Глава 4

ОБЩИ ТЕОРЕМИ НА МЕХАНИКАТА НА НЕПРЕКЪСНАТИТЕ СРЕДИ

§ 18. Уравнение на непрекъснатостта

18.1. Диференциране на интеграл по променлив обем. Нека $\mathcal{V}$ е материален обем, т. е. област, съставена от материални частици. Спрямо лагранжевите координати X_k този обем ще остава неизменен по време на движението на средата, тъй като координатите X_k на частиците не се променят. Спрямо ойлеровата координатна система x_i обаче обемът ще е променлив, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$.

Да разгледаме функцията

$$\varPhi(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i, t)\, \mathrm{d}V \tag{18.1}$$

и за пресметнем скоростта ѝ на изменение във времето. Обръщаме внимание на специфичността на функцията $\varPhi(t)$ — това е интеграл по променлив обем, чиято подинтегрална функция също зависи от времето.

Нека областта $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ за интервала от време $t, t + \triangle t)$ се е променила с $\triangle\mathcal{V}$, така че

$$\mathcal{V}(t + \triangle t) = \mathcal{V}(t) \cup \triangle\mathcal{V}\,.$$

Пресмятаме производната на функцията $\varPhi(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varPhi(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}\Bigg[\int_{\mathcal{V}\cup\triangle\mathcal{V}} f(x_i, t + \triangle t)\, \mathrm{d}V \\ + \int_{\mathcal{V}} f(x_i, t)\, \mathrm{d}V\Bigg] = \varPsi_1(t) + \varPsi_2(t)\,,\end{aligned} \tag{18.2}$$

където

$$\Psi_1(t) = \int_{\mathcal{V}} \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(x_i, t + \triangle t) - f(x_i, t)}{\triangle t} \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.3}$$

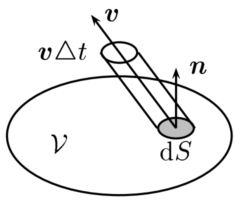
$$\Psi_2(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{\triangle \mathcal{V}} f(x_i, t) \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.4}$$

а $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$. (Граничният преход внесохме под знака на интеграла в (18.3), отчитайки, че интеграционната област $\mathcal{V}$ в този случай е неизменна.)

Подинтегралната функция в дясната страна на (18.3) е локалната производна $\partial f / \partial t$ (забележете, че пространствените координати x_i остават неизменни при пресмятането на диференчното частно спрямо времето):

$$\Psi_1(t) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial f(x_i, t)}{\partial t} \, \mathrm{d}V \,. \tag{18.5}$$

За пресмятане на функцията $\Psi_2(t)$ в (18.4) е необходимо да пресметнем изменението $\triangle \mathcal{V}$ на областта $\mathcal{V}$ за време $\triangle t$. Това изменение е резултат от движението на точките от повърхнината $\mathcal{S}$ на обема $\mathcal{V}$. Разбиваме $\mathcal{S}$ на инфинитезимални части и разглеждаме една от тях чийто координати в момент t са x_i. Нека нейното лице е $\mathrm{d}S$, а единичният вектор на външната ѝ нормала е $\boldsymbol{n}$. За малък промеждутък от време $\triangle t$ тази част ще се премести с $\boldsymbol{v} \triangle t$, където $\boldsymbol{v}$ е съответният вектор на скоростта, и ще „замете“ след себе си наклонен цилиндър с основа $\mathrm{d}S$ и височина $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \triangle t$, вж. фиг. 18.1. Обемът на този цилиндър е



Фиг. 18.1

$$\mathrm{d}V = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \triangle t \, \mathrm{d}S \,.$$

Интегралът в дясната страна на (18.4) ще пресметнем, като умножим така намереното $\mathrm{d}V$ с $f(x_i, t)$ (стойността на функцията f върху разглежданото парче $\mathrm{d}S$) и „сумираме“ по всички парчета:

$$\int_{\mathcal{S}} f(x_i, t) \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, \triangle t \,.$$

Оттук

$$\Psi_2(t) = \int_{\mathcal{S}} f(x_i, t) \, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(f(x_i, t) \boldsymbol{v} \right) \, \mathrm{d}V \,, \tag{18.6}$$

прилагайки формулата на Гаус (11.41). Остава да заместим (18.5) и (18.6) в (18.2) за да намерим търсената формула за диференциране на интеграла по променлив обем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i,t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V\,. \tag{18.7}$$

Преобразуваме формулата (18.7) в еквивалентна форма, която в някои случаи е по-удобна. За целта забелязваме[1], че

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = f\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f\,,$$

което заместваме в подинтегралния израз на (18.7):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = \underline{\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f} + f\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,.$$

Подчертаният член е пълната производна $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ на функцията f, вж. (14.18). Това позволява да напишем (18.7) в еквивалентната форма

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}(t)} f(x_i,t)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + f\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right]\mathrm{d}V\,. \tag{18.8}$$

18.2. Уравнение на непрекъснатостта. Нека отново $\mathcal{V}$ е материален обем. Масата на този обем е

$$M = \int_{\mathcal{V}}\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}}\rho\,\mathrm{d}V\,, \tag{18.9}$$

където ρ е плътността на средата. По време на движение $\mathcal{V}$ изменя формата си (спрямо неподвижната координатна система x_i), но количеството маса в него остава неизменно:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}}\rho\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{18.10}$$

Формулата (18.10) изразява *закона за запазването на масата* на материалния обем.

[1]За проверка използваме декартови координати:

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{v}) = (fv_i)_{,i} = fv_{i,i} + v_i f_{,i} \quad \left(\textstyle\sum_i\right)\,.$$

Да приложим към дясната страна на (18.10) правилото (18.7) за диференциране на интеграл по променлив обем:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V = 0 \,. \tag{18.11}$$

Тъй като (18.11) е в сила за произволен материален обем, то свивайки този обем в точка, намираме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \,. \tag{18.12}$$

Уравнението (18.12) се нарича *уравнение на непрекъснатостта.* Това е локалната формулировка на закона за запазването на масата на материалния обем.

Уравнението (18.12) може да се запише и в еквивалентната форма

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \,, \tag{18.13}$$

вж. (18.8).

18.3. Несвиваеми среди. Ако големината на произволен материален обем $\mathcal{V}$ не се мени по време на движението[2], то средата се нарича *несвиваема.*

Тъй като масата на материалния обем е винаги неизменна (§ 18.2), то плътността на несвиваемата среда е постоянна във всяка материална частица:

$$\rho = \rho(X_k, t) \equiv \mathrm{const} \quad \text{при фиксирани } \mathrm{X_k} \,.$$

(Но тази постоянна, забележете, може да бъде различна в различните частици!) Оттук

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \,. \tag{18.14}$$

Заместено в уравнението на непрекъснатостта (18.13), последното равенство показва, че

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \,, \tag{18.15}$$

т. е. полето на скоростта в несвиваема среда е винаги соленоидално.

