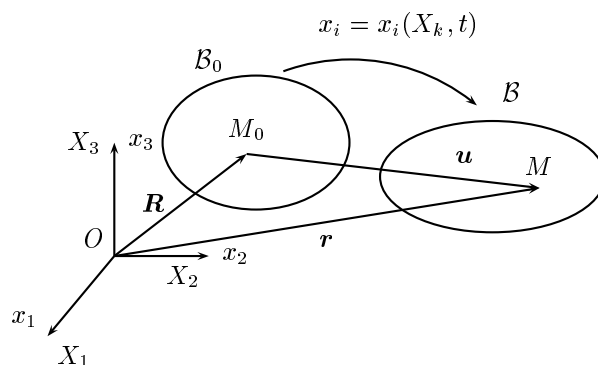


Глава 3

КИНЕМАТИКА НА НЕПРЕКЪСНАТИ СРЕДИ

§ 14. Ойлерово и лагранжево описание на движението на непрекъснати среди. Локална и материална производни

14.1. Ойлерово и лагранжево описание на движението. Да разгледаме деформируема среда, която в един „начален“ момент $t = 0$ заема областта от пространството \mathcal{B}_0 . В момента t средата се е деформирала и заема вече областта \mathcal{B} , вж. фиг. 14.1.



Фиг. 14.1. Движение на непрекъснатата среда

Както и при изучаване на движението на абсолютно твърдо тяло, да вземем два екземпляра, $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$, на декартова координатна система, които съвпадат в началния момент от време $t = 0$. Оставяме едната система, $Ox_1x_2x_3$, неподвижна в пространството, докато втората, $OX_1X_2X_3$, „залепваме“ за тялото. В резултат тя се движи заедно с

него, а координатните ѝ линии се деформират заедно с тялото (ако то се движи като абсолютно твърдо, движението на подвижната система спрямо неподвижната е суперпозиция на трансляция и чиста ротация).

От дефиницията на подвижната система е видно, че координатите X_k на материалните частици *не се изменят* по време на движението. Те идентифицират еднозначно тези частици и затова се наричат *материални* (или *лагранжеви*) координати. Неподвижните координати x_i на свой ред се наричат пространствени (или *ойлерови*).

Ясно е сега, че движението на средата ще бъде еднозначно зададено, ако знаем положението в пространството (т.е. ойлеровите координати x_i) на всяка материална точка във всеки момент от време. Математически тази информация се съдържа във функциите

$$x_i = x_i(X_k, t), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad t \geq 0, \quad (14.1)$$

като

$$x_k \equiv X_k \quad \text{при} \quad t = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Тъй като съотношенията (14.1) представляват взаимно-еднозначно преобразование на тримерното пространство (за всяко фиксирано t), те могат да се „обърнат“:

$$X_k = X_k(x_i, t), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad t \geq 0. \quad (14.2)$$

Уравненията (14.2) определят началното положение, т.е. материалните координати на частица от тялото, която в момент t се намира в положение x_i в пространството.

Да отбележим, че в качеството на лагранжева система можем да изберем и произволна криволинейна координатна система ξ_k . Съществено е само, че ξ_k е „залепена“ неподвижно за средата, т.е. координатите ξ_k на материалните точки остават неизменни по време на движението. Законът (14.1) в този случай придобива формално по-общия вид

$$x_i = x_i(\xi_k, t), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad t \geq 0,$$

но смисълът и интерпретацията му остават същите.

14.2. Преместване и скорост. Полето на преместване на материална частица при движението (14.1) на средата се дефинира като

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad (14.3)$$

вж. фиг. 14.1. Оттук, спрямо неподвижната координатна система,

$$u_p(X_k, t) = x_p(X_k, t) - X_p, \quad p, k = 1, 2, 3. \quad (14.4)$$

— това са компонентите на преместването в момент t на материалната частица, която в началния момент $t = 0$ заема положението X_k в пространството.

С помощта на (14.2) полето \mathbf{u} може да се запише покомпонентно и по следния начин:

$$u_p(x_i, t) = x_p - X_p(x_i, t), \quad p, k = 1, 2, 3. \quad (14.5)$$

Тук $u_p(x_i, t)$ са компонентите на преместването на материална частица, която в текущия момент t се намира в положението x_i на пространството.

Скоростта на частицата дефинираме по очевиден начин, а именно, чрез производната

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(X_k, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(X_k, t)}{\partial t}, \quad (14.6)$$

вж. (14.3). Да подчертаем, че при диференцирането спрямо времето материалните координати X_k са фиксирани (което впрочем се подразбира по смисъла на частната производна). Компонентите на скоростта в неподвижната система са

$$v_p = v_p(X_k, t) = \frac{\partial x_p(X_k, t)}{\partial t}, \quad p, k = 1, 2, 3, \quad (14.7)$$

вж. (14.1).

