1].

Да предположим, че φ е изразена чрез ойлеровите координати x_i, т. е. е зададена функцията $g(x_i, t)$, вж. (14.12). Величината

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial t} \tag{14.14}$$

се нарича *локалална* производна. Тя очевидно определя скоростта на изменението на φ във *фиксираната* пространствена точка с координати x_i.

Ясно е, че двете производни — материалната и локалната — *не съвпадат*. Причината е в това, че през фиксирана точка на пространството в *различни* моменти от време преминават *различни* материални частици. (По-подробно това ще се обсъжда в § 14.4.)

За намиране на връзката между материалната и локалната производни да внесем закона за движението на средата (14.1) в израза (14.12) на величината φ:

$$\varphi = g(x_i(X_k, t), t)\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,. \tag{14.15}$$

Диференцираме този израз спрямо времето, разглеждайки φ като сложна функция на t:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(x_i(X_k, t), t) \\ &= \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial t} + \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial x_p}\, \frac{\partial x_p(X_k, t)}{\partial t}\,. \end{aligned} \tag{14.16}$$

[1]Използва се и означението $\mathrm{D}\varphi/\mathrm{D}t$ за материалната производна.

Но частните производни $\partial x_p(X_k,t)/\partial t$ представляват компонентите на скоростта, вж. (14.7). Следователно

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_p\,\frac{\partial g(x_i,t)}{\partial x_p} \qquad \left(\sum\nolimits_p\right)$$

или в безкоординатен вид

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla g\,. \tag{14.17}$$

По-горе използвахме два различни символа, g и G, за дадената величина φ за да подчертаем, че тя има различни изрази в зависимост от това дали се разглежда в лагранжева или ойлерова координатни системи. По-нататък обаче това не е необходимо, защото или явно ще се указва, или пък от контекста ще бъде ясно в коя от двете системи работим. Затова ще използваме и в двата случая символа φ на разглежданата величина. Това уславяне позволява да напишем (14.17) като

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi\,. \tag{14.18}$$

Формулата (14.18) представлява търсената връзка между пълната и локалната производна на величината φ. Не е задължително впрочем тази величина да бъде скаларна — тя може да представлява векторно или тензорно поле. Поради това ще напишем (14.18) в един „по-абстрактен“ и по-удобен вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\,, \tag{14.19}$$

който ще се използва многократно.

14.4. Интерпретация на формулата (14.18)**. Конвективна производна**. Предвид важността на формулата (14.18) ще обсъдим в заключение на този параграф геометричната ѝ интерпретация.

Да разгледаме изменението на величината φ за инфинитезималния интервал от време $(t, t+\mathrm{d}t)$. Предполагаме, че в момента t пространствените координати на материална частица са x_p. За време $\mathrm{d}t$ тези координати ще се изменят с $\mathrm{d}x_p = v_p\,\mathrm{d}t$, т. е. в момента $t+\mathrm{d}t$ пространствените координати на същата частица ще бъдат $x_p + v_p\,\mathrm{d}t$, $p = 1,2,3$, а величината φ ще се измени с $\mathrm{d}\,\varphi$, вж. фиг. 14.2. Следователно скоростта на изменението на φ в дадената частица (т. е. материалната производна на φ) ще бъде

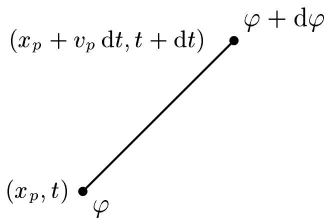
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\varphi(x_p + v_p\,\mathrm{d}t, t + \mathrm{d}t) - \varphi(x_p, t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \underline{\sum_{p=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\cdot v_p\,\mathrm{d}t}\right] \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_p\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_p} \quad \left(\textstyle\sum_p\right),\end{aligned} \tag{14.20}$$

което съвпада с (14.18). (Изразът в квадратните скоби в (14.20) е пълният диференциал на функцията $\varphi(x_i, t)$.)

Величината

$$v_p\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_p} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi \quad \left(\textstyle\sum_p\right) \tag{14.21}$$

се нарича *конвективна* производна на φ. От формулата (14.18) е ясно, че това е разликата между пълната и локалната производна на φ. Проведеният току-що геометричен анализ изяснява причината за появата на тази разлика. Именно, материалната частица в резултат на движението на средата изменя положението си в пространството: за време $\mathrm{d}t$ пространствените ѝ координати се променят с $\mathrm{d}x_p = v_p\,\mathrm{d}t$, $p = 1, 2, 3$. Вследствие на това в диференциала $\mathrm{d}\varphi$ се появява, освен $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t$, също и подчертаният член в (14.20), т. е. конвективната производна.



Фиг. 14.2

14.5. Ускорение. Ускорението на частица от средата е материалната производна на нейната скорост:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{14.22}$$

Съгласно (14.18)

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \tag{14.23}$$

или, спрямо декартова неподвижна координатна система,

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_\alpha v_{k,\alpha} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum v_\alpha\,\frac{\partial v_k}{\partial v_\alpha}\,. \tag{14.24}$$