§ 11. Оператор градиент. Набла-смятане на Хамилтън

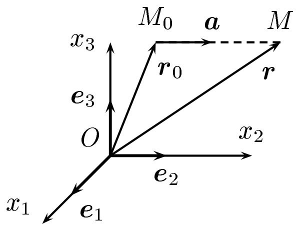
В този параграф ще въведем основните диференциалните операции над скаларни и векторни полета ще изразим компонентите им в декартова координатна система и ще обсъдим най-важните им свойства.

11.1. Производна по направление. Ако $f = f(x)$ е скаларна функция на една скаларна променлива, то скоростта на изменението на f в околност на точката x_0 се характеризира с производната $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, пресметната в същата точка x_0.

Нека

$$f = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,$$

е скаларна функция, дефинирана в област $\Omega \subset \Re^3$ на тримерното пространство $\Re^3$; $\boldsymbol{r}$ е радиус-векторът на точка с декартови координати (x_1, x_2, x_3), $\boldsymbol{e}_i$ са векторите на ортонормирания базис, определен от осите Ox_i, $i = 1, 2, 3$, вж. фиг. 11.1.



Фиг. 11.1. Производна по направление

Фиксираме точка M_0 с радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ и разглеждаме изменението на функцията $f = f(\boldsymbol{r})$ върху правата $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda \in \Re$, при зададен вектор $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Върху тази права $f = f(\boldsymbol{r})$ се превръща във функция на скаларния аргумент λ:

$$f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}) = f_a(\lambda).$$

Въвеждаме производната

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} f_a(\lambda)\,\Big|_{\lambda=0} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{r}_0)}{\lambda} \\ &= \lim_{M\to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|},\end{aligned} \tag{11.1}$$

вж. фиг. 11.1. Ако векторът $\boldsymbol{a}$ е единичен, $|\boldsymbol{a}| = 1$, то $\mathrm{d}f/\mathrm{d}a$ се нарича *производна на функцията* $f(\boldsymbol{r})$ *по направлението* $\boldsymbol{a}$. Тази производна определя скоростта на изменението на $f(\boldsymbol{r})$ по направлението, определено от вектора $\boldsymbol{a}$.

Ако векторът $\boldsymbol{a}$ не е единичен, то очевидно

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = a\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e}\,, \quad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}\,, \quad |\boldsymbol{e}| = 1\,. \tag{11.2}$$

За да характеризираме скоростта на изменение на $f(\boldsymbol{r})$ в дадената точка M, е необходимо да знаем производната ѝ по *всички* възможни направления. Предвид (11.2) това е еквивалентно на задаването на съответствието

$$\boldsymbol{a} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}\,, \quad \forall\,\boldsymbol{a} \neq 0\,. \tag{11.3}$$

Този именно факт съществено отличава многомерния от едномерния случай (в последния както вече споменахме е достатъчна само производната $f'(x_0)$ за да опишем скоростта на изменението на $f(x_0)$ в точката x_0.)

Оказва се, че съответствието (11.3) е линейно: съществува вектор $\operatorname{grad} f$, дефиниран с равенството

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\boldsymbol{e}_3\,, \tag{11.4}$$

така че

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad} f = a_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\,\frac{\partial f}{\partial x_3}\,. \tag{11.5}$$

Формулата (11.5) е просто следствие на дефиницията (11.1) и на правилото за диференциране на сложна функция. (Проверете!)

От (11.5) следва, че посоката на вектора $\operatorname{grad} f$ съвпада с посоката на най-бързото нарастване на функцията в дадената точка.

Упражнение 11.1. *Повърхнините* $f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$ *се наричат повърхнини на ниво за скаларната функция* $f(\boldsymbol{r})$*. Покажете, че векторът* $\operatorname{grad} f$*, пресметнат в коя да е точка* M*, е насочен винаги по нормала към повърхнината на ниво, минаваща през* M*, в посока на нарастването на* $f(\boldsymbol{r})$*.*

Да отбележим също и формулите

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi\,, \tag{11.6}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi\,, \tag{11.7}$$

$$\operatorname{grad} F(\varphi) = F'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi\,, \tag{11.8}$$

които са очевидно следствие от дефиницията на градиента (11.4).