В ойлерови координати условието за несвиваемост (18.14) има вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0 \,. \tag{18.16}$$

[2] Да поясним: формата на обема може да се мени по произволен начин, но мярката му — големината на обема — трябва да остава неизменна.

вж. (14.18). Обръщаме внимание, че локалната производна $\partial\rho/\partial t$ тук *не се анулира*, макар че средата е несвиваема. Причината е че при нейното пресмятане сравняваме плътностите на *различните* материални частици, които преминават през фиксирана пространствена точка в моментите от време t и $t + \mathrm{d}t$. А тези частици, както вече подчертахме, имат различна плътност в общия случай.

§ 19. Динамични аксиоми на Ойлер. „Теорема" за количеството движение

19.1. Теорема за количеството движение на механична система. Разглеждаме механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \dots, N$. Върху всяка точка действа сила $\boldsymbol{F}_k$, която представяме във вида

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}\,, \quad k = 1, \dots, N\,. \tag{19.1}$$

Тук $\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}$ е равнодействащата на *вътрешните* сили, т. е. на силите, действащи върху k-тата точка в резултат от взаимодействието ѝ с останалите точки от системата. На свой ред $\boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}}$ е резултат от действието на *външните* сили, които се появяват от взаимодействието на M_k с обекти, външни спрямо системата (т. е. не включени в състава ѝ).

Да забележим веднага, че множеството от вътрешните сили се разпада на двойки равни и срещуположно насочени сили с общи директриси, определени от отсечките $\overrightarrow{M_iM_j}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Това е очевидно следствие на третия закон на Нютон (закона за действието и противодействието).

Записваме втория закон на Нютон за всяка една от точките M_k

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}\,, \quad k = 1, \dots, N\,, \tag{19.2}$$

и сумираме спрямо k

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{v}_k\right) = \boldsymbol{F}^{\,\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}^{\,\mathrm{int}}\,, \tag{19.3}$$

където

$$\boldsymbol{F}^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}}\,, \quad \boldsymbol{F}^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}$$

са главните вектори съответно на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата. Но $\boldsymbol{F}^{\,\mathrm{int}} = 0$ съгласно направената по-горе забележка за характера на вътрешните сили. Ако въведем т. нар. *количество на движението* (или *импулс*) на системата

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k \,, \tag{19.4}$$

то (19.3) може да се напише във вида

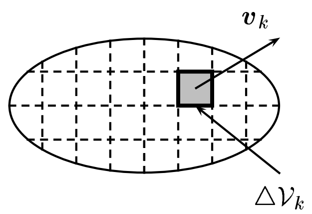
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{\,\mathrm{ext}} \,. \tag{19.5}$$

Равенството (19.5) изразява една от основните теореми на аналитичната механика, а именно:

Теорема 19.1 (за количеството движение). *Скоростта на изменението на количеството движение на система е равно на главния вектор на външните сили, действащи върху точките от системата.*

19.2. Количество на движение на абсолютно твърдо тяло. Да припомним начина по който се въвежда понятието количество на движението на абсолютно твърдо тяло в аналитичната механика.

Разглеждаме абсолютно твърдо тяло $\mathcal{V}$, вж. фиг. 19.1. Разбиваме областта $\mathcal{V}$ на (взаимно непресичащи се) части $\triangle\mathcal{V}_k$, всяка една от тях с маса Δm_k. Масовият център на частта $\triangle\mathcal{V}_k$ се движи със скорост $\boldsymbol{v}_k$. Разглеждаме всяка част като материална точка и въвеждаме приближено количеството на движението на тялото $\mathcal{V}$ като сумата



Фиг. 19.1

$$\boldsymbol{Q} \approx \sum_{k} \boldsymbol{v}_k \, \triangle m_k \,. \tag{19.6}$$

Естествено е сега да извършим граничния преход, при който разбиването на обема става все „по-фино“, т. е. диаметърът на частите $\Delta\mathcal{V}_k$ се стреми към нула. Но (19.6) е очевидно риманова сума и при указания граничен преход тя се стреми към (тройния) интеграл

$$\boldsymbol{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}m \,, \tag{19.7}$$

който именно се приема в аналитичната механика за дефиниция на понятието количество на движението на абсолютно твърдото тяло $\mathcal{V}$.

19.3. Аксиома на Ойлер за количеството движение на материален обем. Поради качествения характер на разсъжденията, довели ни до дефиницията (19.7) на количеството движение на абсолютно твърдо тяло, равенството (19.5) не може да се третира вече като теорема, т. е. като математически строго твърдение, произтичащо от втория закон на Нютон. Това равенство се използва от Ойлер като една от изходните точки при построяване на динамиката на твърдо тяло, но вече като аксиома, *независима* от нютоновите закони. (Това обяснява защо наименованието „теорема“ в заглавието на този параграф е поставено в кавички.)

Аналогичен е подходът на Ойлер и при изучаване на движението на непрекъсната среда. В този случай равенството (19.5) отново не може да се третира като строго следствие на втория закон на Нютон. Нещо повече, за непрекъснатата среда и обемът $\mathcal{V}$ не може да е произволен, имайки предвид, че той се движи и деформира заедно със средата. Естественото предположение се състои в това, че обемът $\mathcal{V}$ е материален, т. е. той е съставен от едни и същи материални частици, вж. § 18.1. За такъв обем Ойлер постулира валидността на следното основно за механиката на непрекъснатите среди твърдение:

Първа аксиома на Ойлер (за количеството движение на материален обем). *Нека $\mathcal{V}$ е произволен материален обем на непрекъсната среда. Тогава*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}\,, \tag{19.8}$$

където $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материалната производна, а $\boldsymbol{F}^{\mathrm{ext}}$ е главният вектор на външните сили, действащи върху обема $\mathcal{V}$.

19.4. Уравнение на движението на непрекъсната среда. Основно следствие на първата ойлерова аксиома е уравнението на движението на непрекъснатата среда.

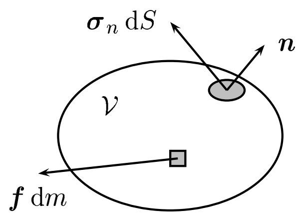
Да отделим мислено материалния обем $\mathcal{V}$ от средата. Върху този обем действат масовите сили с плътност $\boldsymbol{f}$, т. е. върху инфинитезималния обем с маса $\mathrm{d}m$ е приложена силата $\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m$, вж. фиг. 19.2. В резултат от отделянето на обема $\mathcal{V}$ от средата, по границата му $\mathcal{S}$ се появяват и силите на вътрешните напрежения — върху всяка елементарна площадка с лице $\mathrm{d}S$ и с единичен вектор на външната нормала $\boldsymbol{n}$, действа повърхнинната сила $\boldsymbol{\sigma}_n\mathrm{d}S$, вж. отново фиг. 19.2 и § 7.1. Следователно главният вектор на външните сили, приложени към материалния обем $\mathcal{V}$, е

$$\boldsymbol{F}^{\text{ext}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\, \mathrm{d}S$$

и ойлеровата аксиома (19.8) се свежда до равенството

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\, \mathrm{d}S\,, \tag{19.9}$$

което, да подчертаем, е в сила за *произволен* материален обем $\mathcal{V}$.



