§ 13. Символи на Кристофел

13.1. Дефиниция на символите на Кристофел. Както вече подчертахме в § 10.1, векторите $\boldsymbol{a}_i$ на локалния базис за криволинейна координатна система q_i се менят от точка в точка. „Скоростта“ на изменението им се характеризира с т. нар. *символи на Кристофел*, които се дефинират от равенството

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}_k \,. \tag{13.1}$$

Оттук се вижда, че

$$\nabla \boldsymbol{a}_i = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_k \,, \tag{13.2}$$

тъй като, съгласно дефиницията на производната по направление, $\boldsymbol{a}_j \cdot \nabla \boldsymbol{a}_i = \partial \boldsymbol{a}_i / \partial q_j$.

Символите на Кристофел са симетрични по индексите i, j. За да се убедим в това, припомняме дефиницията (10.6) на векторите $\boldsymbol{a}_i$

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \quad \text{и затова} \quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_j} = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}_k \,,$$

и забелязваме, че смесената производна $r_{,ij}$ е симетрична спрямо i, j. Следователно броят на символите на Кристофел за всяка криволинейна система е 18 ($= 6 \times 3$).

От (13.2) се вижда, че матрицата $\|\Gamma^k_{(i)j}\|$ за всяко фиксирано i се преобразува по тензорен закон, т. като това са компоненти на двувалентния тензор $\nabla \boldsymbol{a}_i$. Подчертаваме, че ‘i’ е фиксирано, като го ограждаме с кръгче, (i). Ще отбележим без коментар, че $\|\Gamma^k_{ij}\|$ *не представляват* компоненти на тривалентно тензорно поле: при смяна на координатната система, те не се преобразуват по съответния тензорен закон от типа на (10.25), вж. края на § 10.5. (В закона им за преобразуване се появява и матрицата на вторите производни $\partial^2 q_{i'} / \partial q_i \partial q_j$.)

13.2. „Ковариантна“ производна. Нека $\boldsymbol{u} = u^i\, \boldsymbol{a}_i$ е векторно поле. Градиентът му, $\nabla \boldsymbol{u}$, беше изразен в (12.9) с помощта на тензорите $\nabla \boldsymbol{a}_i$. Използвайки формулата (13.2), от (12.9) намираме

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{u} &= \frac{\partial u^i}{\partial q_j}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_i + u^i\, \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_k \\ &= \left(\frac{\partial u^p}{\partial q_i} + u^\alpha\, \Gamma^p_{\alpha i} \right) \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_p \,, \end{aligned} \tag{13.3}$$

след подходящо преименуване на съответните неми индекси.

Компонентите на $\nabla \boldsymbol{u}$ в диадния базис $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_p$ често се означават във физическата литература като $u^i{}_{;p}$

$$u^i{}_{;p} = \frac{\partial u^p}{\partial q_i} + u^\alpha \, \Gamma^p_{\alpha i} \tag{13.4}$$

и се наричат *ковариантни производни* на компонентите u^i, за разлика от частните производни $u^i{}_{,p} = \partial u^i / \partial q_p$. (Обърнете внимание на означението ';' във формулата (13.4).) Смисълът на този термин е, че матрицата от ковариантните производни $\|u^i{}_{;p}\|$ се преобразува при смяна на координатната система по съответния тензорен закон. В същото време е очевидно, че частните производни $\|\partial u^i / \partial q_p\|$ *не образуват* матрица на тензор за произволна система q_i, т. е. те *не се преобразуват* по тензорен закон. Причината, да подчертаем и тук, се състои в това, че при диференцирането на векторното поле, разложено по локалния базис, $\boldsymbol{u} = u^i \, \boldsymbol{a}_i$, следва да диференцираме както компонентите u^i, така и (променливите) вектори на базиса $\boldsymbol{a}_i$.

13.3. Градиент на векторите от дуалния базис. Нека $\boldsymbol{a}^i$ са векторите от дуалния локален базис за дадената криволинейна система. По дефиниция, $\boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i = \delta^p_i$, вж. (2.3), и затова $\nabla \left(\boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i \right) = 0$. Но

$$\nabla \boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i = -\nabla \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^n_{im} \, \boldsymbol{a}^m \, \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^n_{im} \, \boldsymbol{a}^m \, .$$

Следователно

$$\nabla \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^p_{im} \, \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{a}^i \, , \tag{13.5}$$

което и представлява търсената формула за градиентите $\nabla \boldsymbol{a}^p$ на векторите от дуалния базис.