11.2. Набла-смятане. Въвеждаме, следвайки Хамилтън, абстрактния вектор ∇ (*набла*):

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \,. \tag{11.9}$$

С други думи, това е „вектор“, чиито „компоненти“ в декартова координатна система $Ox_1x_2x_3$ са $\partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Оказва се, че в редица случаи е много удобно да се третира абстрактният символ ∇ като истински вектор. В това се състои основната идея на *набла-смятането* на Хамилтън, към чието изложение и най-прости приложения ще преминем сега.

Ще отбележим, че при подобно разглеждане няма значение дали ще поставим ∇ вляво или вдясно от символа на функцията f: и в двата случая резултатът ще бъде градиента на f

$$\nabla f = f \nabla = \operatorname{grad} f \,, \tag{11.10}$$

вж. (11.5).

Да се спрем на няколко примера, свързани с пресмятането на градиента за някои най-прости функции.

Пример 11.1. Нека $f(\boldsymbol{r})$ е сферически-симетрична функция, т. е. тя зависи само от дължината r на радиус-вектора:

$$f(\boldsymbol{r}) = f(r) \,, \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \,. \tag{11.11}$$

Да пресметнем ∇f.

Забелязваме първо, че $\partial r/\partial x_i = x_i/r$, $i = 1, 2, 3$. Оттук

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \frac{x_i}{r} \,, \quad i = 1, 2, 3 \,. \tag{11.12}$$

Следователно

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i = \frac{f'(r)}{r} \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = f'(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,,$$

т. е.

$$\nabla f(r) = f'(r) \, \boldsymbol{e}_r \,, \quad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \,. \tag{11.13}$$

Тук $\boldsymbol{e}_r$ е единичният вектор на радиус-вектора $\boldsymbol{r}$.

Пример 11.2. Да пресметнем ∇f, където $f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{r}$ с постоянен вектор $\boldsymbol{G}$.

Имаме

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3} x_k G_k = \sum_{k=1}^{3} G_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3\,.$$

Но

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}\,, \quad \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = i\,, \\ 0, & \text{ако } k \neq i\,, \end{cases} \tag{11.14}$$

където δ_{ki} е т. нар. *символ на Кронекер*. Следователно

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} G_k \delta_{ki} = G_i\,, \quad i = 1,2,3$$

(при сумирането по k остава само членът с индекс $k = i$). Тогава

$$\nabla(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}\,. \tag{11.15}$$

Пример 11.3. Нека $f(\boldsymbol{r}) = h(r)\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}$ със сферически-симетрична функция $h(r)$ и фиксиран вектор $\boldsymbol{G}$. Да пресметнем ∇f.

С помощта на (11.7) намираме

$$\nabla f(\boldsymbol{r}) = \nabla(h(r)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})) = (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})\nabla h(r) + h(r)\nabla(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})\,.$$

Използването на (11.13) и (11.7) в последната формула дава

$$\nabla(h(r)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})) = h'(r)\,\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) + h(r)\boldsymbol{G}\,. \tag{11.16}$$

11.3. Лапласиан. В рамките на тази трактовка на наблата нека видим първо какво представлява „квадратът на дължината“ на ∇, т. е. величината, която стандартно се означава с Δ или ∇^2:

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla\,. \tag{11.17}$$

Съгласно (11.4)

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\,, \tag{11.18}$$

т. е. Δf е сумата от вторите производни на функцията $f(x_1, x_2, x_3)$ спрямо аргументите ѝ x_1, x_2, x_3. (Естествено в n-мерния случай се сумират вторите производни $\partial^2 f/\partial x_i^2$ на f по i от 1 до n.)