Фиг. 19.2

За превръщането на втория интеграл в дясната страна на (19.9) от повърхнинен в обемен използваме първо формулата на Коши (7.9), а след това тази на Гаус (11.41)

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\, \mathrm{d}V\,. \tag{19.10}$$

На свой ред интегралът в лявата страна на (19.9) се преобразува в обемен с помощта на правилото (18.8) за диференциране на интеграл по променлив обем:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\mathrm{d}(\rho\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} + \rho\boldsymbol{v}\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} \left(\rho\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\left[\underline{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}}\right]\right) \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{a}\, \mathrm{d}V\,, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{19.11}$$

— подчертаният член в квадратните скоби се анулира вследствие на уравнението на непрекъснатостта (18.12). В последния ред на (19.11) $\boldsymbol{a}$ е ускорението на материалната частица, т. е. материалната производна на скоростта спрямо времето, вж. (14.23).

С помощта на (19.10) и (19.11) написваме (19.9) във вида

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho\boldsymbol{a} - \rho\boldsymbol{f} - \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma)\, \mathrm{d}V = 0\,. \tag{19.12}$$

Равенството (19.12) е в сила за произволен материален обем $\mathcal{V}$. Като свиваме този обем в точка (предполагайки подинтегралната функция непрекъсната) получаваме съотношението:

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f} + \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,. \tag{19.13}$$

Уравнението (19.13) представлява локалната формулировка на ойлеровата „теорема“ за количеството движение. То се нарича *уравнение на движението* на непрекъснатите среди. Подчертаваме, че то е в сила за произволна среда, независимо от нейната специфика (еластична, вискозна и т. н.) и от характера на нейното движение.

Да напомним, че с уравнението на движението (19.13), изведено по един по-нагледен и евристичен начин в декартова координатна система, вече се срещнахме в § 7.5, вж. (7.18) и (7.19). Интерпретацията му беше също обсъдена в края на § 7.5. Да я повторим и тук.

Ако частицата е абсолютно твърда, то в нея отсъстват вътрешни напрежения и е в сила втория закон на Нютон $\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f}$; тук единствената сила е масовата. Деформацията на частицата води до появата на вътрешни напрежения, които се описват чрез тензора на напрежението на Коши. Уравнението на движението на частицата вече е (19.13), което ще препишем във вида

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\Phi}\,, \quad \boldsymbol{\Phi} = \nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma\,.$$

Сравнението на последното уравнение с втория закон на Нютон за недеформируема частица показва, че деформируемостта локално се проявява като една масова сила, равна на дивергенцията $\nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma$ на тензора на напрежението.

Да отбележим в заключение на този пункт, че формулата (19.11) може да се изведе и по-просто, без използване на правилото (18.7) за диференциране на интеграл по променлив обем. Именно, производната $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ в (19.9) е материална, т. е. производна във фиксирана материална частица. Обемът $\mathcal{V}$ е също материален, съставен по такъв начин само от материални частици. Поради това $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ може да се внесе под знака на интеграла

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\right)\,. \tag{19.14}$$

Но $\mathrm{d}m$ е масата на елементарния материален обем от средата, която не се изменя по време на движението (законът за запазването на масата, изразен локално чрез уравнението на непрекъснатостта (18.12), вж. § 18.2). Поради това $\mathrm{d}m$ може да се изнесе пред знака на материалната производна в дясната страна на (19.14)

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\right) = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\,,$$

което съвпада с (19.11).

19.5. Уравнение на движението в ойлерови координати. Да запишем уравнението (19.13) спрямо ойлеровите координати, използвайки връзката между пълната и локалната производна

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma \,, \tag{19.15}$$

вж. (14.23).

Уравнението (19.15) показва, че във всички задачи на механиката на непрекъснатите среди, в които скоростта $\boldsymbol{v}$ на движението на частиците не е пренебрежимо малка, участва нелинейния член $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$. Това прави подобни задачи са *нелинейни* и обяснява големите трудности при тяхното решаване.

§ 20. „Теорема“ за кинетичния момент. Симетричност на тензора на напрежението

20.1. Теорема за кинетичния момент на механична система. Както и в § 19.1, разглеждаме механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \dots, N$. Действащите върху точките сили отново се разделят на вътрешни и на външни, вж. (19.1), така че за всяка точка M_k можем да запишем втория закон на Нютон във вида (19.2).

Фиксираме (неподвижен) полюс O и нека $\boldsymbol{r}_k = \overrightarrow{OM_k}$, $k = 1, \dots, N$, са радиус-векторите на точките M_k спрямо този полюс. Умножаваме всяко едно от уравненията (19.2) векторно с $\boldsymbol{r}_k$ и сумираме по k

$$\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_k \boldsymbol{v}_k \right) = \boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} + \boldsymbol{M}_O^{\text{int}} \,, \tag{20.1}$$

където

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{ext}} \,, \quad \boldsymbol{M}_O^{\text{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k^{\text{int}}$$

са главните моменти, съответно, на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата. Веднага забелязваме, че

$$\boldsymbol{M}_O^{\text{int}} = 0 \,, \tag{20.2}$$

по същите причини, по които се анулира главния вектор на вътрешните сили, вж. § 19.1.

За опростяване на лявата страна на (20.1) използваме равенството

$$\boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k \boldsymbol{v}_k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k)\ . \tag{20.3}$$

То се проверява чрез директно диференциране

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k) = \underline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \times (m_k \boldsymbol{v}_k)} + \boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k \boldsymbol{v}_k)$$

— подчертаният член е нула, защото $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k/\mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_k$.

Съотношенията (20.2) и (20.3) позволяват да препишем (20.1) във вида

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,, \tag{20.4}$$

където

$$\boldsymbol{G}_O = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k \times (m_k \boldsymbol{v}_k) \tag{20.5}$$

е т. нар. *кинетичен момент* (или *момент на количеството движение на системата*).

Равенството (20.5) изразява втората от основните теореми на аналитичната механика, а именно:

Теорема 20.1 (за кинетичния момент). *Скоростта на изменението на кинетичния момент на система е равно на главния момент на външните сили, действащи върху точките от системата.*

20.2. Аксиома на Ойлер за кинетичния момент на материален обем. Да разгледаме първо, вместо механичната система от краен брой точки, по-общия случай на абсолютно твърдо тяло, заемащо обем $\mathcal{V}$. Практически дословно повторение на разсъжденията от § 19.2 ще ни доведе до израза

$$\boldsymbol{G}_O \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,, \tag{20.6}$$

който именно се приема в аналитичната механика за дефиниция на кинетичен момент на абсолютно твърдото тяло $\mathcal{V}$. Аналогично на теоремата за количеството движение (§ 19.1), и тук равенството (20.4) губи за такова тяло статута си на теорема. Това равенство се постулира от Ойлер като независимо твърдение, от което той извежда знаменитите си уравнения на динамиката на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка, вж. § 6.3.