Изразите (14.6) или (14.7) определят полето на скоростта в момент t при зададени материални координати X_k на частицата. С други думи това е скоростта в момент t на частицата, която в началния момент $t = 0$ е заемала положението X_k в пространството. В редица случаи обаче нас ни интересува скоростта на частицата, която в текущия момент t заема дадена точка x_i от пространството. За намирането на тази скорост е достатъчно да изключим материалните координати X_k в изразите (14.7) като ги заменим с ойлеровите x_i с помощта на (14.2):

$$v_p = v_p(X_k(x_i, t)) = v_p(x_i, t), \quad p, i = 1, 2, 3. \quad (14.8)$$

Ще илюстрираме казаното дотук върху следния прост пример.

Пример 14.1. Движението на средата се определя от закона

$$x_1 = X_1(1 + at), \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3. \quad (14.9)$$

(едномерно движение по оста x_1), $a = \text{const}$. Търсим полетата на преместването и скоростта в материални и пространствени координати.

Решение. Компонентите на преместването в материални координати са

$$u_1 = x_1 - X_1 = atX_1, \quad u_2 = u_3 = 0, \quad (14.10)$$

вж. (14.2). За намиране на преместването спрямо пространствените координати, изключваме X_k в (14.10) с помощта на закона на движението (14.9):

$$u_1 = \frac{atx_1}{1 + at}, \quad u_2 = u_3 = 0.$$

За намиране на скоростта в материални координати диференцираме (14.10) спрямо времето

$$v_1 = aX_1, \quad v_2 = v_3 = 0 \quad (14.11)$$

— това е скоростта в момент t на частицата, чийто координати в момент $t = 0$ са X_k .

За да получим ойлеровото описание на скоростта, изразяваме отново X_k чрез x_i в (14.11) като използваме (14.9):

$$v_1 = \frac{ax_1}{1 + at}, \quad v_2 = v_3 = 0.$$

Това е скоростта на частицата, която в текущия момент от време t се намира в пространствената точка x_i .

14.3. Материална и локална производни. Разглеждаме физическа величина φ , която се мени в обема на тялото и във времето. Величината φ може да се разглежда като функция както на материалните X_k , така и на ойлеровите координати x_i :

$$\varphi = G(X_k, t) = g(x_i, t), \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (14.12)$$

Използваме за момента двата символа G и g за да подчертаем, че функциите $G(X_k, t)$ и $g(x_i, t)$ са *различни*, макар че описват *една и съща величина* φ (но по двата различни начина: един път в лагранжеви, другият път в ойлерови координати).

В динамиката на непрекъснатите среди основен интерес представлява скоростта с която се мени величината φ във фиксирана материална точка, т. е. при фиксирани материални координати X_k :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial G(X_k, t)}{\partial t}. \quad (14.13)$$

Образно казано, „сядаме“ върху материалната точка X_k , движим се заедно с нея, и следим с каква скорост се мени във времето величината φ при това движение.

Производната (14.13) се нарича *материална* (или още *пълна* или *субстанциална*) производна на φ . Правото d в нейното означение подчертава, че пресмятането ѝ се извършва във *фиксирана* материална частица¹.

Да предположим, че φ е изразена чрез ойлеровите координати x_i , т. е. е зададена функцията $g(x_i, t)$, вж. (14.12). Величината

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial t} \quad (14.14)$$

се нарича *локална* производна. Тя очевидно определя скоростта на изменението на φ във *фиксираната* пространствена точка с координати x_i .

Ясно е, че двете производни — материалната и локалната — *не съвпадат*. Причината е в това, че през фиксирана точка на пространството в *различни* моменти от време преминават *различни* материални частици. (По-подробно това ще се обсъжда в § 14.4.)

За намиране на връзката между материалната и локалната производни да внесем закона за движението на средата (14.1) в израза (14.12) на величината φ :

$$\varphi = g(x_i(X_k, t), t), \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (14.15)$$

Диференцираме този израз спрямо времето, разглеждайки φ като сложна функция на t :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d}{dt} g(x_i(X_k, t), t) \\ &= \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial t} + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial x_p} \frac{\partial x_p(X_k, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (14.16)$$

¹Използва се и означението $D\varphi/Dt$ за материалната производна.

Но частните производни $\partial x_p(X_k, t)/\partial t$ представляват компонентите на скоростта, вж. (14.7). Следователно

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_p \frac{\partial g(x_i, t)}{\partial x_p} \quad (\Sigma_p)$$

или в безкоординатен вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla g. \quad (14.17)$$

По-горе използвахме два различни символа, g и G , за дадената величина φ за да подчертаем, че тя има различни изрази в зависимост от това дали се разглежда в лагранжева или ойлерова координатни системи. По-нататък обаче това не е необходимо, защото или явно ще се указва, или пък от контекста ще бъде ясно в коя от двете системи работим. Затова ще използваме и в двата случая символа φ на разглежданата величина. Това уславяне позволява да напишем (14.17) като

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi. \quad (14.18)$$

Формулата (14.18) представлява търсената връзка между пълната и локалната производна на величината φ . Не е задължително впрочем тази величина да бъде скаларна — тя може да представлява векторно или тензорно поле. Поради това ще напишем (14.18) в един „по-абстрактен“ и по-удобен вид

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad (14.19)$$

който ще се използва многократно.