Скаларният оператор Δ, който на функцията f съпоставя Δf, се нарича *оператор на Лаплас* или *лапласиан*. Съответно уравнението $\Delta f = 0$ се нарича *уравнение на Лаплас*; то се появява в много класически задачи на математическата физика, например в уравнението на топлопроводността, което ще изведем и обсъдим в § 21.3. На свой ред функции f, за които $\Delta f = 0$, се наричат *хармонични*.

Пример 11.4. Да предположим, че скаларната функция $f(\boldsymbol{r})$ е сферически-симетрична, вж. (11.11). Търсим лапласиана на $f(\boldsymbol{r})$.

Пресмятаме нужните ни частни производни с помощта на (11.12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= f''(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{r} + f'(r)\,\frac{1}{r} - f'(r)\,\frac{x_i}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\\ &= f''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\,\frac{1}{r} - f'(r)\,\frac{x_i^2}{r^3}\,, \quad i = 1, 2, 3\,.\end{aligned}$$

Сумираме производните $\partial^2 r/\partial x_i^2$ по i от 1 до 3

$$\begin{aligned}\Delta f(r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\\ &= f''(r)\,\frac{1}{r^2}\,\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\,\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.\end{aligned} \tag{11.19}$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = r^2$ и от (11.19) сега намираме търсената формула за лапласиана на функцията $f(r)$:

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} = \frac{1}{r^2}\,\Big(r^2 f'(r)\Big)'\,. \tag{11.20}$$

В § 12.3 ще видим, че (11.20) е частен случай на общата формула за лапласиана на скаларна функция в ортогонална криволинейна координатна система.

Упражнение 11.2. *Обобщете формулата* (11.20) *за скаларна сферически-симетрична функция от* n *променливи.*

Отг.: Ако $f = f(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, то

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\,\big(r^{n-1} f'(r)\big)'\,, \quad n \geq 2\,.$$

Упражнение 11.3. *Намерете всички хармонични сферически-симетрични функции от n променливи, т. е. общото решение на уравнението $\Delta f(r) = 0$ в $\Re^n$.*

Отг.:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2 \,, & \text{ако } n \geq 3 \,, \\ C_1 \ln r + C_2 \,, & \text{ако } n = 2 \,; \end{cases}$$

тук C_1 и C_2 са произволни константи.

Упражнение 11.4. *Покажете, че ако една сферически-симетрична функция е хармонична и ограничена върху цялото пространство $\Re^n$, $n \geq 2$, то тя е константа.*

11.4. Дивергенция на векторно поле. Нека

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$$

е векторна функция на векторния аргумент $\boldsymbol{r}$. Такива функции се наричат също *векторни полета*; те се появяват често в различен контекст в конкретни приложения. (Например силата, преместването на точка в деформируема среда, скоростта на точка от флуид и т. н. са все векторни полета.) В декартова координатна система

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} u_k(x_1, x_2, x_3)\, \boldsymbol{e}_k \,. \tag{11.21}$$

Да отбележим, че лапласианът на $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ се намира по очевиден начин от (11.18):

$$\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} \Delta u_k(x_1, x_2, x_3)\, \boldsymbol{e}_k \,. \tag{11.22}$$

Пример на векторно поле е и градиентът

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \nabla f(\boldsymbol{r}) \tag{11.23}$$

на всяка скаларна функция. Такива векторни полета се наричат *потенциални*, а функцията $f(\boldsymbol{r})$ е съответният ѝ *скаларен потенциал*. От дефиницията (11.23) впрочем е ясно, че потенциалът $f(\boldsymbol{r})$ е дефиниран с точност до произволна адитивна константа.

Да „умножим“ скаларно ∇ с векторното поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, т. е. да разгледаме (скаларната) функция

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{11.24}$$

— тя се нарича *дивергенция* на полето $\boldsymbol{u}$ и често се записва и като $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$.

От дефинициите (11.17) и (11.23) се вижда, че

$$\nabla\cdot\nabla f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f, \tag{11.25}$$

т. е. дивергенцията на потенциалното поле е просто лапласианът на неговия потенциал.