При изучаване на движението на непрекъснатата среда равенството (20.4) отново не може да се разглежда като строго следствие на втория закон на Нютон. Нещо повече, обемът $\mathcal{V}$ и тук трябва да бъде материален. За такъв обем Ойлер постулира валидността на следната аксиома, напълно аналогична по дух на аксиомата за количеството движение (19.8), а именно:

Втора аксиома на Ойлер (за кинетичния момент на материален обем). *Нека $\mathcal{V}$ е произволен материален обем на непрекъснатата среда. Тогава*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}\,, \tag{20.7}$$

където $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материалната производна, а $\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}}$ е главният момент на външните сили, действащи върху обема $\mathcal{V}$.

20.3. Симетричност на тензора на напрежението. Ще покажем, че основното следствие на ойлеровата аксиома (20.7) е симетричността на тензора на напрежението на Коши.

Както и в § 19.3, изрязваме мислено от средата материален обем $\mathcal{V}$. Съставяме главния момент на външните сили, действащи върху $\mathcal{V}$ — това са отново обемните сили с плътност $\boldsymbol{f}$ и силите на вътрешните напрежения:

$$\boldsymbol{M}_O^{\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S\,,$$

вж. фиг. 19.2, и използваме аксиомата за кинетичния момент (20.7):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}_n\,\mathrm{d}S\,. \tag{20.8}$$

Преобразуваме първо лявата страна на (20.8) по начин, аналогичен на този, използван в края на § 19.4 при извода на формулата (19.11):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_O &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}m\\ &= \int_{\mathcal{V}} \underline{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m\,,\end{aligned} \tag{20.9}$$

т. е.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{G}_0 = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r}\times(\rho\,\boldsymbol{a})\,\mathrm{d}m\,, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{20.10}$$

където $\boldsymbol{a}$ е ускорението на материалната частица. (Подчертаният член в (20.9) се анулира, защото $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ по дефиниция на скоростта на частицата.) В (20.9) използваме, да припомним, че $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материална производна, $\mathcal{V}$ е материален обем, така че $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ може да се внесе под знака на интеграла $\int_{\mathcal{V}}$, а $\mathrm{d}m = \mathrm{const}$ — масата $\mathrm{d}m$ на материалната частица остава неизменна по време на движението.

Упражнение 20.1. *Изведете формулата* (20.10), *ползвайки в* (20.9) *правилото* (18.7) *за диференциране на интеграл по променлив обем и уравнението на непрекъснатостта* (18.12).

Преобразуваме повърхнинния интеграл в дясната страна на (20.8) в обемен. За целта прилагаме първо формулата на Коши $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_\sigma$, вж. (7.9). В декартова система

$$(\boldsymbol{\sigma}_n)_k = (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)_k = n_\ell \, \sigma_{\ell k} \qquad (\textstyle\sum_\ell)$$

и затова

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n)_i = \varepsilon_{ijk} \, x_j \, (\boldsymbol{\sigma}_n)_k = \varepsilon_{ijk} \, x_j \, \sigma_{\ell k} \, n_\ell \, . \tag{20.11}$$

Прилагаме формулата на Гаус към i-тата компонента на повърхнинния интеграл в (20.8), като използваме (20.11):

$$\int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n)_i \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} n_\ell \, \varepsilon_{ijk} \, x_j \, \sigma_{\ell k} \, \mathrm{d}S \tag{20.12}$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \partial_\ell \, (\varepsilon_{ijk} \, x_j \, \sigma_{\ell k}) \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_{ijk} \, (x_j \, \sigma_{\ell k, \ell} + x_{j,\ell} \sigma_{\ell k}) \, \mathrm{d}V \qquad \Big(\textstyle\sum_{j,k.\ell}\Big) \, .$$

Но $x_{j,\ell} = \delta_{j\ell}$, и затова

$$\varepsilon_{ijk} \, x_{j,\ell} \, \sigma_{\ell k} = \varepsilon_{ijk} \, \delta_{j\ell} \, \sigma_{\ell k} = \varepsilon_{ijk} \, \sigma_{jk} = (\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^*)_i \, ,$$

като двоеточието означава, да напомним, контракция по две двойки индекси. На свой ред $\sigma_{\ell k, \ell} = (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)_k$ е k-тата компонента на дивергенцията $\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma$ на тензора $\boldsymbol{T}_\sigma$, вж. § 13.5. Тогава $\varepsilon_{ijk} \, x_j \, \sigma_{\ell k, \ell}$ е k-тата компонента на векторното произведение $\boldsymbol{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)$ и равенство (20.12), написано безкоординатно, приема вида

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \Big(\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^* \Big) \, \mathrm{d}V \, . \tag{20.13}$$

Заместваме (20.10) и (20.13) в (20.8):

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{r} \times \underline{(\rho \, \boldsymbol{a} - \rho \boldsymbol{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma)} \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E} : \boldsymbol{T}_\sigma^* \, \mathrm{d}V \, .$$

Подчертаният член се анулира вследствие на уравнението на движението (19.13). Следователно

$$\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E}:\boldsymbol{T}_\sigma^* \,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{20.14}$$

Но (20.14) е в сила за *произволен* материален обем $\mathcal{V}$. Свивайки този обем в точка намираме, че

$$\boldsymbol{E}:\boldsymbol{T}_\sigma^* = 0\,. \tag{20.15}$$

От (20.15) следва симетричността на тензора на напрежението

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \boldsymbol{T}_\sigma^*\,. \tag{20.16}$$

Наистина съотношението (20.15), записано в декартова система, ни дава например

$$(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{T}_\sigma^*)_1 = \varepsilon_{1jk}\,\sigma_{jk} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0\,,$$

т. е. $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Аналогично намираме $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$, което и означава, че тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$ наистина е симетричен.

§ 21. Теорема за кинетичната енергия

21.1. Теорема за кинетичната енергия на механична система. Отново започваме с класическия пример на механична система, съставена от *краен* брой материални точки M_k, $k = 1, \ldots, N$.

Записваме уравнението на движението на всяка една от точките M_k във вида (19.2)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m_k\boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} + \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}}\,, \quad k = 1, \ldots, N\,, \tag{21.1}$$

предполагайки, че масите m_k на точките остават постоянни. Умножаваме всяко едно от уравненията (21.1) скаларно с $\boldsymbol{v}_k$ и сумираме по k:

$$\sum_{k=1}^{N} m_k\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{v}_k + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \boldsymbol{v}_k\,. \tag{21.2}$$

Но

$$\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v_k^2}{\mathrm{d}t}\,, \quad v_k^2 = \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k\,,$$

и затова лявата страна на (21.2) може да се препише като

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,, \tag{21.3}$$

където

$$T = \sum_{k=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_k v_k^2 \tag{21.4}$$

е *кинетичната енергия* на системата.

