§ 12. Диференциални операции в криволинейни координати

12.1. Градиент на скаларно поле. Дефиницията (11.5) на градиента чрез производната по направление позволява лесно да намерим израза му не само за декартова, но и за произволна криволинейна координатна система q_i. За целта е достатъчно да видим, че

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial q_i}\,, \tag{12.1}$$

тъй като в посоката на вектора $\boldsymbol{a}_i$ се мени само координатата q_i, $i = 1, 2, 3$. Оттук

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \boldsymbol{a}^i\,. \tag{12.2}$$

В частност, ако системата q_i е ортогонална, то векторите от дуалния базис са пропорционални на тези от изходния и затова

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i}\, \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \boldsymbol{e}_i\,, \tag{12.3}$$

вж. (10.12), където $\boldsymbol{e}_i$ са векторите на ортонормирания локален базис.

12.2. Градиент на векторно поле. Нека сега $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ е векторна функция, дефинирана в област $\Omega \subset \mathcal{E}_3$ на тримерното пространство $\mathcal{E}_3$. Аналогично на случая на скаларна функция (§ 11.1) можем да дефинираме производната

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\, \boldsymbol{u}_a(\lambda)\, \Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0)}{\lambda} \\ &= \lim_{M\to M_0} \frac{\boldsymbol{u}(M) - \boldsymbol{u}(M_0)}{|MM_0|}\,,\end{aligned} \tag{12.4}$$

вж. фиг. 11.1, при зададени точка $M_0 \in \Omega$ и вектор $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$; тук $\boldsymbol{u}_a(\lambda) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \lambda\boldsymbol{a})$. Ако векторът $\boldsymbol{a}$ е единичен, вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}| = 1$, то $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}\boldsymbol{e}$ е *производната на $\boldsymbol{u}$ по направлението $\boldsymbol{e}$*.

Ако векторът $\boldsymbol{a}$ не е единичен, то очевидно

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} = a\, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}e}\,, \quad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}\,, \quad |\boldsymbol{e}| = 1\,, \tag{12.5}$$

ср. (11.2)

За да характеризираме скоростта на изменение на $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ в дадената точка M, е необходимо да знаем производната ѝ по *всички* възможни направления. Предвид (12.5) това е еквивалентно на задаването на векторната функция:

$$\boldsymbol{a} \to \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a}, \quad \forall\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{E}_3 . \tag{12.6}$$

Както и в случая на скаларно поле (§ 11.1), лесно се проверява, че функцията (12.6) е линейно преобразование на $\mathcal{E}_3$. Поради това съществува двувалентен тензор $\nabla\boldsymbol{u}$, наречен *градиент* на $\boldsymbol{u}$, такъв че

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{a} \cdot \nabla\boldsymbol{u} . \tag{12.7}$$

Формулата за диференциране на сложна функция, приложена към (12.4), показва, че компонентите на $\nabla\boldsymbol{u}$ в декартова система $Mx_1x_2x_3$ са частните производни

$$(\nabla\boldsymbol{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \partial_i\, u_j = u_{j,i} , \quad i, j = 1, 2, 3 , \tag{12.8}$$

където u_i са компонентите на $\boldsymbol{u}$ в дадената декартова система. Попътно в (12.8) са въведени и различни означения за частните производни, които често се използват в литературата.

За криволинейна координатна система q_i, разлагаме полето $\boldsymbol{u}$ по векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, т. е. $\boldsymbol{u} = u^i\, \boldsymbol{a}_i$. Тогава

$$\begin{aligned} \nabla\boldsymbol{u} = \nabla(u^i\, \boldsymbol{a}_i) &= (\nabla u^i) \otimes \boldsymbol{a}_i + u^i\, \nabla\boldsymbol{a}_i \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial q_j}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_i + u^i\, \nabla\boldsymbol{a}_i \end{aligned} \tag{12.9}$$

— използвахме формулата (12.2) за ∇u^i. От (12.9) се вижда, че за пресмятането на$\nabla\boldsymbol{u}$ е необходимо да знаем $\nabla\boldsymbol{a}_i$.