11.5. Свойство на потенциални полета. Потенциалните полета притежават едно важно свойство, свързано с криволинейните интеграли от вида

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma \left(u_1\,\mathrm{d}x_1 + u_2\,\mathrm{d}x_2 + u_3\,\mathrm{d}x_3\right)\,, \tag{11.26}$$

където γ е крива, свързваща фиксираните точки M' и M'' от дефиниционната област на дадено поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. За произволно векторно поле стойността на този интеграл зависи от кривата γ, свързваща M' и M''.

Ако полето обаче е потенциално, то

$$\begin{aligned}\int_\gamma \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3\right)\\ &= \int_\gamma \mathrm{d}f = f(M'') - f(M')\,.\end{aligned} \tag{11.27}$$

Тук $\mathrm{d}f$ е пълният диференциал на функцията f. Следователно интегралът (11.27) е *инвариантен* спрямо пътя γ. По-точно, той зависи само от стойностите на f в началната и крайната точки M' и M'' и не зависи от пътя, съединяващ тези точки. С други думи,

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \quad \text{ако} \quad \boldsymbol{u} = \nabla f\,,$$

за *всеки* два пътя γ_1 и γ_2, съединяващи M' и M'' (или, еквивалентно, $\oint_\gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ при интегриране по произволна затворена крива γ).

Вярно е и обратното: ако интегралът

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

не зависи от кривата γ, а само от началната и крайната ѝ точки, и дефиниционната област Ω на $\boldsymbol{u}$ е едносвързана (т. е. в нея няма „дупки“), то полето е потенциално. Еквивалентно,

$$\boldsymbol{u} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad \oint_\gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

за всяка затворена крива γ.

Да отбележим, че ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$ е силово поле, то $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ е т. нар. *елементарна работа*, т. е. работата, която извършва силата $\boldsymbol{F}$ при безкрайно малко („елементарно“) преместване $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ на материална точка. Интегралът

$$A_{\smile{M'M''}} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

тогава представлява работата, извършена от силите на полето при движението на точката от M' до M'' по кривата $\gamma = \overset{\smile}{M'M''}$. Ако тази работа не зависи от пътя γ, а само от началното и крайното положение, то полето $\boldsymbol{F}$ е потенциално:

$$\boldsymbol{F} = \nabla U\,, \quad \mathrm{d}U = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \tag{11.28}$$

т. е. $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ (елементарната работа) е точен диференциал на функцията U. В разглеждания случай функцията U се нарича *потенциал* на силата, а $V = -U$ — *потенциална енергия*. В курсовете по механика се показва, че при движението на материална точка в потенциално силово поле се запазва пълната енергия E:

$$E = T + V = \mathrm{const}\,, \tag{11.29}$$

където $T = \frac{1}{2}mv^2$ е кинетичната енергия на точката. Този факт обяснява важността на потенциалните полета в класическата механика. Именно, за такива полета съществува нетривиалния интеграл на движението (11.29) с ясен физически смисъл (вж. [6, § 38] за подробности).

Пример 11.5. Най-често срещаните в приложенията силови полета са централните, в които големината на силата зависи само от разстоянието до полюса:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\boldsymbol{e}_r\,, \quad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,,$$

вж. § 13.4. Покажете, че такива полета са потенциални и намерете потенциалната функция.

Решение. Съгласно (11.28)

$$\mathrm{d}U = F(r)\,\frac{\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r}\,. \tag{11.30}$$

Записваме очевидното равенство $r^2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}$ и пресмятаме диференциалите на двете му страни:

$$2r\,\mathrm{d}r = 2\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \quad \text{т. е.} \quad \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\,\mathrm{d}r\,.$$

Внасяме последното равенство в (11.30):

$$\mathrm{d}U = F(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Оттук се вижда, че потенциалната функция наистина съществува, като зависи само от дължината r на радиус-вектора. Нещо повече, тази функция представлява примитивната на $F(r)$:

$$U(r) = \int F(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Упражнение 11.5. *Намерете потенциалната функция за нютоновото поле на привличане*

$$F(r) = -\frac{\mu m}{r^2}\,.$$

Тук m е масата на точката, движеща се в нютоновото поле, а μ е т. нар. гаусова постоянна на полето (пропорционална на масата на привличащия център).