В дясната страна на (21.2) на свой ред се появиха величините

$$W^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \boldsymbol{v}_k\,, \quad W^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \boldsymbol{v}_k \tag{21.5}$$

— това са съответно *мощностите* $W^{\,\mathrm{ext}}$ и $W^{\,\mathrm{int}}$ на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата[3].

Използването на (21.3) — (21.5) в (21.2) показва, че

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = W^{\,\mathrm{ext}} + W^{\,\mathrm{int}}\,. \tag{21.6}$$

Равенството (21.6) е добре известната теорема за кинетичната енергия от аналитичната механика. Изразено с думи (21.6) означава, че скоростта на изменението на кинетичната енергия на система е сума от мощностите на външните и на вътрешните сили, действащи върху системата.

Обръщаме внимание, че за разлика от теоремите за количеството движение (§ 19.3) и кинетичния момент (§ 20.2), където вътрешните сили изчезнаха в окончателните формулировки, мощностите на вътрешните сили в уравнението (21.6) *не могат* да се пренебрегнат. Макар те да се разпадат на двойки $(\boldsymbol{F}_{ij}, \boldsymbol{F}_{ji})$ равни и противоположно насочени сили с директриси, определени от отсечките $\overrightarrow{M_iM_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, нищо не може да се твърди за скоростите $\boldsymbol{v}_i$ и $\boldsymbol{v}_j$ на самите точки M_i и M_j, така че няма причини да очакваме, че изразът

$$\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{F}_{ji} \cdot \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{F}_{ji} \cdot (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)$$

ще се анулира в общия случай.

[3]За всеки случай да напомним, че мощността е сила по скорост, а работата е сила по преместване, така че мощността е работата, извършена за единица време.

Да припомним сега, че $\boldsymbol{v}_k = \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k/\mathrm{d}t$. От дефинициите (21.5) на мощностите на външните и на вътрешните сили тогава следва

$$\begin{aligned} W^{\,\mathrm{ext}} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}}}{\mathrm{d}t}\,, \\ W^{\,\mathrm{int}} &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}\,, \end{aligned} \tag{21.7}$$

където

$$\mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k\,, \quad \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}} = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k^{\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \tag{21.8}$$

са съответно *елементарните работи* на външните и на вътрешните сили, извършени при елементарните премествания $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_k$ на точките M_k на системата, $k = 1, \ldots, n$. Припомняме, че примовете в дефинициите (21.8) означават, че въведените елементарни работи не са пълни диференциали в общия случай.

Заместването на (21.7) в (21.6) дава

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{ext}} + \mathrm{d}'A^{\,\mathrm{int}}\,, \tag{21.9}$$

т. е. в сила е следната

Теорема 21.1 (**за кинетичната енергия на механична система**). *Диференциалът на кинетичната енергия е равен на сумата от елементарните работи на външните и на вътрешните сили, действащи върху точките от системата.*

21.2. Теорема за кинетичната енергия на материален обем. Разглеждаме движението на непрекъсната среда, в която отделяме материален обем $\mathcal{V}$. Записваме уравнението на движението (19.13) на точките от средата

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma\,. \tag{21.10}$$

Както и в случая на уравнението на Нютон (21.1), умножаваме (21.10) скаларно с $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}t$ и интегрираме по материалния обем $\mathcal{V}$:

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\,. \tag{21.11}$$

Преобразуваме последователно интегралите в (21.11), като започваме от този в лявата страна:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\\ =\int_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}v^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t\\ =\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m\right)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}T\,.\end{aligned} \tag{21.12}$$

Тук

$$T \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2}v^2\mathrm{d}m \tag{21.13}$$

представлява, по дефиниция, *кинетичната енергия* на материалния обем $\mathcal{V}$. Преобразованията в (21.12), да поясним, следват схемата, използвана в края на § 19.4 и § 20.2 — основната идея, напомняме, е в това, че $\mathcal{V}$ е материален обем, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ е материална производна, която може да се изнася пред знака на интеграла по областта $\mathcal{V}$; в същото време елементарната маса $\mathrm{d}m$ се запазва във всяка частица от средата (§ 18) и т. н.

Първият интеграл в дясната страна на (21.11) представлява очевидно елементарната работа на външните сили, приложени към $\mathcal{V}$. Както и в случая на механична система тези сили можем да разделим на външни и на вътрешни:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^{\,\text{ext}} + \boldsymbol{f}^{\,\text{int}}\,. \tag{21.14}$$

Външните сили са резултат от взаимодействието на точките от обема $\mathcal{V}$ с обекти, външни спрямо него, например, с останалата част от средата. (Класически пример на външна сила е впрочем и силата на тежестта.) Вътрешните сили се появяват от взаимодействието на частиците от $\mathcal{V}$ помежду си — това може да е резултат, да речем, на кулоновите (електростатични) взаимодействия, ако тези частици носят електричен заряд.

С използването на (21.14) разглеждания интеграл се записва като

$$\begin{gathered}\mathrm{d}'A_{\mathrm{m}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} + \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}\,,\\ \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}^{\,\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V\,,\quad \mathrm{d}'A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} = \int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}^{\,\mathrm{int}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V\,,\end{gathered} \tag{21.15}$$

където индексът ‘m’ говори, че разглежданата работа е извършена от масовите (обемните) сили.

Да разгледаме и последния интеграл в дясната страна на (21.11). В декартова система той може да се преобразува по следния начин

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij,j} \, v_i \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathcal{V}} \left[\, \partial_j \left(\sigma_{ij} \, v_i \right) - \sigma_{ij} v_{i,j} \, \right] \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathcal{S}} n_j \sigma_{ij} v_i \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t - \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \xi_{ij} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \qquad \left(\textstyle\sum_{i,j} \right) ,
\end{aligned}
\tag{21.16}
$$

където $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} + v_{j,i} \right)$ са компонентите на тензора на скоростта на деформацията $\boldsymbol{T}_\xi$, вж. § 17.1. Но $n_j \sigma_{ij} = \left(\boldsymbol{\sigma}_n \right)_i$, съгласно формулата на Коши (7.9). Това ни позволява да препишем (21.16) в следния безкоординатен вид

$$
\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \, . \tag{21.17}
$$

Силите на напрежението $\boldsymbol{\sigma}_n$ действат върху повърхнината $\mathcal{S}$ на материалния обем $\mathcal{V}$. Поради тази причина първият интеграл в дясната страна на (21.17) представлява елементарната работа на външните повърхнинни сили

$$
\mathrm{d}' A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t \, . \tag{21.18}
$$

Да напомним, че вътрешните напрежения представляват също повърхнинни сили, появяващи се при разрязването на тялото вътре в обема му, вж. § 7.1. Характеристика на тези сили е тензорът на напрежението $\boldsymbol{T}_\sigma$. Поради това вторият интеграл в дясната страна на (21.17) може да се интерпретира като елементарна работа на вътрешните повърхнинни сили

$$
\mathrm{d}' A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} = - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \, . \tag{21.19}
$$

Аналогично на (21.15), индексът ‘s’ тук говори, че разглежданата работа в случая е извършена от повърхнинните сили.