Упражнение 13.1. *С* помощта на (13.5) покажете, че ако $\boldsymbol{u} = u_i \, \boldsymbol{a}^i$, то

$$\nabla \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_p}{\partial q_i} - u_\alpha \, \Gamma^\alpha_{pi} \right) \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^p \, .$$

13.4. Диференциране на тензорни полета в криволинейна координатна система. Формулите (13.2) и (13.5), които изразяват градиентите на векторите на локалните базиси, позволяват да диференцираме произволни тензорни полета, разложени по локалните полиадни базиси на криволинейната координатна система q_i .

Ще илюстрираме това върху примера на тензорно поле, зададено с помощта на чисто ковариантните си компоненти

$$\boldsymbol{T} = t_{ij} \, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j \, .$$

С помощта на (12.2) и (13.5) намираме

$$\begin{aligned}\nabla \boldsymbol{T} &= (\nabla t_{ij})\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j + t_{ij} \left(\nabla \boldsymbol{a}^i\right) \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i (\nabla \boldsymbol{a}^j) \\ &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k}\, \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j + t_{ij} \left(-\Gamma^i_{pq}\, \boldsymbol{a}^p \boldsymbol{a}^q\right) \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \left(-\Gamma^j_{pq}\, \boldsymbol{a}^p \boldsymbol{a}^q\right).\end{aligned} \tag{13.6}$$

Знакът $\sqcup$ под двойките $(\boldsymbol{a}^i, \nabla)$ и $(\boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{a}^p)$ показва, че в крайния резултат следва да се сменят местата на съответните диадни множители. Причината е, че в тензора $\nabla \boldsymbol{T}$ полиадният множител (или индексът в съответното координатно представяне), отговарящ на оператора ∇, следва да бъде *пръв*.

След подходящо „преименуване“ на съответните неми индекси в (13.6), намираме

$$\nabla \boldsymbol{T} = \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ki} - t_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j \,. \tag{13.7}$$

По напълно аналогичен път можем да пресметнем и градиента на произволно тензорно поле, зададено в съответния полиаден базис, породен от векторите на локалния базис за произволна координатна система q_i.

13.5. Дивергенция на тензорно поле. Нека отново $\boldsymbol{T}$ е двувалентно тензорно поле. В тривалентния тензор $\nabla \boldsymbol{T}$ можем да направим контракция по първата двойка индекси, т. е. да заменим диадното произведение $\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i$ в триадата $\boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j$ със скаларно, вж. § 8.5. Резултатът, по аналогия с векторния случай, наричаме *дивергенция* на тензорното поле $\boldsymbol{T}$, а изразът ѝ следва веднага от (13.7):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} = \nabla \cdot \boldsymbol{T} = g^{ki} \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ki} - t_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^j \,. \tag{13.8}$$

При контракция по двойка индекси валентността се намалява с две; естествено е тогава, че дивергенцията на двувалентното тензорно поле е векторно поле, чийто явен вид е даден в (13.8).

Отбелязваме, че контракцията (13.8), извършена в тривалентното поле $\nabla \boldsymbol{T}$, *не е единствената* възможна. Например, можем да извършим контракция и по индексите k и j:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} \operatorname{div} = \operatorname{div} \boldsymbol{T}^* &= \boldsymbol{T} \cdot \nabla \\ &= g^{kj} \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j} \Gamma^\alpha_{ki} - t_{i\alpha} \Gamma^\alpha_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^i \,.\end{aligned}$$

Това, че наблата се появява вдясно от $\boldsymbol{T}$ в последното уравнение се обяснява от факта, че сега ∇ се „умножава“ скаларно с втория (десния) диаден множител на тензора $\boldsymbol{T}$. Разбира се, можем да извършим и контракция по индексите i и j — резултатът ще е просто градиентът на следата, $\operatorname{tr}\boldsymbol{T}$, на тензора $\boldsymbol{T}$:

$$\nabla(\operatorname{tr}\boldsymbol{T}) = \nabla\left(g^{ij}\,t_{ij}\right) = g^{ij}\left\{\frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} - t_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj}\right\}\boldsymbol{a}^k\,.$$

