

Глава 5

НАЙ-ПРОСТИ МОДЕЛИ НА НЕПРЕКЪСНАТИ СРЕДИ

§ 23. Модел на идеална течност. Уравнения на Ойлер

23.1. Модел на идеална течност.

§ 24. Модел на вискозна течност. Уравнения на Навие-Стокс

24.1. Модел на вискозна течност. Закон на Навие-Стокс.

24.2. Уравнения на Навие-Стокс.

24.3. Приближение на Стокс.

§ 25. Модел на линейно-еластично тяло. Уравнения на Ламе

25.1. Линейно-еластично тяло. Тензорен закон на Хук. Еластичното тяло се характеризира с предположението, че във всяка негова точка тензорът на напрежението \mathbf{T}_σ еднозначно се определя от тензора на деформацията \mathbf{T}_ϵ

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathcal{F}(\mathbf{T}_\epsilon). \quad (25.1)$$

Тензорната функция \mathcal{F} в (25.1) се нарича *закон на деформирането* или *закон на материала*. Предположили сме допълнително, че тялото е хомогенно, т. е. функцията \mathcal{F} е една и съща във всички точки на тялото.

Да предположим също така, че деформацията е малка. Това позволява да заместим тензора \mathbf{T}_ϵ в (25.1) с тензора на малката деформация $\mathbf{T}_e = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$, където \mathbf{u} е полето на преместването на точките от тялото, вж. § 15.5. Освен това $\|\mathbf{T}_e\| \ll 1$, което позволява да разложим функцията \mathcal{F} в ред на Тейлър в околността на недеформираното състояние $\mathbf{T}_e = 0$ и да се ограничим само с първите два члена на разлагането

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma^0 + \mathbf{H} : \mathbf{T}_e. \quad (25.2)$$

Очевидно $\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\sigma^0$ при $\mathbf{T}_e = 0$, т. е. \mathbf{T}_σ^0 представляват т. нар. *остатъчни напрежения* (residual stresses) в тялото, които могат да съществуват даже когато то е недеформирано.¹

Да предположим, че остатъчни напрежения няма, $\mathbf{T}_\sigma^0 = 0$. В (25.2) остава единствено линейния по деформацията \mathbf{T}_e член

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{H} : \mathbf{T}_e, \quad \text{или} \quad \sigma^{ij} = H^{ijkl} e_{kl}. \quad (25.3)$$

Законът на материала (25.3) характеризира *модела на линейно еластичното* или *тяло на Хук*. Четиривалентният тензор \mathbf{H} се нарича *тензор на еластичните модули* или *тензор на Хук*.

Четиривалентният тензор \mathbf{H} , чрез указаната в контракция по две двойки индекси, определя линейно преобразование в пространството от симетрични двувалентни тензори. Напомняме, че двата тензори \mathbf{T}_σ и \mathbf{T}_ϵ

¹Да отбележим, че съществуването на подобни напрежения е напълно реалистично. Такива са например т. нар. *термични напрежения*. Последните се появяват в резултат на бързо охлаждане на предварително нагрятото тяло. Остатъчни напрежения съществуват и ако тялото съдържа някакви дефекти например ако сме го слепили („припаснали“) от няколко части, които не се „пасват“ много добре.

са симетрични. Поради това компонентите на тензора \mathbf{H} са симетрични в първата и втората двойка индекси

$$H^{ijkl} = H^{jikl}, \quad H^{ijkl} = H^{ijll}. \quad (25.4)$$

Тъй като пространството от симетрични двувалентни тензори е шестмерно, то общият брой на компонентите на \mathbf{H} е 36. Може да се покаже, използвайки вече термодинамични съображения, че тензорът \mathbf{H} притежава и т. нар. *външна симетрия*:

$$H^{ijkl} = H^{klji}, \quad (25.5)$$

т. е. \mathbf{H} е симетричен при смяната на първата и втората двойка индекси. Следователно \mathbf{H} може да се разглежда като симетрично линейно преобразование в пространството на двувалентни тензори, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$, и поради това общият брой на компонентите му е 21. Това означава, че за пълно описание на еластичните свойства на произволно линейно еластично тяло са достатъчни не повече от 21 еластични константи. Ако тялото има някаква симетрия (свойствата му са едни и същи в определени направления, както е при кристалите), то броят на еластичните константи е по-малък. При това очевидно колкото е „по-богата“ е симетрията на тялото, толкова по-малко са тези константи. За „най-богатата“ симетрия — изотропията — броят на еластичните константи е точно две, както ще се убедим веднага.

25.2. Закон на Хук за изотропно тяло. Уравнения на Ламе.

За изотропно тяло тензорът \mathbf{H} има вече познатия вид (9.18), така че законът на Хук (25.3) се опростява съществено

$$\mathbf{T}_\sigma = \lambda \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\varepsilon + 2\mu \mathbf{T}_\varepsilon. \quad (25.6)$$

Константите λ и μ в (25.6) се наричат *коэффициенти на Ламе*.

Внасянето на (25.6) в уравнението на движение (19.13) на средата дава

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (25.7)$$

Да предположим допълнително, че скоростта на точките е малка, $|\mathbf{v}| \ll 1$. Тогава

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

т. като деформацията е малка, т. е. $\|\nabla \mathbf{u}\| \ll 1$, и затова $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$ е малка от по-висок порядък. На свой ред

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (25.8)$$

по причини, аналогични на току-що изложените. Внасянето на (25.8) в (25.7) води до вече линейната система от частни диференциални уравнения

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}. \quad (25.9)$$

— това са уравненията на Ламе, които се удовлетворяват от полето на преместването $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в изотропно линейно-еластично тяло. Изследването на тези уравнения и решаването им² за конкретни тела е предмет на математическата теория на еластичността.

Важно е да отбележим, че предположението за малка скорост на деформацията, заедно с уравнението на непрекъснатостта (18.12), влече

$$\frac{d\rho}{dt} \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0.$$

Това означава, че изменението на плътността на тялото по време на еластичното му деформиране е пренебрежимо, $\rho \equiv \rho_0$ за всяка материална точка, и единственото неизвестно в системата на Ламе (25.9) е полето на преместването \mathbf{u} . Следователно тази система е затворена в смисъл, че за трите компоненти на \mathbf{u} разполагаме с три уравнения.

25.3. Обемн модул и модул на срязване. Да предположим, че тензорът на (малката) деформацията \mathbf{T}_e в изотропно тяло е сферичен, т. е.

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{3} \theta \mathbf{I}, \quad \theta = \text{tr } \mathbf{T}_e.$$

С други думи, разглеждаме чиста дилатация — равномерно обемно разширение (или свиване, в зависимост от знака на θ), вж. (15.30) (§ 15.6). От закона на Хук (25.6) тогава следва, че тензорът на напрежението \mathbf{T}_σ е също сферичен

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= p \mathbf{I}, \quad p = \text{tr } \mathbf{T}_\sigma, \\ p &= k\theta, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \end{aligned} \quad (25.10)$$

Тук p е хидростатичното налягане, което причинява дилатацията θ . Коэффициентът k на пропорционалност между p и θ се нарича *обемн модул* или *модул на обемното разширение*.

Нека сега \mathbf{T}_e е произволен, не обезателно сферичен тензор. Образоваме следите на двете страни на закона на Хук (25.6):

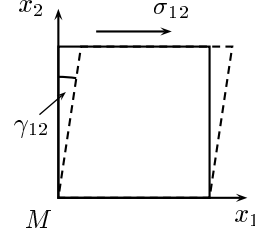
$$\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}_\sigma = k \text{tr } \mathbf{T}_e, \quad k = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (25.11)$$

²при съответните начални и гранични условия например зададени премествания или напрежения по границата на тялото

т. е. обемното разширение на изотропно тяло е винаги пропорционално на хидростатичното налягане $p = \frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}_\sigma$, с коефициентът на пропорционалност, равен на обемния модул k .

Да разгледаме сега друг характерен тип деформирано състояние в точка M от тялото — чисто срязване в равнината Mx_1x_2 . Тензорът на деформацията \mathbf{T}_e в този случай има компоненти

$$\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Фиг. 25.1. Чисто срязване в еластично тяло

Да напомним, че при такова деформиране квадрат със страни по осите Mx_1 и Mx_2 се „сплесква“, превръщайки се в ромб, като следствие от скосяването γ_{12} на правия ъгъл Mx_1x_2 , вж. фиг. 25.1. При това, да напомним, $\gamma_{12} = 2e_{12}$, вж. (15.23).