Отчитайки формулите (21.12), (21.15), (21.18) и (21.19), записваме формулата (21.11) във вида

$$
\mathrm{d}T = \mathrm{d}' A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} + \mathrm{d}' A_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} + \mathrm{d}' A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} + \mathrm{d}' A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} \, . \tag{21.20}
$$

Това равенство, изразено с думи, представлява съдържанието на следната

Теорема 21.2 (**за кинетичната енергия на материален обем**). *Диференциалът на кинетичната енергия на материален обем е равен на сумата от елементарните работи на външните и на вътрешните сили, действащи върху точките от обема.*

Да отбележим, че за разлика от постулатите за количеството движение (§ 19.3) и кинетичния момент (§ 20.2), Теорема 21.2 е *строго* следствие на уравнението на движение (21.10) на материална частица. Поради това терминът теорема тук е използван без кавички.

21.3. Локална формулировка на теоремата за кинетичната енергия. Фиксираме материална точка и материален обем $\mathcal{V}$ с маса M около нея. Разделяме (21.20) на M и свиваме обема $\mathcal{V}$ в дадената точка устремявайки, в частност, M към нула. За всеки един от членовете, появяващи се при тази операция, последователно намираме

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M}\int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right)\,\mathrm{d}m \quad &\xrightarrow[M\to 0]{} \quad \mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right),\\
\frac{1}{M}\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \quad &\xrightarrow[M\to 0]{} \quad \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\\
\frac{1}{M}\int_{\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \quad &\xrightarrow[M\to 0]{} \quad \frac{1}{\mathrm{d}M}\left(\int_{\mathrm{d}\mathcal{V}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}\,\mathrm{d}m\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,\\
\frac{1}{M}\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\,t \quad &\xrightarrow[M\to 0]{} \quad \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t,\\
\frac{1}{M}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \quad &\xrightarrow[M\to 0]{} \quad \frac{1}{\rho}\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{21.21}
$$

В последните два реда на (21.21) използвахме, че за елементарния обем $\mathrm{d}\mathcal{V}$ е в сила равенството $\mathrm{d}V = \mathrm{d}m/\rho$. В третия ред забелязахме, че работата на вътрешните сили се анулира при свиването на обема в точка. Причината е добре позната — вътрешните сили се разпадат на двойки равни и противоположно насочени сили, така че главният им вектор се анулира (§ 19.1). При свиването на обема в точка преместването $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ може да се изнесе пред знака на интеграла, който именно представлява споменатия главен вектор за елементарния обем.

От (21.20) и (21.21) следва търсената локална формулировка на теоремата за кинетичната енергия, именно

$$
\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\boldsymbol{T}_\sigma\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t. \tag{21.22}
$$

Два частни случая на (21.22) заслужават специално отбелязване.

Нека тялото е недеформируемо. Тогава $\boldsymbol{T}_\sigma = 0$ и от (21.22) следва

$$\mathrm{d}\tfrac{1}{2}v^2 = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Това очевидно е познатата от аналитичната механика теорема за кинетичната енергия на материална точка.

Да допуснем, че вътрешни масови сили няма, а в тялото действат само нормални напрежения, т. е. тензорът на напрежението е сферичен

$$\boldsymbol{T}_\sigma = -p\boldsymbol{I}\,. \tag{21.23}$$

(Такава среда е идеалната течност, а p е налягането, вж. § 23.) В този случай (локално)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}'A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} &= \frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t\,,\\
\mathrm{d}'A_{\mathrm{s}}^{\mathrm{int}} &= \frac{p}{\rho}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}_\xi\,\mathrm{d}t = \frac{p}{\rho}\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t\\
&= -\,\frac{p}{\rho^2}\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}
\end{aligned}$$

— във втория ред сме заместили $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ с $-\dfrac{p}{\rho}\,\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, използвайки уравнението на непрекъснатостта (18.12). Окончателно, локалната формулировка (21.22) на теоремата за кинетичната енергия има вида

$$\mathrm{d}\left(\tfrac{1}{2}v^2\right) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{1}{\rho}\,\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}t + p\,\mathrm{d}\frac{1}{\rho}\,, \tag{21.24}$$

ако тензорът на напрежението е сферичен, вж. (21.23).

21.4. Алтернативен извод на теоремата за кинетичната енергия. По-горе, в § 21.2 при извода на основното съотношение (21.20) на теоремата за кинетичната енергия умишлено следвахме, практически дословно, схемата и означенията, използвани при извода на аналогичното съотношение (21.9) за механична система в § 21.1. В случая[4], когато $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} = 0$ равенството (21.20) може да се изведе и по един по-прост начин, като не се търси аналогията с механична система.

[4]Силите $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}$ могат да бъдат резултат, както вече отбелязахме, на кулонови взаимодействие при електрически заредени среди; такива среди тук не се разглеждат (това би изисквало привличане и на уравненията на Максуел на електродинамиката и би довело до значително усложняване). Освен това, да напомним, в локалната формулировка (21.22) $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}}$ отпадна.

Именно нека $W = W^{\,\mathrm{ext}}$ е мощността на външните сили, действащи върху материалния обем $\mathcal{V}$. Тези сили са масовите, с плътност $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}}$, и повърхнинните сили $\boldsymbol{\sigma}_n$ на напреженията и затова тяхната мощност е

$$\begin{aligned} W &= W_{\mathrm{m}}^{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{s}}^{\mathrm{ext}} \\ &= \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}S\,. \end{aligned} \tag{21.25}$$

Прилагаме към втория интеграл (21.25) първо формулата на Коши (7.9), а след това тази на Гаус (11.41):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}S &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{T}_\sigma \cdot \boldsymbol{v})\ \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{T}_\sigma \cdot \boldsymbol{v})\ \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : (\nabla \boldsymbol{v})\ \mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V\,, \end{aligned}$$

което заместваме в (21.25)

$$W = \int_{\mathcal{V}} \Big(\underline{\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \rho \boldsymbol{f}}\Big) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V\,. \tag{21.26}$$

Подчертаната сума в първия интеграл в дясната страна е инерционният член $\rho \boldsymbol{a}$, съгласно уравнението на движението (19.13)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \boldsymbol{T}_\sigma + \rho \boldsymbol{f}) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V &= \int_{\mathcal{V}} \rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{V}} \tfrac{1}{2} v^2 \,\mathrm{d}m = \dot{T}\,, \end{aligned}$$

където T е кинетичната енергия на материалния обем $\mathcal{V}$, вж. (21.4). Използването на последното равенство в (21.25) дава окончателно

$$W = \dot{T} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V\,. \tag{21.27}$$

Лесно се вижда, че (21.27) е равносилно на (21.20) при направеното предположение $\boldsymbol{f}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{int}} = 0$.