13.6. Изразяване на символите на Кристофел чрез метрическите коефициенти. Да приложим формулата (13.7) към единичния тензор $\boldsymbol{I} = g_{ij}\,\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j$. Тъй като той е постоянен, то $\nabla\boldsymbol{I} = 0$ и от (13.7) следва

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} = g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} + g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj}\,. \tag{13.9}$$

Въвеждаме т. нар. *символи на Кристофел от втори род*:

$$\Gamma_{j,ki} = g_{\alpha j}\,\Gamma^{\alpha}_{ki}\,. \tag{13.10}$$

(Обръщаме внимание, че запетайката в означението $\Gamma_{j,ki}$ в случая няма *нищо общо* с диференцирането.) При това, очевидно,

$$\Gamma^{p}_{ki} = g^{pj}\,\Gamma_{j,ki}\,, \tag{13.11}$$

като използваме, че матриците $\|g_{kj}\|$ и $\|g^{kj}\|$ са взаимно обратни, вж. (2.13).

С помощта на символите $\Gamma_{j,ki}$ съотношението (13.9) се опростява:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{i,kj}\,. \tag{13.12}$$

С циклична смяна на индексите в (13.12) можем да запишем още две уравнения за неизвестните $\Gamma_{i,jk}$, $\Gamma_{j,ki}$ и $\Gamma_{k,ij}$. Заедно с (13.12) те представляват система линейна за тези три неизвестни (използваме симетричността на Γ^{p}_{ij} и следователно и на $\Gamma_{p,ij}$ спрямо индексите i,j, вж. § 13.1. Решението на така получената система е елементарно:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right)$$

или

$$\Gamma^{p}_{ij} = \frac{1}{2}g^{pr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_r}\right)\,, \tag{13.13}$$

вж. (13.11). Формулата (13.13) дава възможност по дадени метрични коефициенти g_{ij} в криволинейната система q_i да се пресметнат елементарно съответните символи на Кристофел Γ^p_{ij} .

Ако системата q_i е ортогонална, то

$$g_{ij} = H_i H_j \, \delta_{ij} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^3 \end{pmatrix} \quad \left(\not\sum\nolimits_{i,j} \right) . \tag{13.14}$$

От (13.13) тогава намираме, че

$$\begin{aligned} \Gamma^p_{ij} &= \frac{1}{2H_p H_r} \, \delta_{pr} \left(\frac{\partial \left(H_i H_r \right)}{\partial q_j} + \frac{\partial \left(H_j H_r \right)}{\partial q_i} - \frac{\partial \left(H_i H_j \right)}{\partial q_r} \right) \\ &= \frac{1}{2H_p^2} \left(\frac{\partial \left(H_p H_i \right)}{\partial q_j} + \frac{\partial \left(H_p H_j \right)}{\partial q_i} - \frac{\partial \left(H_i H_j \right)}{\partial q_p} \right) . \end{aligned} \tag{13.15}$$

(В първия ред на (13.15) сумираме по r.)

Съотношенията (13.15) показват, в частност, че $\Gamma^p_{ij} = 0$, ако $i \neq j \neq p \neq i$, т. е. ако нито една двойка индекси не съвпада. Тъй като има три такива тройки (в разглеждания тримерен случай), то броят на символите на Кристофел за ортогонална криволинейна система в общия случай е 15 $(= 18 - 3)$.

От (13.14) следва също така, че

$$\Gamma^p_{pj} = \frac{1}{H_p} \frac{\partial H_p}{\partial q_j} \quad \left(\not\sum\nolimits_p \right) .$$

Оттук, сумирайки по p, намираме

$$\sum_{p=1}^{3} \Gamma^p_{pj} = \Gamma^\alpha_{\alpha j} = \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \ln H_p}{\partial q_j} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \left(H_1 H_2 H_3 \right)}{\partial q_j} ,$$

или, ако означим с $g = \det \left(g_{ij} \right)$, то

$$\Gamma^\alpha_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial q_j} \quad \left(\sum\nolimits_\alpha \right) , \quad j = 1, 2, 3 , \tag{13.16}$$

тъй като $\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$, вж. (13.14). Ще отбележим, че формулата (13.16) е в сила за произволна криволинейна координатна система, а не само за ортогонална, вж. [3, т. 1, стр. 176].