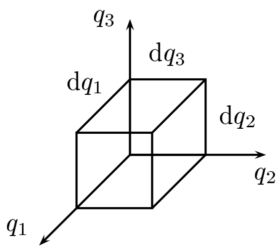
Величините $\nabla\boldsymbol{a}_i$ представляват двувалентни тензори — те определят „скоростта", с която се менят векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, когато се преместваме в пространството. Тензорите $\nabla\boldsymbol{a}_i$ се изразяват чрез т. нар. *символи на Кристофел*, които ще разгледаме по-подробно в § 13.

12.3. Дивергенция на векторно поле в криволинейни координати. Да разгледаме дивергенцията $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ на векторното поле $\boldsymbol{u}$.

Съгласно (12.9) имаме

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{a}_i\cdot\nabla u^i + u^i\,\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i\\ &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial q_i} + u^i\,\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i\,.\end{aligned}\tag{12.10}$$

Оказва се, че в ортогонална криволинейна система q_i величините $\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i$, а по такъв начин и дивергенцията на полето $\boldsymbol{u}$, могат да се пресметнат по прост начин, като използваме единствено формулата на Гаус без привличане на символите на Кристофел.



Фиг. 12.1. Към извода на (12.16)

Фиксираме точка $M(q_1,q_2,q_3)$ и разглеждаме елементарния паралелепипед $\mathcal{V}$, образуван от дъгите $\mathrm{d}s_i$ на координатните линии q_i, $i=1,2,3$, вж. фиг. 12.1. Дъгите $\mathrm{d}s_i$ се описват в резултат на зададените нараствания $\mathrm{d}q_i$ на координатите q_i и затова $\mathrm{d}s_i = H_i\,\mathrm{d}q_i$, съгласно (10.11). Предвид предположената ортогоналност на криволинейната система q_i, обемът на паралелепипеда е

$$\mathrm{d}V = H_1H_2H_3\,\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\,.\tag{12.11}$$

Тъй като той е безкрайно малък, можем да запишем

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{\mathrm{d}V}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\tag{12.12}$$

Прилагаме формулата на Гаус към интеграла (12.12):

$$\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}}u_n\,\mathrm{d}S\,,\quad u_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,,$$

$\boldsymbol{n}$ е единичната външна нормала.

Разбиваме шестте стени на паралелепипеда, т. е. повърхнината му $\mathcal{S}$, на три групи:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\mathcal{S}_3\,,$$

като всяка от тях, $\mathcal{S}_i$, се състои от двете стени, перпендикулярни на координатните линии q_i (по-точно, на векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$), $i=1,2,3$. Тогава

$$\int_{\mathcal{S}}u_n\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_1}u_n\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_2}u_n\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_3}u_n\,\mathrm{d}S\,.\tag{12.13}$$

Нека

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3\,, \tag{12.14}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ е ортонормираният локален базис, $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i/H_i$, $i = 1, 2, 3$.

Единичната нормала към двете стени, например, в $\mathcal{S}_1$, съвпада с $+\boldsymbol{e}_1$ (на предната стена) и с $-\boldsymbol{e}_1$ на задната. Следователно

$$\int_{\mathcal{S}_1} u_n\,\mathrm{d}S = u_1\,\mathrm{d}S_1\Big|_{q_1+\mathrm{d}q_1} - u_1\,\mathrm{d}S_1\Big|_{q_1}$$

— върху предната стена стойността на координатата q_1 е $q_1 + \mathrm{d}q_1$, съгласно конструкцията на елементарния паралелепипед, вж. фиг. 12.1. На свой ред

$$\mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = H_2H_3\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3\,,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_1} u_n\,\mathrm{d}S &= \left(u_1H_2H_3\Big|_{q_1+\mathrm{d}q_1} - u_1H_2H_3\Big|_{q_1}\right)\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\\ &= \frac{\partial}{\partial q_1}\,(u_1H_2H_3)\;\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\,.\end{aligned} \tag{12.15}$$

Обръщаме внимание, че коефициентите на Ламе *също зависят* от координатите q_i и поради това имат *различни стойности* при q_1 и $q_1 + \mathrm{d}q_1$. Затова в (12.15) е отчетено, че произведението H_2H_3 е различно на предната и на задната стени, перпендикулярни на $\boldsymbol{e}_1$.