Да отбележим в заключение, че величината

$$W^{\mathrm{str}} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V$$

е въведена от Стокс (1851), който я е нарекъл *мощност на напреженията*. В тази терминология (21.27) означава, че мощността на външните сили, действащи върху материален обем отделен от тялото, поражда скорост на изменение на кинетичната енергия и стоксовата мощност на напреженията.

§ 22. Първи закон на термодинамиката

22.1. Първи закон на термодинамиката. Теоремата за кинетичната енергия (§ 21.2) представлява, най-общо казано, уравнението за баланса на механичната енергия. Тя има енергетична природа, тъй като свързва изменението на кинетичната енергия с извършената в материалния обем работа. Но това е законът за запазване на енергията *единствено* в случая, когато механичната енергия не се превръща в топлинна или друг вид енергия (например, радиация). Ако това условие се наруши, в (21.20) ще се появят допълнителни членове. Резултатът от тяхното отчитане е първият закон на термодинамиката, към чиято формулировка преминаваме.

При деформацията и течението на непрекъснатите среди като правило винаги има преход от механична в топлинна енергия и обратно[5]. Поради това постулираме, че освен кинетичната енергия материалният обем $\mathcal{V}$ притежава и т. нар. *вътрешна енергия* $\mathcal{E}$, така че пълната му енергия E е сумата

$$E = T + \mathcal{E} \,. \tag{22.1}$$

Предполагаме освен това, че

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{V}} \varepsilon \, \mathrm{d}m = \int_{\mathcal{V}} \rho\varepsilon \, \mathrm{d}V \,, \tag{22.2}$$

където ε е плътността на вътрешната енергия (количеството ѝ на единица маса).

За да поясним понятието вътрешна енергия на най-примитивно интуитивно ниво да си представим два екземпляра на един и същ материален обем $\mathcal{V}$, които се движат с еднакви скорости, но имат различна температура. Макроскопическата величина T — кинетичната енергия на двата обема — ще бъде една и съща. Обемът с по-висока температура

[5]При нагряване телата се разширяват, при деформиране те се затоплят, и т. н.

ще има обаче по-голяма вътрешна енергия в резултат на нагряване, което е претърпял (да припомним, че температурата е пропорционална на средната кинетична енергия на молекулите, от които е съставен обема).

Ясно е, че пълната енергия на обема може да се измени единствено в резултат на действието на външни сили и на количеството топлина, което влиза в него. С други думи постулираме, че

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = W^{\mathrm{ext}} + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t} \tag{22.3}$$

— скоростта на изменението на пълната енергия на материален обем е сума от мощността на външните сили и на количеството топлина $\mathrm{d}'Q$, влязло в обема за единица време. В това именно се състои *първия закон на термодинамиката*, формулиран математически с формулата (22.3). Знакът „прим“ в означението за количеството топлина $\mathrm{d}'Q$ подчертава, че тава количество в общия случай не е пълен диференциал (аналогично на елементарните работи на външните и вътрешните сили в (21.8), вж. § 21.1).

Преди да се заемем с описанието на топлинните потоци в тяло (§ 22.2) ще опростим (22.3). Заместваме (22.1) и (21.27) в (22.3):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}(T+\mathcal{E})}{\mathrm{d}t} = \dot{T} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} \\ &= \dot{T} + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t}\,,\end{aligned}$$

т. е.

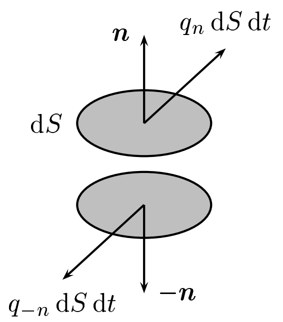
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\varepsilon \,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi \,\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t}\,. \tag{22.4}$$

22.2. Вектор на топлинния поток. За описание на разпространението на топлината в тяло ще приложим метода на мислените сечения на Бернули, като модифицираме по очевиден начин разсъжденията, довели в § 7.1 до понятието тензор на напрежението на Коши.

Фиксираме точка от тялото и разглеждаме елементарна площадка с лице $\mathrm{d}S$ и единична нормала $\boldsymbol{n}$, вж. фиг. 22.1. Количеството топлина, което ще премине през тази площадка в посока на нормалата $\boldsymbol{n}$ за интервала от време $(t, t+\mathrm{d}t)$ е $q_n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$. Тук q_n е плътността на потока, т. е. количеството топлина, преминаващо през единица площ за единица време. В обратна посока ще премине очевидно същото количеството топлина $q_{-n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$, вж. фиг. 22.1. Но докато количеството топлина $q_n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$

„влиза“ през горната площадка, през долната това количество „излиза“ и затова

$$q_{-n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = -q_n\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{т. е.} \quad q_{-n} = -q_n\,. \tag{22.5}$$



Фиг. 22.1

И така, за да характеризираме топлинния поток в точка на неравномерно нагрятото тяло, трябва да знаем скаларната функция q_n на векторния аргумент $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} \longrightarrow q_n\,, \quad \forall \boldsymbol{n} \in \Re^3\,, \quad |\boldsymbol{n}| = 1\,. \tag{22.6}$$

Сравнението с (7.1) показва, че ситуацията е напълно аналогична на тази при описанието на вътрешните напрежения в тяло, но тук тя е „смъкната“ една тензорна валентност по-надолу: вместо векторната функция на векторен аргумент (7.1) сега се появява скаларната функция на векторен аргумент (22.6). Доказателството обаче на линейността на функцията (22.6) е идентично по дух с това на линейността на (7.1) и се базира отново на тетраедъра на Коши, вж. Фиг. 7.2.

Именно за време $\mathrm{d}t$ в тетраедъра влиза количеството топлина

$$\mathrm{d}Q = \Big(q_{e_1}\,\mathrm{d}S_1 + q_{e_2}\,\mathrm{d}S_2 + q_{e_3}\,\mathrm{d}S_3 + q_{-n}\,\mathrm{d}S\Big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{22.7}$$

Означенията са същите, използвани в § 7.1

Обемните източници (ако такива има) създават в тетраедъра допълнителното количество топлина

$$\mathrm{d}Q^{\mathrm{vol}} = F(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t\,.$$

При това, както е известно от физиката, сумарното количество топлина $\mathrm{d}Q + \mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}}$, което тетраедърът поема, увеличава температурата му с $\mathrm{d}\theta$ съгласно закона

$$\mathrm{d}Q + \mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}} = c_v\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}V\,, \tag{22.8}$$

където $\mathrm{d}V$ е обемът на тетраедъра, а c_v е т. нар. *коефициент на топлопоглъщане*. Да напомним, че това е количеството топлина, което трябва да „погълне“ единица обем от тялото за единица време, за да увеличи температурата си с един градус например по Целзий. (В друга температурна скала коефициентът c_v ще се умножи с подходящ множител.) В

(22.8) обемът на тялото е фиксиран (не се мени по време на нагряването), което обяснява индекса 'v' в означението c_v.