Тъй като в случая $\text{tr } \mathbf{T}_e = 0$, то от закона на Хук (25.6) следва

$$\mathbf{T}_\sigma = 2\mu\mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\gamma_{12}. \quad (25.12)$$

Следователно модулът на Ламе μ представлява коефициентът на пропорционалност между ъгъла на скосяването γ_{12} и срязващото напрежение σ_{12} . Поради тази причина μ се нарича *модул на срязване*. (В техническата литература той често се бележи с G .)

По-общо, да отделим в тензорите на деформация и напрежение съответните сферични и девиаторни части:

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{3}\theta\mathbf{I} + \mathbf{D}_e, \quad \theta = \text{tr } \mathbf{T}_e, \quad \text{tr } \mathbf{D}_e = 0,$$

$$\mathbf{T}_\sigma = p\mathbf{I} + \mathbf{D}_\sigma, \quad p = \frac{1}{3}\text{tr } \mathbf{T}_\sigma, \quad \text{tr } \mathbf{D}_\sigma = 0.$$

Съгласно закона на Хук (25.6), сферичните и девиаторните части на \mathbf{T}_ε и \mathbf{T}_σ са пропорционални:

$$p = k\theta, \quad \mathbf{D}_\sigma = 2\mu\mathbf{D}_e, \quad (25.13)$$

като коефициентите на пропорционалност са съответно обемният модул и удвоеният модул на срязване.

25.4. „Обръщане“ на закона на Хук. Да изразим сега тензора на деформацията \mathbf{T}_e чрез този на напрежението \mathbf{T}_σ за изотропно еластично тяло. Очевидно \mathbf{T}_e и \mathbf{T}_σ са свързани отново с линейна връзка

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{M} : \mathbf{T}_\sigma, \quad \mathbf{M} = \mathbf{H}^{-1}. \quad (25.14)$$

Четиривалентният тензор се нарича \mathbf{M} тензор на еластичната податливост или тензор на коравините. \mathbf{M} е обратен на тензора на еластичността \mathbf{H} (обратен, в смисъл на естественото в случая разглеждане на четиривалентните тензори като линейни преобразования в пространството от двувалентни тензори).

За изотропно тяло не само \mathbf{H} , но и \mathbf{M} трябва да е изотропен, т. е. обратният закон на Хук трябва да има същата структура както и (25.6):

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{M} : \mathbf{T}_\sigma = \alpha \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma + 2\beta \mathbf{T}_\sigma, \quad (25.15)$$

с коефициенти α и β , които трябва да изразим чрез тези на Ламе.

За тази цел да вземем първо следите от двете страни в (25.15)

$$\operatorname{tr} \mathbf{T}_e = (3\alpha + 2\beta) \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma. \quad (25.16)$$

Заместваме (25.15) и (25.16) в закона на Хук (25.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\sigma &= \lambda(3\alpha + 2\beta) \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma + 2\mu \left[\alpha \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma + 2\beta \mathbf{T}_\sigma \right] \\ &= \left\{ \lambda(3\alpha + 2\beta) + 2\mu\alpha \right\} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma + 4\mu\beta \mathbf{T}_\sigma. \end{aligned} \quad (25.17)$$

Последното равенство е в сила за всяко \mathbf{T}_σ . В частност, ако \mathbf{T}_σ е дивидатор, т. е. $\operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma = 0$, то

$$\mathbf{T}_\sigma = 4\mu\beta \mathbf{T}_\sigma, \quad \text{т. е.} \quad 4\mu\beta = 1, \quad 2\beta = \frac{1}{2\mu}. \quad (25.18)$$

Следователно

$$\left\{ \lambda(3\alpha + 2\beta) + 2\mu\alpha \right\} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma = 0$$

за всеки тензор $\mathbf{T}_\sigma \neq 0$, вж. (25.17). Това е възможно само ако множителят във фигурната скоба в последното равенство се анулира. Оттук

$$\alpha = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}. \quad (25.19)$$

Съотношенията (25.18) и (25.19) позволяват да намерим търсения обратен закон на Хук

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{T}_\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma \right). \quad (25.20)$$

Упражнение 25.1. „Обърнете“ закона на Хук, използвайки пропорционалността (25.13) на сферичните и девиаторните части на тензорите \mathbf{T}_e и \mathbf{T}_σ .

25.5. Коефициент на Поасон. Да разгледаме едноосен опън (по оста x_1) на цилиндричен образец, вж. фиг. 25.2. В декартовата система $x_1x_2x_3$ тензорът на напрежението \mathbf{T}_σ има компоненти

$$\|\sigma_{ij}\| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тъй като $\operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma = \sigma_{11}$, от (25.20) намираме компонентите на тензора на деформацията

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{11} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \right) = \frac{1}{E} \sigma_{11}, \\ e_{22} = e_{33} &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11}, \\ e_{12} = e_{23} = e_{31} &= 0. \end{aligned} \quad (25.21)$$

От първото съотношение на (25.21) можем да изразим модула на Юнг чрез коефициентите на Ламе

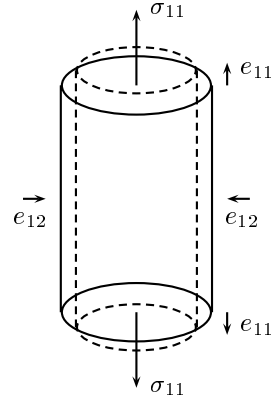
$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}. \quad (25.22)$$

От първото и второто съотношение (25.21) изключваме σ_{11} :

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} E e_{11}, \quad (25.23)$$

т. е.

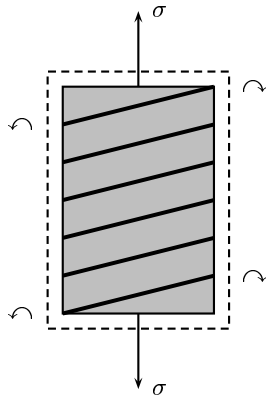
$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}. \quad (25.24)$$



Фиг. 25.2

Коефициентът ν , свързващ напречната деформация с надлъжната при едноосен опън, е една от най-важните характеристики на еластично тяло. Той се нарича *коефициент на Поасон*. От дефиницията му (25.24) и от (25.22), (25.23) следва, че

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (25.25)$$



Фиг. 25.3. Разтягане на армиран образец

Знакът „минус“ в дефиницията на ν е свързан с интуитивния факт, че болшинството (ако не и всички материали, с които се сблъскваме в практиката) при едноосен опън се свиват в напречна посока. Това обаче не е универсално свойство на телата. За анизотропни материали, армирани еднопосочно с много корави влакна, е лесно да се съобрази, че надлъжната деформация ще се съпровожда с напречно разширение в резултат на завъртането на влакната, вж. фиг. 25.3. Оказва се, че и за изотропни материали със специална вътрешна структура коефициентът на Поасон може да е отрицателен. Единственото ограничение върху ν следва от термодинамични съображения, които тук не се обсъждат:

$$-1 < \nu < 0,5. \quad (25.26)$$

Нещо повече, съществуват модели на макроскопично изотропни среди, чийто коефициент на Поасон е произволно близък до -1 .

Ще отбележим също, че за изотропно тяло ν е *единствената* безразмерна еластична константа. Всяка друга безразмерна характеристика на такова тяло се изразява чрез ν . В частност, отношението $\lambda/(3\lambda + 2\mu)$ в обратния закон на Хук (25.20) е базразмерно. С помощта на (25.25) виждаме, че то е равно на $\nu/(1 + \nu)$ и следователно законът (25.20) може да се напише и във вида

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{2\mu} \left(\mathbf{T}_\sigma - \frac{\nu}{1 + \nu} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}_\sigma \right). \quad (25.27)$$

За несвиваемо тяло коефициентът на Поасон е $\nu = 0,5$. За да покажем това вземаме цилиндричен образец с радиус $r_0 = 1$ и височина

$\ell_0 = 1$, вж. фиг. 25.3. Началният му обем е $V_0 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. След деформацията (навсякъде тук предположена малка) височината на цилиндъра е вече $1 + e_{11}$, а радиусът е $1 - \nu e_{11}$. Обемът на деформирания цилиндър тогава е

$$\begin{aligned} V &= \pi(1 - \nu e_{11})^2(1 + e_{11}) \\ &\approx \pi(1 - 2\nu e_{11})(1 + e_{11}) \approx \pi \left[1 + (1 - 2\nu)e_{11} \right], \end{aligned}$$

тъй като $|e_{11}| \ll 1$. Следователно обемната деформация на разглеждания цилиндър е

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{V - V_0}{V_0} = (1 - 2\nu)e_{11}. \quad (25.28)$$

За несвиваем материал $\theta = 0$, т. е. $\nu = 0,5$.