Аналогично пресмятаме потоците през двойките стени $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ и внасяме съответните резултатите, заедно с (12.15), в (12.13). Отчитайки и формулата за $\mathrm{d}V$, вж. (12.11), намираме окончателно

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\bigg\{&\frac{\partial}{\partial q_1}\,(u_1H_2H_3)\\ &+\frac{\partial}{\partial q_2}\,(u_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}\,(u_3H_1H_2)\bigg\}.\end{aligned} \tag{12.16}$$

Да забележим, че ако векторното поле $\boldsymbol{u}$ е зададено чрез компонентите си в локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, то

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u^i\,\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{3} u^iH_i\,\boldsymbol{e}_i\,.$$

Оттук

$$u_i = H_iu^i\,,\quad i = 1, 2, 3 \quad \left(\not\sum_i\right)\,.$$

Спрямо компонентите u^i формулата (12.16) придобива един по-симетричен вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} (u^i \, H_1 H_2 H_3) \,. \tag{12.17}$$

Оттук, в частност, следват формулите за дивергенцията на векторите $\boldsymbol{e}_i$ на ортонормирания локален базис:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \, (H_2 H_3)}{\partial q_1} \,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \, (H_3 H_1)}{\partial q_2} \,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \, (H_1 H_2)}{\partial q_3} \,. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Да изредим няколко частни случая на формулата (12.16) за конкретни координатни системи.

Например в полярни координати

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \, (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \,,$$

където $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$ (тъй като в случая $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, вж. (10.15)).

В цилиндрични координати

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \, \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \,,$$

вж. (10.17).

В сферични координати

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \, (r^2 u_r)}{\partial r} \\ + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \, (u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \,, \end{aligned}$$

където $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta$ (тъй като в случая $H_r = 1$, $H_\varphi = r \sin\theta$, $H_\theta = r$).

12.4. Лапласиан в криволинейни координати. Нека $\boldsymbol{u} = \nabla f$ е потенциално поле. В ортогонална криволинейна система q_i компонентите на ∇f имат познатия вид

$$u_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \,, i = 1, 2, 3 \,,$$

вж. (12.3). Заедно с (12.16) това води до формулата за лапласиана в ортогоналната система q_i:

$$\Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\right\}. \tag{12.19}$$

В частност, в полярни координати

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right\},$$

а в сферични

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right\}.$$

В частния случай на сферически симетрична функция $f = f(r)$ последната формула съвпада с (11.20).

12.5. Ротация в криволинейни координати. Нека q_i криволинейна координатна система. Тъй като координатите q_i определят еднозначно положението на точките в пространството, съотношенията (10.3) са обратими, т. е.

$$q_i = q_i(x_j), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Оттук

$$\nabla q_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\,\boldsymbol{e}_j, \tag{12.20}$$

където $\boldsymbol{e}_j$ са единичните вектори на декартовата система $Ox_1x_2x_3$, вж. фиг. 10.1.

Съгласно дефиницията на градиента (12.1)

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \nabla q_i = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta^i_j.$$

Сравнението на последната формула с (2.3) ни дава

$$\nabla q_i = \boldsymbol{a}^i \tag{12.21}$$

за *произволна* криволинейна координатна система.

Нека сега q_i е ортогонална система. Тогава

$$\nabla q_i = \boldsymbol{a}^i = h_i \boldsymbol{e}_i \quad \left(\not\sum_i\right), \tag{12.22}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ е ортонормираният локален базис. Сравнението с (10.12) показва, че

$$h_i = \frac{1}{H_i}, \quad h_i = |\boldsymbol{a}^i| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)^2},$$

вж. (12.20).

Преди да преминем към пресмятането на ротацията на произволно векторно поле в координатите q_i е необходимо да намерим ротацията на векторите $\boldsymbol{e}_i$ от ортонормирания локален базис. За целта забелязваме, че полето $\boldsymbol{a}^i$ е потенциално, вж. (12.22), и затова ротацията му е нула

$$\nabla \times \boldsymbol{a}^i = \nabla \times \left(\frac{1}{H_i} \boldsymbol{e}_i\right) = 0, \tag{12.23}$$

съгласно критерия за потенциалност (11.34).