Отг.: $U(r) = \dfrac{\mu m}{r} + \mathrm{const}\,.$

11.6. Ротация на векторно поле. Операторът набла освен скаларно може да се „умножи“ и векторно с полето $\boldsymbol{u}$. Резултатът е векторното поле, наречено *ротация* (или просто *ротор*) на $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\boldsymbol{u}\,. \tag{11.31}$$

(В англоезичната литература вместо $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ е прието означението $\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$.)

Компонентите на $\nabla \times \boldsymbol{u}$ в декартова система се намират по добре известното правило за разкриване на векторното произведение:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_1(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) + \boldsymbol{e}_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) + \boldsymbol{e}_3(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\,. \tag{11.32}$$

Тук е използвано за краткост означението $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Често се използват още по-кратки означения, в които диференцирането се записва като индекс след запетая:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,, \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{и т. н.}$$

Заедно с $\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$ е векторно поле, чиято ротация също може да се пресметне. Резултатът е т. нар. *биротация* (или *биротор*) на полето $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{Rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$$

— изредени са различните означения, които могат да се срещнат в литературата.

По формулата за разкриване на двойното векторно произведение (да я напомним: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, вж. (**??**)) бироторът се представя във вида

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \nabla)\,.$$

Тук третираме, съгласно възприетата в § 11.2 „идеология“, наблата като абстрактен вектор. Но $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, а $\boldsymbol{u}(\nabla \cdot \nabla) = (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u}$, вж. (11.10), и затова

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \Delta\boldsymbol{u}\,.$$

Последното равенство може да се срещне и в еквивалентния му вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\ = \operatorname{grad}\operatorname{div}\ - \Delta\,.$$

Аналогично на понятието потенциално поле въвеждаме полетата $\boldsymbol{u}$, които се представят във вида

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi}\,. \tag{11.33}$$

Те се наричат *соленоидални*, а функцията $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ в (11.33) — *векторен потенциал* на полето $\boldsymbol{u}$.

11.7. Характеристика на потенциалните и соленоидалните полета. В § 11.4 характеризирахме потенциалните полета чрез независимостта на криволинейния интеграл (11.26) от пътя γ. Съществува и друга тяхна характеризация, свързана с ротацията на полето. Именно, нека $\boldsymbol{u}$ се представя във вида (11.23). Тогава

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla \times \nabla f = 0\,.$$

В рамките на набла-смятането този факт е очевиден: абстрактният вектор ∇ се „умножава“ векторно сам със себе си и затова резултатът трябва да е нула. Това обаче има силата само на евристично разсъждение и следва да се провери директно от дефиницията на ротацията (11.32):

$$\nabla \times \nabla f = \boldsymbol{e}_1(\partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f) + \cdots = 0\,,$$

т. е. $\nabla \times \nabla f$ наистина се анулира като следствие от (11.9) и (11.32).

В случая на едносвързана област е вярно и обратното твърдение. С други думи

$$\boldsymbol{u} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{11.34}$$

т. е. полето е потенциално тогава и само тогава, когато ротацията му е нулева.

Нека сега полето е соленоидално. Тогава

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) = 0,$$

което в рамките на набла-смятането отново е очевидно: векторът $\nabla \times \boldsymbol{\Phi}$ е „перпендикулярен“ на ∇ и поради това, скаларно умножен с ∇, дава нула. Това се вижда и от директната проверка:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) &= \partial_1(\partial_2\Phi_3 - \partial_3\Phi_2) \\ &\quad + \partial_2(\partial_3\Phi_1 - \partial_1\Phi_3) + \partial_3(\partial_1\Phi_2 - \partial_2\Phi_1) = 0\,,\end{aligned}$$

вж. (11.24) и (11.31). Отново в случая на едносвързана област е вярно и обратното твърдение:

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{11.35}$$

т. е. полето е соленоидално тогава и само тогава, когато дивергенцията му е нулева.