25.6. Уравнения на Белтрами-Митчел. Произволно тензорно поле не може да служи като поре на тензора на напреженията в линейно-еластично тяло. Това следва например от факта, че тензорът на (малката) деформация трябва да удовлетворява уравненията на съвместимост на Сен-Венан

$$\nabla \times \mathbf{T}_e \times \nabla = 0,$$

вж. (16.3). Заместването на (25.14) в последното равенство дава

$$\nabla \times (\mathbf{M} : \mathbf{T}_\sigma) \times \nabla = 0 \quad (25.29)$$

— това са именно *уравненията на Белтрами-Митчел*, които следва да се удовлетворяват от тензора на напреженията за еластично тяло с тензор на коравините \mathbf{M} .

За изотропно тяло уравненията на Белтрами-Митчел могат съществено да се опростят — в (25.29) внасяме обратния закон на Хук (25.27) и прилагаме израза за биротора от § 14. Съществува обаче по-прост извод, основан на уравненията на Ламе, в който уравненията на Сен-Венан изобщо не са необходими.

Ще се ограничим за простота със статичния случай при отсъствие на масови сили. Уравненията на Ламе (25.9) тогава имат вида

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (25.30)$$

Да вземем първо дивергенцията от двете страни на (25.30). В резултат намираме

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \theta = 0,$$

където, да напомним, $\theta = \text{tr } \mathbf{T}_e = \nabla \cdot \mathbf{u}$ е обемната деформация (дилатация) на точките от тялото. Следователно дилатацията при статично деформиране на линейно-еластично тяло (и при отсъствие на масови сили) е *хармонична функция*. За разглежданото изотропно тяло $\theta = \text{tr } \mathbf{T}_e$ е пропорционално на $\text{tr } \mathbf{T}_\sigma$, вж. (25.11) и поради това $\text{tr } \mathbf{T}_\sigma$ също е *хармонична функция*:

$$\Delta \text{tr } \mathbf{T}_\sigma = 0. \quad (25.31)$$

Да приложим оператора ∇ един път от ляво и един път от дясно към двете страни на (25.30) и да съберем резултатите

$$\mu \Delta (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) + 2(\lambda + \mu) \nabla \nabla \theta = 0.$$

Но по дефиниция $\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla = 2\mathbf{T}_e$, вж. (15.28), т. е.

$$2\mu \Delta \mathbf{T}_e + 2(\lambda + \mu) \nabla \nabla \theta = 0.$$

Внасяме в последното равенство израза за \mathbf{T}_e чрез \mathbf{T}_σ от обратния закон на Хук (25.27) и θ изразено чрез $\text{tr } \mathbf{T}_\sigma$, вж. (25.11):

$$\Delta \left(\mathbf{T}_\sigma - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{I} \text{tr } \mathbf{T}_\sigma \right) + \frac{2(\lambda + \mu)}{3k} \nabla \nabla \text{tr } \mathbf{T}_\sigma = 0.$$

Лапласианът на подчертания член се анулира, вж. (25.31), а

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{3k} = \frac{1}{1+\nu},$$

съгласно (25.10) и (25.25). Следователно

$$\Delta \mathbf{T}_\sigma + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \text{tr } \mathbf{T}_\sigma = 0 \quad (25.32)$$

— това е *уравнението на Белтрами-Митчел*, което трябва да се удовлетворява от тензора на напрежението при статично деформиране на изотропно линейно-еластично тяло (при отсъствие на масови сили).

Упражнение 25.2. Покажете, че тензорът на напрежението \mathbf{T}_σ при статично деформиране и отсъствие на масови сили в еластично тяло е бихармонична функция, т. е. решение на уравнението

$$\Delta \Delta \mathbf{T}_\sigma = 0.$$

§ 26. Задача на Ламе

26.1. Задача на Ламе за кръговоцилиндрична тръба. Разглеждаме куха кръговоцилиндрична тръба с радиуси a и b , неограничена по оста z , при отсъствие на външни сили. Върху вътрешната и външната стени са приложени съответно наляганията p_a и p_b , вж. фиг. 26.1 където е показано едно от напречните сечения на тръбата. Материалът на тръбата е линейно еластичен. Търсим напреженията и деформациите в тръбата.

„Геометрията“ на задачата прави естествено използването на цилиндрични координати $\{r, \varphi, z\}$. Задачата е осесиметрична — зависимост на търсените напрежения от φ няма. Няма и зависимост от координатата z предвид неограничеността на тръбата по оста z . Това подсказва да търсим полето на преместването във вида

$$\mathbf{u} = u_r(r)\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \nabla r \quad (26.1)$$

— под действието на вътрешното и външното налягане тръбата ще се разшири (или свие) *единствено* в радиално направление.

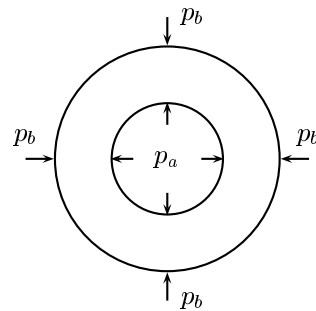
Тензорът на деформацията в случая ще има вида

$$\mathbf{T}_e = e_{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + e_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (26.2)$$

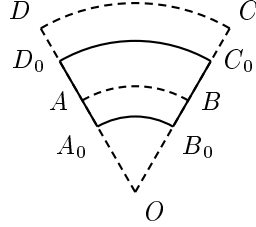
— интуитивно е ясно, че срязващи деформации в тръбата отсъстват. Да поясним: елементарният четириъгълник $A_0B_0C_0D_0$ в началното състояние се преобразува в четириъгълника $ABCD$ след деформацията на тръбата, вж. фиг. 26.2. Вижда се, че тези четириъгълници се различават единствено с размерите си, а правите ъгли в тях *не се скосяват*: например правият ъгъл $\angle B_0A_0D_0$ след деформацията се превръща в ъгъла $\angle BAD$, който също е прав.

Компонентите e_{rr} и $e_{\varphi\varphi}$ на тензора \mathbf{T}_e в случая се изразяват елементарно чрез полето $u_r(r)$ без да се налага привличането на символите на Кристофел. Именно, деформацията в радиалната посока r може да се разглежда като едномерна и затова

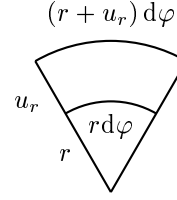
$$e_{rr} = u_r' \quad (26.3)$$



Фиг. 26.1



Фиг. 26.2



Фиг. 26.3

За пресмятане на $e_{\varphi\varphi}$ припомняме интерпретацията на диагоналните компоненти на тензора на деформацията (§ 15.4), вж. (15.20) — това е относителното удължение в резултат на деформацията на материалната нишка в направление на φ -координатната линия. В началното състояние $ds_{\varphi}^0 = r d\varphi$, а след деформирането тази дължина е вече $ds = (r + u_r) d\varphi$ поради преместването на точката M_0 в радиална посока с u_r , вж. фиг. 26.3. Следователно

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{(r + u_r) d\varphi - r d\varphi}{r d\varphi} = \frac{u_r}{r}. \quad (26.4)$$

За определяне на радиалното преместване използваме уравненията на Ламе (25.9):

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (26.5)$$

— задачата е статическа (зависимост от времето няма), няма и външни сили. За пресмятане на лапласиана $\Delta \mathbf{u}$ забелязваме, че полето \mathbf{u} , вж. (26.1), в случая е потенциално

$$\mathbf{u} = \nabla f(r), \quad f'(r) = u_r(r), \quad (26.6)$$

вж. пример 11.4. Следователно

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \Delta \nabla f = \nabla \Delta f, \quad \theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f, \\ \Delta f &= \frac{1}{r} (r f')' = \frac{1}{r} (r u_r)' = u_r' + \frac{u_r}{r}, \end{aligned} \quad (26.7)$$

където $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr } \mathbf{T}_e$ е обемното разширение на тръбата, вж. (15.30); използвахме и формулата (12.20) за лапласиана в полярни координати за ососиметрична функция. Уравнението на Ламе, с отчитането на (26.7), се опростява:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) \nabla \Delta f = 0.$$

Оттук

$$\Delta f = \frac{1}{r} (ru_r)' = 2A, \quad A = \text{const}. \quad (26.8)$$

Общото решение на това диференциално уравнение очевидно е

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}. \quad (26.9)$$

Интеграционните константи A и B ще определим от граничните условия на задачата — налягането върху вътрешната и външните стени на тръбата:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = -p_a, \quad \sigma_{rr} \Big|_{r=b} = -p_b. \quad (26.10)$$

С помощта на закона на Хук (25.6) и съотношенията (26.3) и (26.6) определяме радиалното напрежение:

$$\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu_{rr} = 2\lambda A + 2\mu u_r',$$

т. е.

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}, \quad (26.11)$$

след използването на (26.9).