Както и в § 7.1 забелязваме, че лицата на стените на тетраедъра $\mathrm{d}S_k$, $k = 1, 2, 3$, и $\mathrm{d}S$ са безкрайно малки величини от ред a^2, където a е характерният размер на тетраедъра, докато обемът му $\mathrm{d}V$ е безкрайно малка величина от ред a^3. Следователно $\mathrm{d}Q^{\,\mathrm{vol}}$ и дясната страна на (22.8) могат да се пренебрегнат при свиването на тетраедъра в точка в сравнение с $\mathrm{d}Q$. Тогава (22.8) се свежда просто до анулирането на сумарното количество топлина $\mathrm{d}Q$, вж. (22.7), влизащо или излизащо през четирите стени на тетраедъра, т. е. $\mathrm{d}Q = 0$.

Като използваме (22.5), записваме последното уравнение, $\mathrm{d}Q = 0$, във вида

$$q_n = \sum_{k=1}^{3} q_k \frac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}S}\,, \quad q_k = q_{e_k}\,, \quad k = 1, 2, 3\,, \tag{22.9}$$

вж. (22.7).

Но

$$\mathrm{d}S_k = \cos\,(\widehat{\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{n}})\ \mathrm{d}S = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_k\, \mathrm{d}S\,,$$

което позволява да напишем (22.9) във вида

$$q_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}\,, \quad \boldsymbol{q} = \sum_{k=1}^{3} q_k \boldsymbol{e}_k\,, \tag{22.10}$$

където $\boldsymbol{q}$ е *векторът на топлинния поток*. Формулата (22.10) е „топлинният“ аналог на формулата на Коши (7.9).

22.3. Локална формулировка на първия закон на термодинамиката. Количеството топлина, което влиза в обема $\mathcal{V}$ за време $\mathrm{d}t$ е

$$\mathrm{d}'Q = -\int_{\mathcal{S}} q_n\, \mathrm{d}S\, \mathrm{d}t\,,$$

вж. (22.5). С помощта на (22.10) и (11.41) оттук намираме

$$\frac{\mathrm{d}'Q}{\mathrm{d}t} = -\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\, \mathrm{d}V\,,$$

което заместваме в (22.4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} \rho\dot{\varepsilon}\, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \rho\dot{\varepsilon}\, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi\, \mathrm{d}V - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\, \mathrm{d}V\,. \tag{22.11}$$

Тъй като (22.11) е в сила за произволен материален обем, то свивайки последния в точка намираме

$$\rho\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi - \nabla \cdot \boldsymbol{q}\,. \tag{22.12}$$

Равенството (22.12) представлява локалната формулировка на първия закон на термодинамиката.

От (22.12) се вижда, че даже при отсъствие на топлинни потоци, $\boldsymbol{q} = 0$, вътрешната енергия на деформируемото тяло се мени в резултат на стоксовата мощност $\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi$ на вътрешните напрежения.

22.4. Закон за топлопроводността на Фурие. При отсъствие на механична деформация параметрите на състоянието на неравномерно нагрятото тяло са температурата θ и векторът на топлинния поток $\boldsymbol{q}$ във всяка точка от тялото. Температурата е дефинирана обаче с точност до произволна (адитивна) постоянна. (Да напомним, че във всяка температурна скала е необходимо експлицитно да посочим коя е нулевата температура.) Това означава, че истинският параметър на състоянието не е θ, а по-скоро нейният градиент $\nabla\theta$ (тъй като той е нечувствителен към добавянето на константа към θ).

В този факт можем да се убедим и чрез следното разсъждение. Ако топлинният поток отсъства (тялото е равномерно нагрято), то $\boldsymbol{q} = 0$ и температурата му е постоянна, $\theta = \mathrm{const}$, т. е. $\nabla\theta = 0$. Вярно е и обратното — ако температурата е навсякъде постоянна, то топлинни потоци няма. С други думи,

$$\boldsymbol{q} = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla\theta = 0\,.$$

Наличието на топлинен поток изменя температурата на съседните точки и обратно. Това подсказва, че „поведението“ на неравномерно нагрято тяло се описва от модел, чийто математически израз има вида

$$f\,(t, \nabla\theta, \boldsymbol{q}, \ldots) = 0\,. \tag{22.13}$$

Многоточието в (22.13) включва, евентуално, производни по времето на параметрите на състоянието $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, интеграли, съдържащи $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, и т. н.

Най-простият частен случай на (22.13) е случаят, когато това съотношение включва само векторите $\nabla\theta$ и $\boldsymbol{q}$, свързани при това линейно:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla\theta\,. \tag{22.14}$$

(Напомняме, че всяка линейна векторна функция се описва чрез двувалентен тензор, вж. § 3.2.)

Съотношението (22.14) е известно като *тензорен закон на топлопроводността* или *закон на Фурие–Дюамел*, а $\boldsymbol{K}$ е *тензорът на топлопроводност* на тялото. Това съотношение предполага анизотропност на разпространението на топлината в тялото в смисъл, че едно и също количество топлина „пуснато“ да се разпространява в различни посоки, ще предизвика различно изменение на температурата на елементарния обем. Най-често срещаните тела на практика обаче са „топлинно изотропни“, т. е. двувалентният тензор на топлопроводността $\boldsymbol{K}$ е изотропен и поради това той е сферичен: $\boldsymbol{K} = -\kappa \boldsymbol{I}$. В този случая законът (22.14) се опростява:

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla \theta \,. \tag{22.15}$$

Съотношението (22.15) е известно като *закон на топлопроводността на Фурие*, а множителят κ е *коефициентът на топлопроводност* на тялото. Знакът '$-$' в (22.15) е избран, за да бъде този коефициент κ положителен. (Топлината, да напомним, се разпространява от по-горещото към по-студеното място, т. е. в посока на *отрицателния* градиент на температурата.)

Нека споменем също, че (22.14) е „топлинният“ аналог на закона на Хук на деформацията на линейно еластично тяло, „смъкнат“ надолу по тензорната стълбичка (8.14) (двувалентният тензор на напрежението на Коши $\boldsymbol{T}_\sigma$ е заменен от вектора на топлинния поток, а четиривалентният тензор на еластичните модули $\boldsymbol{H}$ (вж. (25.3) и § 25.1) — с двувалентния тензор $\boldsymbol{K}$ на топлопроводността.

За тяло, подчиняващо се на закона на Фурие (22.15), първият закон на термодинамиката (22.12) приема вида:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{T}_\xi + \kappa \Delta \theta \,, \tag{22.16}$$

включващ явно полето на температурата θ.