Доказателство на критериите за потенциалност (11.34) и соленоидалност (11.35) на едно векторно поле могат да се намерят например в [7, § 16] или [14, § 14].

11.8. Теорема на Хелмхолц. *Произволно векторно поле, дефинирано в едносвързана област и достатъчно гладко, е сума от потенциално и соленоидално* поле:

$$\boldsymbol{u} = \nabla f + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}\,. \tag{11.36}$$

Идея за доказателство. Нека f е частно решение на уравнението

$$\Delta f = \nabla \cdot \boldsymbol{u}\,. \tag{11.37}$$

Такова решение се дава например от т. нар. *интеграл на Поасон*:

$$f(\boldsymbol{x}) = -\int_\Omega \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}V_y\,,$$

където Ω е дефиниционната област на $\boldsymbol{u}$, вж. [14, стр. 390] или [5, стр. ...]. Разглеждаме функцията $\boldsymbol{u} - \nabla f$; дивергенцията ѝ очевидно е нула, предвид (11.37). От (11.35) тогава следва, че $\boldsymbol{u} - \nabla f$ е соленоидално и затова $\boldsymbol{u} - \nabla f = \nabla \times \boldsymbol{\Phi}$, вж. (11.35).

11.9. Формула на Гаус. Нека $\boldsymbol{u}$ е векторно поле, $\mathcal{V}$ е област в $\Re^3$ с граница $\mathcal{S}$, вж. фиг. 11.2. Разглеждаме интеграла

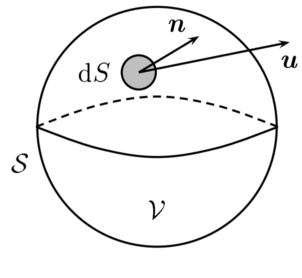
$$\int_{\mathcal{S}} u_n \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}S\,. \tag{11.38}$$

Тук $\boldsymbol{n}$ е единичният вектор на външната нормала към повърхнината $\mathcal{S}$, така че $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ е проекцията на $\boldsymbol{u}$ върху тази нормала. Интегралът (11.38) се нарича *поток на векторното поле* през повърхнината $\mathcal{S}$. Произходът на този термин се крие в „хидродинамичната“ интерпретация на (11.38). Да си представим, че $\boldsymbol{u}$ е полето на скоростта в течност, преминаваща през $\mathcal{V}$. Тогава $u_n \,\mathrm{d}S = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}S$ е количеството течност, която пресича елементарното лице $\mathrm{d}S$ от повърхнината $\mathcal{S}$ за време $\mathrm{d}t$, като по този начин влиза или излиза от него в зависимост от знака на $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}$. „Сумирайки“ по всички елементарни лица, получаваме интеграла (11.38), който по такъв начин представлява сумарното количество течност, преминаващо през обема $\mathcal{V}$ за време $\mathrm{d}t$.

Да отбележим впрочем, че ако няма приток или загуба на течността вътре в обема $\mathcal{V}$, то

$$\int_{\mathcal{S}} u_n \,\mathrm{d}S = 0\,.$$

Последното равенство означава, образно казано, че колкото течност се влива в обема, толкова изтича от него.



Фиг. 11.2. Поток на векторно поле

Оказва се, че потокът на векторното поле може да се изрази и чрез обемния интеграл на дивергенцията му с помощта на *формулата на Гаус*[2]

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}V\,. \tag{11.39}$$

Формулата на Гаус играе централна роля в многомерния анализ и приложенията му, свързани с математическото моделиране. Но преди да скицираме доказателството ѝ, нека обърнем внимание на два важни факта, свързани с тази формула.

[2]или още на Гаус-Остроградски (в руската литература).