Граничните условия (26.10), заедно с току що намерения израз (26.9) за радиалното напрежение, водят до системата

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{a^2} &= -p_a, \\ 2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{b^2} &= -p_b \end{aligned}$$

за определяне на интеграционните константи A и B . Решението на тази система е

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)}, \\ B &= \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{2\mu(b^2 - a^2)}. \end{aligned} \quad (26.12)$$

Формулите (26.1), (26.3), (26.4), и (26.12) определят преместванията и деформациите в тръбата в явен вид.

Упражнение 26.1. Намерете полето на преместването u_r при дадено външно налягане p_b , ако тръбата е плътна ($a = 0$).

$$\text{Отг.: } u_r = -\frac{p_b}{2(\lambda + \mu)} r.$$

26.2. Анализ на напрегнатото състояние в тръбата. Заместването на (26.12) в (26.11) позволява да определим явно радиалното напрежение в тръбата:

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (26.13)$$

По аналогичен начин с помощта на закона на Хук (25.6) намираме и напречните напрежения

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right), \quad (26.14)$$

а също и надлъжните

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} \quad (26.15)$$

Обърнете внимание, че макар и да няма надлъжна деформация ($u_z = e_{zz} = 0$) в тръбата се появяват надлъжни напрежения σ_{zz} единствено в резултат на налягането по двете стени $r = a$ и $r = b$. Този неочевиден факт е следствие от присъствието в закона на Хук на члена $\lambda\theta \mathbf{I}$, вж. (25.6). Напрежения σ_{zz} ще се анулират единствено в случая $\lambda = 0$, който съответства на среда с нулев коефициент на Поасон, $\nu = 0$, вж. (25.25) и (26.16).

Ако $p_a, p_b > 0$, то $\sigma_{rr} < 0$, т.е. радиалните напрежения са винаги натискови (както и трябва да се очаква). Знаците на останалите две напрежения, $\sigma_{\varphi\varphi}$ и σ_{zz} , зависят обаче от размерите на тръбата и от двете налягания p_a и p_b (по-точно от безразмерните отношения b/a и p_a/p_b).

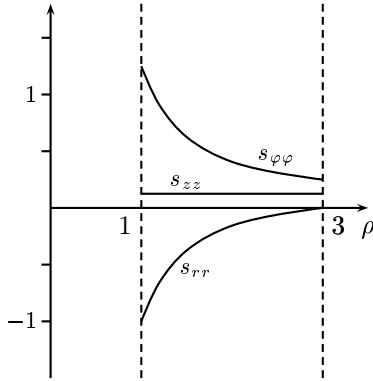
Да разгледаме за нагледност по-простия случай, когато външно налягане няма, $p_b = 0$. Тогава

$$\begin{aligned} s_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{p_a} = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \\ s_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{p_a} = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \\ s_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{p_a} = \frac{2\nu}{\beta^2 - 1}, \end{aligned} \quad (26.16)$$

където са въведени безразмерните напрежения $s_{rr}, s_{\varphi\varphi}, s_{zz}$, както и безразмерните дължини

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}; \quad \beta > 1, \quad \rho \in (1, \beta).$$

а ν е коефициентът на Поасон, вж. (25.25).



Фиг. 26.4

Разпределението на безразмерните напрежения s_{rr} , $s_{\varphi\varphi}$ и s_{zz} в радиалната посока на тръбата r са показани на фиг. 26.4 при стойности на параметрите $\beta = 3$ и $\nu = 0.5$.

От (26.16) се вижда, че напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}$ е винаги положително и достига максималната си стойност върху вътрешната стена на тръбата $r = a$. При това

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\max} = p_a \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}. \quad (26.17)$$

С „изтъняването“ на тръбата, когато $\beta = b/a \rightarrow 1$ при фиксирано a , напрежението $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ расте неограничено:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{\max} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} +\infty.$$

Това обяснява надлъжното „сцепване“ на тръбите при голямо вътрешно налягане (резултат например от мощен поток вода или пара) и недостатъчна дебелина — материалът не е в състояние да издържи напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$, появяват се пукнатини по посока на оста Oz , които и водят до споменатото разцепване (добре познато от всекидневния опит). Най-простата „рецепта“ за избягване на подобно разцепване е разбира се увеличаване на дебелината на тръбата. Това изисква обаче съществено увеличаване на нейната маса а освен това не е особено ефективно: както се вижда от (26.17) зависимостта на $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ от β се характеризира с бързо „насищане“ в смисъл, че $\sigma_{\varphi\varphi}^{\max}$ бързо се приближава до граничната си стойност p_a при ръста на β , така че по-нататъшното увеличаване на дебелината става безпредметно.

От израза (26.14) за напречното напрежение $\sigma_{\varphi\varphi}$ се вижда обаче, че то може да се намали чрез прилагане на налягане p_b върху външната стена. Това подсказва да „облечем“ тръбата с тънък външен слой $b < r < c$ като се опитаме да реализираме свиващи напрежения по границата $r = b$. Технологически това може да се реализира например по следния начин. Тънкостенна куха тръба с вътрешен радиус малко по-малък от b се нагрива, така че да се разшири достатъчно и в нея да влезе тръбата

с външен радиус b . След охлаждането получаваме двуслойна тръба в която действат необходимите ни свиващи напрежения при $r = b$. По-подробен анализ на деформираното и напрегнато състояние в такава тръба може да се намери в [Седов, т. 2, стр. 338].

26.3. Задача на Ламе за куха кълбо. Разглеждаме кухо кълбо съответно с вътрешен и външен радиуси a и b при отсъствие на външни сили. Във вътрешността е приложено налягането p_a , а от външната страна налягането p_b . Материалът на кълбото е линейно еластичен. Търсим напреженията и деформациите в него.

Поставената задача е очевидно сферически симетрическият аналог на задачата на Ламе за кухата тръба, разгледана по-горе. За решаването ѝ използваме сферически координати $\{r, \varphi, \theta\}$. Полето на преместването зависи само от радиалната координата, вж. (26.1), а тензорът на деформацията има вида

$$\mathbf{T}_e = e_{rr} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + e_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + e_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

където $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ е ортонормираният локален базис на сферическата система. Отсъствието на срязващи деформации тук може да се поясни по същия начин както и ососиметричния случай, вж. § 26.1 и фиг. 26.2. Аналогични са и изразите за компонентите на тензора \mathbf{T}_e :

$$e_{rr} = u_r', \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r},$$

вж. отново § 26.1 и фиг. 26.3.

Разсъжденията и пресмятанятията от § 26.1 се пренасят дословно и тук с единствената разлика, че трябва да използваме формулата (11.20) за лапласиана в сферични координати. На мястото на (26.8) тогава получаваме:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)' = 3A, \quad A = \text{const}.$$

Общото решение на това диференциално уравнение очевидно е

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2}. \quad (26.18)$$

Интеграционните константи A и B определяме от граничните условия (26.10) — вътрешното и външното налягане върху кълбото. Намирането на окончателните изрази за напреженията в кълбото оставяме на читателя в качеството на просто упражнение.

Упражнение 26.2. Намерете полето на преместването u_r при дадено външно налягане p_b , ако кълбото е плътно ($a = 0$).

$$\text{Отг.: } u_r = -\frac{p_b}{3\lambda + 2\mu} r.$$

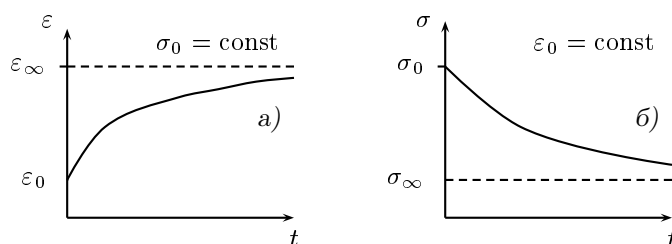
§ 27. Понятие за вискозо-еластични модели. Тела на Максвел, Фойхт и Келвин

27.1. Пълзене и релаксация. Експериментите, проведени през 19-ти век, показват, че редица тела притежават едновременно и еластични, и вискозни свойства. Такъв феномен е описан за пръв път от Вебер (1839), който решава да определи експериментално модула на Юнг на копринена нишка. За целта той използва най-простия и естествен начин — прилага опънна сила F_0 и решава да измери съответната деформация на нишката. В момента на прилагането на силата се появява мигновена деформация ε_0 , което е естествено за всяко еластично тяло. Тази деформация обаче не остава постоянна. За изумление на Вебер и съвременниците му нишката започва да „тече“, в смисъл че при същата опънна сила F_0 деформацията започва да расте с времето, приближавайки се асимптотично към стойност $\varepsilon_\infty > \varepsilon_0$, вж. фиг. 27.1 а). Изменението на деформацията при неизменно натоварване, което днес обикновено се нарича *пълзене*,³ е характерно за редица тела, така че копринената нишка се оказва *вискозо-еластична среда* — тяло, проявяващо едновременно и еластични, и вискозни свойства. Типичната зависимост $\varepsilon = \varepsilon(t)$ за такава среда при постоянна опънна сила F_0 , т.е. при постоянно опънно напрежение $\sigma_0 = \text{const}$, е показана на фиг. 27.1 а). Това е т. нар. *крива на пълзене*.