Нека f е произволно скаларно поле, а $\boldsymbol{a}$ е векторно поле. Пресмятаме $\nabla \times (f\boldsymbol{a})$. Съгласно дефиницията на ротацията (**??**) имаме

$$\begin{aligned} [\,\nabla \times (f\boldsymbol{a})\,]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \, (f a_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} f_j a_k + f \varepsilon_{ijk} \partial, j a_k \quad \left(\sum\nolimits_{j,k}\right), \end{aligned}$$

или, в безкоординатен вид,

$$\nabla \times (f\boldsymbol{a}) = \nabla f \times \boldsymbol{a} + f\, \nabla \times \boldsymbol{a}\,. \tag{12.24}$$

Прилагаме формулата (12.24) в (12.23)

$$\nabla \times \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\, (\nabla H_i) \times \boldsymbol{e}_i\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{12.25}$$

тъй като $\nabla \dfrac{1}{H_i} = -\dfrac{1}{H_i^2}\, \nabla H_i$. Но

$$\nabla H_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j}\, \boldsymbol{e}_j\,,$$

вж. (12.3), и затова, например,

$$\nabla H_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_1}{\partial q_j} \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Оттук и от (12.25) намираме търсените изрази за ротациите $\nabla \times \boldsymbol{e}_i$

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_3 \,, \\ \nabla \times \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_1 \,, \\ \nabla \times \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_3 \,, \end{aligned} \tag{12.26}$$

където използвахме, че

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{12.27}$$

Упражнение 12.1. *Покажете, че*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \tag{12.28}$$

за произволни векторни полета $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Упражнение 12.2. *Вземете в* (12.28) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$. *От първото съотношение на* (12.27) *тогава следва*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \, \nabla \times \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \, \nabla \times \boldsymbol{e}_2 \,.$$

Използвайки (12.26), *изведете оттук съотношенията* (12.18), *а с тяхна помощ и общата формула* (12.17) *за дивергенцията на произволно векторно поле.*

Нека сега

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=3}^{3} u_k \boldsymbol{e}_k$$

е произволно векторно поле, разложено по векторите на ортонормирания локален базис. С помощта на (12.24) и (12.25) намираме

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} &= \sum_{k=1}^{3} [\, (\nabla u_k) \times \boldsymbol{e}_k + u_k \, \nabla \times \boldsymbol{e}_k \,] = \sum_{k=1}^{3} \left[\nabla u_k + \frac{u_k}{H_k} \nabla H_k \right] \times \boldsymbol{e}_k \\ &= \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} [\, H_k \nabla u_k + u_k \nabla H_k \ \times \boldsymbol{e}_k] = \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} \nabla \, (H_k u_k) \times \boldsymbol{e}_k \,, \end{aligned}$$

т. е.

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j} \frac{\partial\,(H_k u_k)}{\partial q_j} \boldsymbol{e}_j \right) \times \boldsymbol{e}_k\,.$$

Използвайки (12.27), оттук намираме търсената формула за ротацията на произволно векторно поле в ортогонална криволинейна координатна система, именно,

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial\,(u_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial\,(u_2 H_2)}{\partial q_3} \right\} \boldsymbol{e}_1 \\ &+ \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial\,(u_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial\,(u_3 H_3)}{\partial q_1} \right\} \boldsymbol{e}_2 \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial\,(u_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial\,(u_1 H_1)}{\partial q_2} \right\} \boldsymbol{e}_3\,. \end{aligned} \tag{12.29}$$

В частност, в цилиндрични координати

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} = &\left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{e}_\varphi \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\,(r u_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{e}_z\,, \end{aligned}$$

а в сферични —

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} = &\frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial\,(u_\varphi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial\,(r u_\varphi)}{\partial r} \right) \boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial\,(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{e}_\varphi\,. \end{aligned}$$