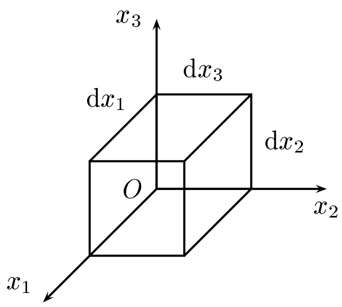
Първо, тя може да се разглежда като многомерно обобщение на класическата формула на Лайбниц-Нютон

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\Big|_a^b ,$$

в която ролята на $\mathcal{V}$ играе интервалът (a, b), границата $\mathcal{S}$ са точките a и b, понятието външна нормала губи смисъл, а интегралът при тази граница е просто $f(b) - f(a)$.

Второ, формулата на Гаус е в сила не само за векторни полета. В най-простия си вид (11.39), който единствено ще се обсъжда и използва тук, тя илюстрира най-същественото в тази формула. Именно, за да се премине от обемен към повърхнинен интеграл, операторът набла следва да се замени с единичния вектор на външната нормала. По този начин формулата на Гаус в по-общия си вид схематично може да се изрази с формалното равенство

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \,.$$



Фиг. 11.3

В частност, за скаларно поле f имаме

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} f \,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla f \,\mathrm{d}V$$

или, за векторно поле $\boldsymbol{u}$ например,

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$$

и т. н.

Ще скицираме доказателството на формулата (11.39), акцентирайки само върху основните идеи. (Детайлно доказателство може да се намери например в [7, § 14] или [14, § 12].)

Започваме с разглеждането на елементарен паралелепипед, чиито ръбове $\mathrm{d}x_k$ са успоредни на декартовите оси Ox_k, $k = 1, 2, 3$, а върхът му O е в точката (x_1, x_2, x_3), вж. фиг. 11.3. Да означим с $\mathcal{S}_k$ двете стени на паралелепипеда, перпендикулярни на оста Ox_k; техните външни нормали са съответно $+\boldsymbol{e}_k$ и $-\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогава повърхнината на паралелепипеда е

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$$

и съответно потокът (11.38) на векторното поле е

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_1} u_1\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_2} u_2\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_3} u_3\,\mathrm{d}S\,.$$

Но

$$\int_{\mathcal{S}_1} u_1\,\mathrm{d}S = \Big[u_1(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2,x_3) - u_1(x_1,x_2,x_3)\Big]\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}V\,,$$

тъй като паралелепипедът е безкрайно малък с обем $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$, а стойностите на x_1-координатата върху задната и предната му стени, перпендикулярни на оста Ox_1, са съответно x_1 и $x_1+\mathrm{d}x_1$. Аналогични са изразите и за $\int_{\mathcal{S}_2}\ldots$ и $\int_{\mathcal{S}_3}\ldots$

Като сумираме така намерените изрази за интегралите $\int_{\mathcal{S}_k}\ldots$, $k = 1,2,3$, и използваме още веднъж инфинитезималността на паралелепипеда, получаваме

$$\int_{\mathcal{S}} u_n\,\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\,.$$

С това формулата на Гаус е доказана за всеки елементарен паралелепипед.

Да разбием произволна област $\mathcal{V}$ на елементарни паралелепипеди:

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{V}_\alpha\,,$$

вж. фиг. 11.4, и да напишем формулата (11.39) за всеки от тях:

$$\int_{\mathcal{S}_\alpha} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}_\alpha} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\,.$$

Сумираме по α. Предвид адитивността на обемния интеграл имаме

$$\sum_{\alpha}\int_{\mathcal{V}_\alpha} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\,.$$

На свой ред

$$\sum_{\alpha}\int_{\mathcal{S}_\alpha} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$$

— остава само интегрирането по повърхнината $\mathcal{S}$ на обема, тъй като потоците през частите от повърхнините вътре в обема взаимно се унищожават. (Единичните нормали към съответните стени на два съседни допиращи се паралелепипеда, вътрешни за областта, са очевидно равни и срещуположно насочени.)