Родствено на пълзенето е и явлението *релаксация*. При него ни интересува напрежението σ , възникващо в опънат прът, чиято деформация ε_0 се поддържа постоянна. Ако тялото е еластично, то $\sigma \equiv \sigma_0 = E\varepsilon_0$. Ефектът на вискозо-еластичност тук се проявява в намаляването на напрежението с течение на времето, като типичната зависимост $\sigma = \sigma(t)$ (*крива на релаксация*) е показана на фиг. 27.1 б).

Причината за вискозо-еластичното поведение става ясна едва през първата половина на 20-ти век. Това е специфичният строеж на някои тела, преди всичко на полимерите, които са съставени от макромолекули. Последните представляват много дълги вериги от молекули, които в равновесното си състояние (т.е. оставени сами на себе си) се стремят да

³В българската литература се използва и терминът *крип* (от англ. „creep“ — пълзя).



Фиг. 27.1. Типични криви на пълзене (а) и на релаксация (б) за полимерни материали

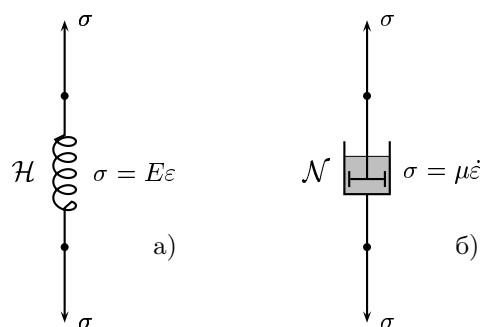
се свият в кълбо. При прилагане на разтягащо напрежение първо се появява еластична (мигновена) деформация ε_0 . След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, което обяснява пълзенето. Тъй като макромолекулите са много, в един момент те започват да си „пречат“ взаимно и затова деформацията постепенно затихва, като се стреми към една постоянна стойност ε_∞ . Това е т. нар. *дълготрайна* (или *равновесна*) деформация, която се реализира в образеца при $t \rightarrow \infty$, т. е. при продължително време на пълзене. В резултат се наблюдава типичната крива на пълзене на полимерните материали, показана на фиг. 27.1 а).

Аналогично е и качественото обяснение на типичната крива на релаксация на полимерите. В този случай фиксираната деформация ε_0 , приложена в момент $t = 0$, се съпровожда от появата на еластично (мигновено) напрежение σ_0 съгласно закона на Хук. След това макромолекулите започват постепенно да се „развиват“, при което напрежението намалява, като се стреми към една постоянна стойност σ_∞ . Това е т. нар. *дълготрайно* (или *равновесно*) напрежение, което се реализира в образеца при достатъчно голяма продължителност на релаксацията. В резултат се наблюдава типичната крива на релаксация на полимерните материали, показана на фиг. 27.1 б).

27.2. Базисни модели — „пружинка“ на Хук и „буталце“ на Нютон-Навие. Причината за наблюдаваните вискозо-еластични свойства на някои материали, например на споменатата копринена нишка⁴, през 19-ти век все още не е ясна. Поради това големите учени на епохата — Максвел, Фойхт, Келвин и др. — предлагат чисто механично описание на явлението като строят *механични* модели (верни на царувания тогава „механистичен“ дух). В основата са два базисни модела.

Първият от тях е *тялото на Хук* изобразявано като пружинка, вж.

⁴Копринената нишка е полимер от естествен произход.

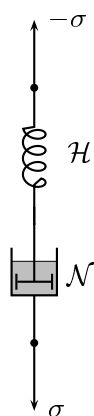


Фиг. 27.2. Най-прости модели: а) тяло на Хук;
б) вискозна течност на Навие

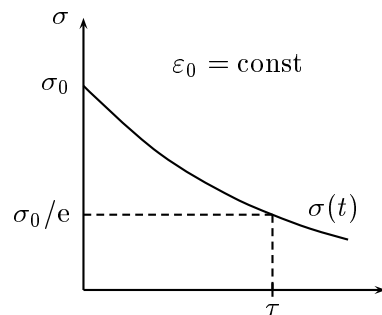
фиг. 27.2 а)). Законът на деформирането му е $\sigma = E\varepsilon$ — законът на Хук при едноосен опън. Вторият модел е *тялото на Навие* или *на Нютон* — то представлява бутало, което се движи в течност и моделира вискозното поведение, вж. фиг. 27.2 б)). Законът на деформирането му е $\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$ и това е очевиден едномерен аналог на закона на Навие-Стокс за вискозна течност. (По-късно впрочем се появява още един базисен елемент — т. нар. *тяло на Сен-Венан*, което моделира пластичното поведение. Тук то няма да се разглежда. Читателят може да намери едно по-подробно изложение на вискозоеластичните модели в книгите [9] или [16].

За построяване на по-сложни модели, проявяващи *едновременно* и еластични и вискозни свойства, двата базисни елемента се свързват или последователно, или успоредно. Последователното свързване се означава с ‘–’, а успоредното с ‘||’. Най-простите възможни комбинации, т. нар. тела на Максвел и на Фойхт, ще изследваме подробно съответно в §§ 27.3 и 27.4. В тези най-прости модели, както и в произволно усложнените чрез добавяне на все нови и нови пружинки и буталца, основната задача е да се конкретизира уравнението на състоянието на модела, т. е. връзката между напреженията и деформациите (и техните производни по времето, които, както ще видим, ще се появят по естествен начин).

Да отбележим, че уравненията на състоянието на деформируеми тела с по-сложно поведение (например вискозо-еластично) се наричат също и *реологични*. Тяхното изучаване в началото на 20-ти век се е концентрирало в *реологията* (от гръцкото „рео“ — тека, и „логос“ — знание) — най-общо казано, наука за деформацията и течението на телата. Първоначално реологията се е специализирала в изучаването на по-сложни



27.3. Модел на Максвел



27.4. Релаксация в тялото на Максвел

модели, съставени от базисните.⁵ Днес подобни модели не представляват практически интерес и се използват, както и в настоящата книга, само за илюстрация на вискозо-еластичното (и по-общо, на нееластичното) поведение на телата. Реологията като общотеоретична дисциплина е престанала да има самостоятелен интерес и се е превърнала в част от механиката на непрекъснатите (деформируемите) среди. В последната се строят, вече систематично и с привличане на основните принципи на термодинамиката, законите на деформирането и течението на телата (вж. например двутомната монография на Седов [12]).

При извода на уравнението на състоянието за конкретни модели се използват две основни правила:

- При последователно свързване *напрежението е едно и също* във всички елементи, а деформациите им се сумират;
- При успоредно свързване *деформацията е една и съща* във всички елементи, а напреженията се сумират.

Ще илюстрираме тези два принципа върху двата най-прости модела — на Максвел и на Фойхт.

27.3. Модел на Максвел. *Тялото на Максвел* представлява елемент на Хук, т. е. пружинка, свързана последователно с буталце — вискозен елемент на Навие:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} - \mathcal{N},$$

⁵„Рекордът“ в това отношение е моделът на тесто за хляб, построен явно през 30-те години на миналия век и включващ повече от 30 пружинки и буталца.

вж. фиг. 27.3. Нека σ_H , ε_H и σ_N , ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned}\sigma_H &= \sigma_N = \sigma, & \varepsilon_H + \varepsilon_N &= \varepsilon, \\ \sigma_H &= E \varepsilon_H, & \sigma_N &= \mu \dot{\varepsilon}_N,\end{aligned}\tag{27.1}$$

където E е модулът на Юнг на пружинката, а μ — вискозитетът на течността в буталцето.

За да изключим ε_H и ε_N от (27.1), диференцираме формулата за пълната деформация на модела:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N = \frac{\dot{\sigma}_H}{E} + \frac{\sigma_H}{\mu},\tag{27.2}$$

използвайки основните реологични съотношения за пружинката и буталцето. Но $\sigma_H = \sigma_N = \sigma$, вж. отново (27.1), и затова

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu},\tag{27.3}$$

което и представлява търсения реологичен закон за деформирането на тялото на Максвел.

Да разгледаме пълзенето и релаксацията в тялото на Максвел.

Прилагаме първо постоянното напрежение $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\sigma} = 0$ и от (27.3) имаме $\dot{\varepsilon} = \sigma/\mu$, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\sigma t}{\mu}.$$

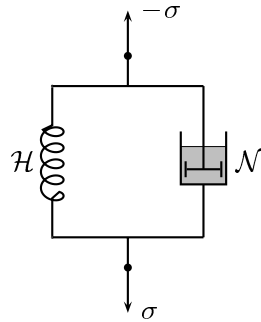
Това показва, че кривата на пълзенето на модела е линейна по времето (при постоянно σ „тече“ само вискозният елемент, вж. фиг. 27.2). По този начин при тялото на Максвел не се наблюдава характерната за полимерните материали крива на пълзене, вж. фиг. 27.1 а), притежаваща хоризонтална асимптота.

Да разгледаме сега релаксацията в тялото на Максвел. Нека $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Тогава $\dot{\varepsilon} = 0$ и от (27.3) следва

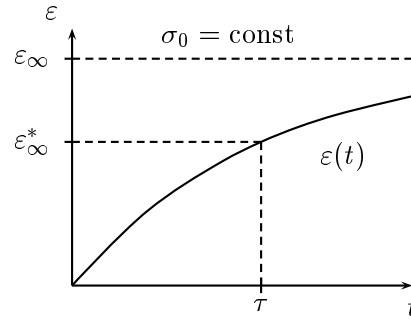
$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu} = 0, \quad \sigma \Big|_{t=0} = \sigma_0.\tag{27.4}$$

Решението на задачата на Коши (27.4) е

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\mu}{E},\tag{27.5}$$



27.5. Модел на Фойхт



27.6. Пълзене в тялото на Фойхт

т. е. напрежението релаксира по експоненциален закон, като $\sigma(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Константата τ в (27.5) има размерност време и се нарича *време на релаксация*. Интерпретацията ѝ е очевидна — тя характеризира скоростта на релаксация в тялото, в смисъл че за време τ напрежението намалява от началната си стойност σ_0 до $\sigma_0/e \approx \sigma_0/3$, т. е. приблизително три пъти, вж. фиг. 27.4.

27.4. Модел на Фойхт. *Тялото на Фойхт* представлява елемент на Хук — пружинка, свързана този път успоредно с буталце:

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} \parallel \mathcal{N},$$

вж. фиг. 27.5. Нека отново σ_H, ε_H и σ_N, ε_N са напреженията и деформациите съответно в пружинката и буталцето. Тогава

$$\begin{aligned} \varepsilon_H = \varepsilon_N = \varepsilon, \quad \sigma_H + \sigma_N = \sigma, \\ \sigma_H = E \varepsilon_H, \quad \sigma_N = \mu \dot{\varepsilon}_N. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Оттук веднага намираме

$$\sigma = E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon}, \quad (27.7)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Фойхт.

Да разгледаме, подобно на тялото на Максвел, пълзенето и релаксацията в модела на Фойхт.

При пълзене напрежението $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. Тогава, съгласно (27.7), функцията $\varepsilon(t)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$E \varepsilon + \mu \dot{\varepsilon} = \sigma_0, \quad (27.8)$$

чието решение е

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad \tau = \frac{\mu}{E}. \quad (27.9)$$

Уравнението (27.9) е решено при естественото начално условие

$$\varepsilon(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

(Да напомним, че деформацията при успоредното свързване е една и съща и в двата елемента; но деформацията във вискозния елемент при $t = 0$ е нулева. Този елемент не може да се деформира мигновено за разлика от еластичния; деформацията в него винаги се развива постепенно, започвайки от нулата.) Деформацията при пълзенето тук расте по експоненциален закон, като клони асимптотично към дълготрайната си стойност

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (27.10)$$

Забележете, че ε_∞ е деформацията на еластичния елемент под действието на напрежението σ_0 , ако буталцето изобщо отсъства. Това е естествено предвид (27.9): с течение на времето скоростта на деформацията намалява, $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$, напрежението във вискозния елемент $\sigma_N = \mu\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ и цялото напрежение се „поема“ от пружинката при $t \rightarrow \infty$, вж. фиг. 27.5.

Параметърът τ , дефиниран в (27.9), е характерното време за разглежданото тяло на Фойхт. То се нарича време на *ретардация* (закъснение). Интерпретацията му е следната. Както се вижда от (27.9), при прилагане на напрежението σ_0 деформацията се стреми асимптотично към дълготрайната си (равновесна) стойност $\varepsilon_\infty = \sigma_0/E$. В момента $t = \tau$

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \varepsilon_\infty \frac{e-1}{e} \approx \frac{2}{3}\varepsilon_\infty,$$

т. е. деформацията е приблизително $2/3$ от пълната деформация ε_∞ , вж. фиг. 27.6. Следователно τ характеризира „закъснението“, с което се натрупва пълната деформация вследствие на вискозо-еластичността на тялото.

27.5. Модел на Келвин (стандартно линейно тяло). Както видяхме, моделът на Максвел описва донякъде правдоподобно само релаксацията, а този на Фойхт — само пълзенето на материали от полимерен тип. За едно по-адекватно описание на поведението на такива материали и, в частност, за получаване на по-реалистични криви на

пълъзене и релаксация (от вида на показаните на фиг. 27.1) двата модела следва да се комбинират и усложнят.

Най-простата такава комбинация е т. нар. *тяло на Келвин* (известно още като *стандартно линейно тяло* или *тяло на Зинер*). Схематично, то се представя като

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{V} = \mathcal{H}_1 - (\mathcal{H}_2 \parallel \mathcal{N}), \quad (27.11)$$

както е изобразено на фиг. 27.7. (Пружинката \mathcal{H}_1 е свързана последователно с тялото на Фойхт \mathcal{V} .)

Да означим с ε_1 , σ_1 и ε_V , σ_V деформациите и напреженията съответно в пружинката \mathcal{H}_1 и тялото на Фойхт \mathcal{V} . Тогава

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_V, \quad \sigma = \sigma_1 = \sigma_V. \quad (27.12)$$

Освен това

$$\sigma_V = E_2 \varepsilon_V + \mu \dot{\varepsilon}_V,$$

вж. (27.7). От (27.12) намираме $\varepsilon_V = \varepsilon - \varepsilon_1$, което замества в последното съотношение, отчитайки, че $\sigma = \sigma_1 = \sigma_V$:

$$\sigma = E_2 \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \right) + \mu \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \right),$$

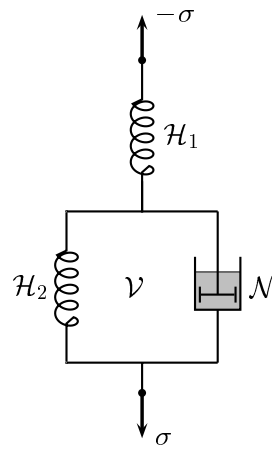
или

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \lambda \sigma &= E (\dot{\varepsilon} + \eta \varepsilon), \\ E = E_1, \quad \lambda &= \frac{E_1 + E_2}{\mu}, \quad \eta = \frac{E_2}{\mu}, \end{aligned} \quad (27.13)$$

което представлява закона за деформирането на тялото на Келвин.

27.6. Качествено изследване на тялото на Келвин. В заключение на този параграф ще изследваме качествено кривите на пълъзене и релаксация, съответстващи на модела на Келвин (27.13).

Да приложим постоянно напрежение σ_0 в момент $t = 0$ към това тяло. Тъй като напрежението се изменя скокообразно, то при $t = 0$ скоростите на изменение и на напрежението, $\dot{\sigma}$, и на деформацията, $\dot{\varepsilon}$, са



Фиг. 27.7. Модел на Келвин

много големи. Тогава σ и ε могат да се пренебрегнат съответно спрямо $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$, което съгласно (27.13) води до

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \sigma = E\varepsilon.$$

Това означава, че при много бързи процеси тялото на Келвин се държи като еластично с модул на Юнг, съвпадащ с този на пружинката \mathcal{H}_1 , т.е. $E = E_1$. Модулът E се нарича *мигновен* или *моментен модул на Юнг*. (При много бързо натоварване реагира само пружинката \mathcal{H}_1 , а тялото на Фойхт \mathcal{V} , предвид наличието на вискозен елемент в него, не може да реагира мигновено.)

В другия краен случай на много бавно деформиране $\dot{\sigma}$ и $\dot{\varepsilon}$ са съответно пренебрежимо малки спрямо σ и ε . Оттук

$$\sigma = E_\infty \varepsilon, \quad E_\infty = E \frac{\eta}{\lambda},$$

вж. (27.13). Това означава, че и в този случай тялото на Келвин се държи като еластично, но с модул на еластичност E_∞ , наречен *дълготраен* или *равновесен модул на Юнг*.

От дефиницията на E , η и λ , вж. (27.13), следва впрочем, че

$$E_\infty < E. \quad (27.14)$$

При пълзене, след прилагане на напрежението σ_0 в момента $t = 0$, тялото се държи като еластично с модул на Юнг, равен на моментния модул E . Деформацията му тогава е $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$. С течение на времето скоростта на деформация намалява (в „играта“ се включва и тялото на Фойхт с вискозния елемент в него), стремейки се към нула. При $t \rightarrow \infty$ тялото отново се превръща в еластично, но с модул на Юнг E_∞ . Съответната деформация е

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E_\infty} > \varepsilon_0$$

предвид (27.14). Следователно кривата на пълзене на тялото на Келвин има типичния за полимерните материали вид, показан на фиг. 27.1 а). Аналогични разсъждения, свързани с прилагането на постоянна деформация $\varepsilon_0 = \text{const}$ в момент $t = 0$, показват, че съответните криви на релаксация намаляват монотонно от стойността $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ при $t = 0$ до $\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon_0 < \sigma_0$ при $t \rightarrow \infty$. По този начин се вижда, че кривата на релаксация в случая има типичния вид за полимерите, показан на фиг. 27.1 б).

Конкретните функционални изрази на самите криви на пълзене и релаксация зависят от специфичния модел. За тялото на Келвин тези криви се изразяват чрез експоненциални функции. Подробното им изследване ще проведем в следващия параграф. На базата на това изследване ще се опитаме да отговорим, в частност, и на въпроса какви са реологичните уравнения на моделите, които включват все по-голям брой пружинки и буталца, в граничния случай, когато този брой клони към безкрайност.

§ 28. „Наследственост“ на телата. Принцип на суперпозицията на Болцман

28.1. Интегрална формулировка на закона на деформирането на стандартно линейно тяло. Да разгледаме по-подробно закона на деформирането на стандартното линейно тяло

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon), \quad (28.1)$$

вж. (27.13). Целта ни тук е да преобразуваме (28.1) в еквивалентен вид, в който обаче производните са заменени с подходящи интегрални оператори. Това ще позволи да илюстрираме и да изясним, върху примера на стандартното линейно тяло, най-характерната особеност на вискозо-еластичните модели и тела. Това е наличието на *наследственост* в тях: предисторията на напрежението (съответно на деформацията) определя деформацията (съответно напрежението) в даден момент от времето.

Да предположим, че ни е известна „историята“ на деформацията на образеца, т. е. функцията $\varepsilon = \varepsilon(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като естествено предполагаме, че $\varepsilon(-\infty) = 0$. От (28.1) следва уравнението

$$\dot{\sigma} + \lambda\sigma = f(t), \quad f(t) = E(\dot{\varepsilon} + \eta\varepsilon), \quad (28.2)$$

за „историята“ на напрежението $\sigma = \sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$; дясната страна $f(t)$ тук е известна функция, щом $\varepsilon(t)$ е зададено.

Уравнението (28.2) е линейно нехомогенно обикновено дифференциално уравнение. Общото решение на хомогенното уравнение е $Ce^{-\lambda t}$, $C = \text{const}$. Търсим частното решение на (28.2) по метода на неопределените множители на Лагранж, т. е. във вида

$$\sigma(t) = C(t)e^{-\lambda t}, \quad (28.3)$$

с неизвестна функция $C(t)$. Заместването на (28.3) в (28.2) води, след прости пресмятания, до следното уравнение за $C(t)$:

$$\dot{C} e^{-\lambda t} = f(t), \quad C(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) e^{\lambda \tau} d\tau + C_1.$$

Следователно общото решение на нехомогенното уравнение (28.2) е

$$\sigma(t) = C_1 e^{-\lambda t} + \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (28.4)$$

Тъй като $\sigma(t)$ трябва да остава ограничено за всички t , в частност и при $t \rightarrow -\infty$, то $C_1 = 0$. Заместваме сега израза за $f(t)$, вж. (28.2), в дясната страна на (28.4) и интегрираме първото събираемо по части:

$$\int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) \Big|_{-\infty}^t - \lambda \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Оттук

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) - (\lambda - \eta) \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \right) \quad (28.5)$$

(използвахме, че по предположение $\varepsilon(-\infty) = 0$). В символичен вид (28.5) се записва като

$$\sigma = E (\mathbf{1} - (\lambda - \eta) \mathcal{E}_\lambda) \varepsilon. \quad (28.6)$$

Тук с $\mathbf{1}$ е означен единичният (тъждествен) оператор в пространството от функции $\varepsilon(t)$, т. е. операторът, който съпоставя на всяка функция $\varepsilon(t)$, дефинирана върху реалната ос \mathcal{R} , същата функция $\varepsilon(t)$. На свой ред, \mathcal{E}_λ е интегрален оператор в споменатото пространство, който преобразува функцията $\varepsilon(t)$ по следния закон:

$$\mathcal{E}_\lambda [\varepsilon] (t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R}. \quad (28.7)$$

Да отбележим, че \mathcal{E}_λ е частен случай на т. нар. *интегрален оператор на Волтера*

$$\mathcal{K} [\varepsilon] (t) = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in \mathcal{R}, \quad (28.8)$$

при специален (експоненциален) избор на ядрото $K(t) = e^{-\lambda t}$.

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато е зададена „историята“ на напрежението, т. е. функцията $\sigma(t)$, $t \in \mathcal{R}$, като $\sigma(-\infty) = 0$.

Тогава (28.2) е линейно нехомогенно обикновено диференциално уравнение спрямо функцията $\varepsilon(t)$. Вместо (28.5) сега намираме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) - (\eta - \lambda) \int_{-\infty}^t e^{-\eta(t-\tau)} \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (28.9)$$

или, използвайки означението (28.7),

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta) \sigma. \quad (28.10)$$

Забелязваме попятно, че операторите, участващи в (28.6) и (28.10), са взаимно-обратни:

$$\left[E (\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda) \right]^{-1} = \frac{1}{E} \left[\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta \right],$$

т. е.

$$\left[\mathbf{1} - (\lambda - \eta)\mathcal{E}_\lambda \right] \left[\mathbf{1} - (\eta - \lambda)\mathcal{E}_\eta \right] = \mathbf{1}.$$

Оттук следва простата и любопитна формула за умножение на два волтерови оператора с експоненциални ядра:

$$\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\eta = \frac{\mathcal{E}_\lambda - \mathcal{E}_\eta}{\eta - \lambda}. \quad (28.11)$$

Да поясним, че под произведение на два оператора разбираме тяхната суперпозиция:

$$(\mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_\eta) [\sigma] (t) = \mathcal{E}_\lambda [\varepsilon] (t), \quad \varepsilon(t) = \mathcal{E}_\eta [\sigma] (t).$$

28.2. „Наследственост“ на телата. Законът за деформиране на стандартното линейно тяло в интегралния му вид (28.5) (или (28.9)) е еквивалентен на диференциалния запис (28.1). Интегралният вид е обаче много по-удобен за изясняване на спецификата на механичното поведение на разглежданите материали.

Да представим (28.5) във вида

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma^e(t) + \sigma^h(t), \\ \sigma^e(t) &= E \varepsilon(t), \quad \sigma^h(t) = -E(\lambda - \eta) \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (28.12)$$

Тук очевидно $\sigma^e(t)$ е напрежението, което би се появило в тялото в момент t в резултат на деформацията $\varepsilon(t)$, ако то беше идеално еластично.

Вторият член, $\sigma^h(t)$, е резултат на вискозо-еластичните ефекти. Интегралната форма на този член показва, че съответното напрежение $\sigma^h(t)$ зависи не само от деформацията в същия момент от време, но и от цялата ѝ „предистория“ $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. В това именно се състои и ефектът на *наследственост* на разглежданите тела: деформацията $\varepsilon(\tau)$, приложена в интервала $(\tau, \tau + d\tau)$, влияе върху стойността на напрежението във *всички* бъдещи моменти от време. Това влияние, съгласно (28.12), поражда в момента t напрежение

$$-E(\lambda - \eta)e^{-\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau) d\tau, \quad (28.13)$$

което очевидно е пропорционално на големината на деформацията $\varepsilon(\tau)$ и на дължината $d\tau$ на интервала, в който тя действа. Коефициентът на пропорционалност (т. нар. *функция на влияние*) зависи от $t - \tau$ (интервала от време между момента τ на приложената деформация и момента t , в който отчитаме влиянието ѝ). Ясно е, че това влияние трябва да затихва при $t - \tau \rightarrow \infty$. За стандартното линейно тяло, както се вижда от (28.13), затихването е експоненциално.

28.3. Принцип на суперпозицията на Болцман. Обобщението на казаното в § 28.2 е очевидно. Нека $\sigma(t)$ е напрежението в момент t , възникнало в тялото в резултат на зададена „предистория“ на деформацията $\varepsilon(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$. Тогава отново

$$\sigma(t) = \sigma^e(t) + \sigma^h(t), \quad (28.14)$$

където $\sigma^e(t) = E\varepsilon(t)$ е чисто еластичното напрежение вследствие на деформацията в същия момент от време t .

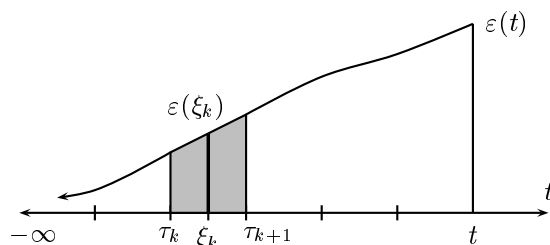
Следвайки Болцман, да разбием $(-\infty, t)$ на части с помощта на точките τ_k :

$$-\infty < \dots < \tau_{k-1} < \tau_k < \tau_{k+1} < \dots < t,$$

и да представим предисторията $\varepsilon(\tau)$ като суперпозиция на отделни части (импулси), действащи във всеки един от интервалите (τ_k, τ_{k+1}) :

$$\varepsilon(\tau) = \sum_k \varepsilon^{(k)}(\tau), \quad \varepsilon^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \varepsilon(\tau), & \tau \in (\tau_k, \tau_{k+1}), \\ 0, & \tau \notin (\tau_k, \tau_{k+1}). \end{cases}$$

Един от тези импулси е заштрихован на фиг. 28.1. Функцията $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ ще предизвика в бъдещия момент от време t напрежение $\Delta\sigma^{(k)}$, пропорционално на дължината $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ на интервала на действието си и



Фиг. 28.1. Принцип на суперпозицията на Болцман

на големината $\varepsilon(\xi_k)$ на деформацията в средната точка ξ_k на интервала (τ_k, τ_{k+1}) :

$$\Delta\sigma^{(k)} \approx EK(t - \xi_k) \varepsilon(\xi_k) \Delta\tau_k, \quad (28.15)$$

с точност до малки от по-висок ред спрямо $\Delta\tau_k$.

Напрежението в момент t , породено от всички предишни импулси $\varepsilon^{(k)}(\tau)$ на деформацията, ще се представи като сума от съответните напрежения (28.15):

$$\sigma^h(t) \approx E \sum_k K(t - \xi_k) \varepsilon(\xi_k) \Delta\tau_k. \quad (28.16)$$

В това именно се състои принципът на *суперпозицията на Болцман*. Подчертаваме специално, че сумирането на ефектите от различните импулси в (28.16) е съществено и нетривиално предположение, свързано с характера на деформирането на тялото, а не е универсално свойство. По ред причини, обусловени от спецификата на деформацията на конкретните материали, принципът на Болцман е в сила за полимери, ако напреженията не са много големи (не превишават, да речем, половината от стойността на разрушаващите). За метали принципът на суперпозицията се оказва неприложим.

Дясната страна на (28.16) очевидно е риманова сума на един определен интеграл — при $\Delta\tau_k \rightarrow 0$ тя се стреми към

$$E \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Следователно законът за деформирането на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозиция на Болцман, има вида

$$\sigma(t) = E \left(\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (28.17)$$

Такова тяло се нарича *линейно наследствено*.

Аналогични са разсъжденията и в случая, когато представим деформацията в момент t във вида

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^h(t),$$

срв. (28.14). Тук $\varepsilon^e(t) = \sigma(t)/E$ е чисто еластичната деформация, причинена от напрежението $\sigma(t)$, действащо в същия момент от време t ; $\varepsilon^h(t)$ е „наследство“ от предисторията $\sigma(\tau)$, $\tau \in (-\infty, t)$, на напрежението. Като приложим отново принципа на суперпозицията на Болцман, стигаме до аналогично на (28.17) интегрално представяне на деформацията:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right), \quad (28.18)$$

но с друго ядро $\Gamma(t)$.

Забелязваме, че интегралните оператори в (28.17) и (28.18) са волтерови. Като ползваме означението за последните, въведено в (28.8), записваме закона за деформиране на наследственото тяло, подчиняващо се на принципа на Болцман, във вида

$$\sigma = E(1 + \mathcal{K})\varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{E}(1 + \mathcal{G})\sigma. \quad (28.19)$$

В частния случай на експоненциални ядра

$$K(t) = -(\lambda - \eta)e^{-\lambda t}, \quad \Gamma(t) = -(\eta - \lambda)e^{-\eta t} \quad (28.20)$$

и съотношенията (28.19) възпроизвеждат вече познатите закони за деформирането (28.5) и (28.9) на стандартното линейно тяло.

28.4. Криви на релаксация и пълзене. Да предположим, че

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (28.21)$$

Тук $H(t)$ е т. нар. *функция на Хевисайд* или *стъпаловидната функция*. Заместването на (28.21) в (28.17) ни дава закона за релаксация на напрежението в разглежданото тяло:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \left(1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0. \quad (28.22)$$

Формулата (28.22) показва, че ако е известна функцията на релаксация, например експериментално, $K(t)$ се намира веднага чрез диференциране. Поради това функцията $K(t)$ в закона (28.17) се нарича *ядро на релаксация* на модела.

Да предположим, аналогично на (28.21), че

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t).$$

От (28.18) тогава определяме кривата на пълзене на модела:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 + \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0; \quad (28.23)$$

поради това $\Gamma(t)$ се нарича *ядро на пълзене*.

С помощта на (28.20), от (28.22) и (28.23) намираме, след елементарно интегриране, функциите на релаксация и пълзене за стандартното линейно тяло:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left[1 - \frac{\lambda - \eta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right], \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0, \quad t \geq 0, \quad (28.24)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\lambda - \eta}{\lambda} (1 - e^{-\eta t}) \right], \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}, \quad t \geq 0. \quad (28.25)$$

Тъй като $\lambda > \eta$, вж. (27.13), напрежението $\sigma(t)$ съгласно (28.24) релаксира от моментната си стойност σ_0 (при $t = 0$) до „дълготрайната“ си стойност

$$\sigma_\infty = \sigma_0 \frac{\eta}{\lambda} = E_\infty \varepsilon_0$$

(при $t = \infty$) по експоненциален закон, вж. (28.24).

При пълзене деформацията се изменя от моментната си стойност $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ (при $t = 0$) до „дълготрайната“

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon_0 \frac{\lambda}{\eta} = \frac{\sigma_0}{E_\infty}$$

(при $t = \infty$) също по експоненциален закон.

След всичко казано дотук вече сме в състояние да отговорим на въпроса, поставен в края на § 18.6: какво е реологичното поведение на моделите, построени с помощта на N' пружинки и N'' буталца, когато $N', N'' \rightarrow \infty$? Ако N', N'' са крайни, кривите на пълзене представляват линейни комбинации на краен брой експоненциални функции с различни константи λ_k и η_k (т. е. с различни времена на релаксация и ретардация). От (28.22) и (28.23) тогава следва, че и ядрата $K(t)$ и $\Gamma(t)$ са линейни комбинации на същите експоненциални функции:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{N_1} a_k e^{-\lambda_k t}, \quad \Gamma(t) = \sum_{k=1}^{N_2} b_k e^{-\eta_k t},$$

при това N_1 и N_2 се определят чрез N' и N'' (точната зависимост няма значение предвид качествения характер на разсъжденията). Когато N' , $N'' \rightarrow \infty$, функциите $K(t)$ и $\Gamma(t)$ се превръщат в произволни, а моделът от пружинки и буталца на свой ред се превръща в наследствения интегрален модел (28.17) (или, еквивалентно, (28.18)) за деформиране на тяло, подчиняващо се на принципа на суперпозицията на Болцман.

Препоръчителна литература към курса:

1. А. А. Вакуленко, Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике, Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1972.
2. Н. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления в механике, Изд. 9-ое, Наука, Москва, 1965.
3. К. З. Марков. Математическо моделиране. Унив. издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2002, 234 стр.
4. Л. И. Седов, Механика сплошных сред, т. 1 и 2, Наука, Москва, 1970.
5. D. S. Chandrasekharaiyah, L. Debnath, Continuum Mechanics, Academic Press, Boston – Toronto; Prism Books, Bangalore, 1994.
6. A. J. M. Spencer, Continuum Mechanics, Longman, London and New York, 1980.
7. L. E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall, 1969.
8. M. Reiner, Rheology, In: Encyclopedia of Physics, D. Flügge, ed., vol. VI, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, pp. 434 – 550.

These lectures' URL:

<http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/contmech/kmarkov/mns/konspekt-MNS02.html>