14.4. Интерпретация на формулата (14.18). Конвективна производна. Предвид важността на формулата (14.18) ще обсъдим в заключение на този параграф геометричната ѝ интерпретация.

Да разгледаме изменението на величината φ за инфинитезималния интервал от време $(t, t + dt)$. Предполагаме, че в момента t пространствените координати на материална частица са x_p . За време dt тези координати ще се изменят с $dx_p = v_p dt$, т. е. в момента $t + dt$ пространствените координати на същата частица ще бъдат $x_p + v_p dt$, $p = 1, 2, 3$, а величината φ ще се измени с $d\varphi$, вж. фиг. 14.2. Следователно скоростта на изменението на φ в дадената частица (т. е. материалната производна

на φ) ще бъде

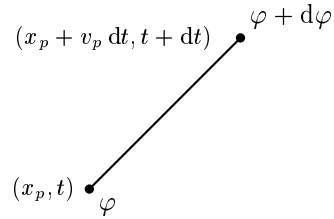
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\varphi(x_p + v_p dt, t + dt) - \varphi(x_p, t)}{dt} \\ &= \frac{1}{dt} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} dt + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} \cdot v_p dt \right] \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_p \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} \quad \left(\sum_p \right), \end{aligned} \quad (14.20)$$

което съвпада с (14.18). (Изразът в квадратните скоби в (14.20) е пълният диференциал на функцията $\varphi(x_i, t)$.)

Величината

$$v_p \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} = \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi \quad \left(\sum_p \right) \quad (14.21)$$

се нарича *конвективна* производна на φ . От формулата (14.18) е ясно, че това е разликата между пълната и локалната производна на φ . Проведеният току-що геометричен анализ изяснява причината за появата на тази разлика. Именно, материалната частица в резултат на движението на средата изменя положението си в пространството: за време dt пространствените ѝ координати се променят с $dx_p = v_p dt$, $p = 1, 2, 3$. Вследствие на това в диференциала $d\varphi$ се появява, освен $\frac{\partial\varphi}{\partial t} dt$, също и подчертаният член в (14.20), т. е. конвективната производна.



Фиг. 14.2

14.5. Ускорение. Ускорението на частица от средата е материалната производна на нейната скорост:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (14.22)$$

Съгласно (14.18)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (14.23)$$

или, спрямо декартова неподвижна координатна система,

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_\alpha v_{k,\alpha} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum v_\alpha \frac{\partial v_k}{\partial v_\alpha}. \quad (14.24)$$

§ 15. Тензор на деформацията

15.1. Тензор на дисторсията. Разглеждаме движението на среда, зададено със закона (14.1). При фиксиран момент от време t той определя взаимно еднозначно съответствие

$$x_i = x_i(X_k) = x_i(X_k, t), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (15.1)$$

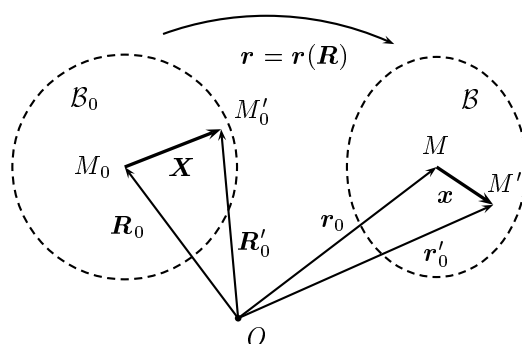
между областите \mathcal{B}_0 и \mathcal{B} , заемани от средата в моментите t_0 и t съответно:

$$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}. \quad (15.2)$$

Ще наричаме \mathcal{B}_0 и \mathcal{B} *начално* и *крайно* състояние, а съответствието (15.2) — *деформация* на средата. По този начин деформацията се представя чрез векторната функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}) \quad (15.3)$$

на векторен аргумент, чието координатно представяне е (15.1).



Фиг. 15.1

Разглеждаме деформацията (15.2) в малка околност на частицата M_0 от средата. Нека M'_0 е близка до M_0 . Векторът $\mathbf{X} = \overrightarrow{M_0 M'_0}$ наричаме *материална нишка* (или *влакно*), тъй като е съставен от материални частици. В началното положение \mathcal{B}_0 радиус-векторите на частиците M_0 и M'_0 са съответно \mathbf{R}_0 и \mathbf{R}'_0 , вж. фиг. 15.1. В деформираното състояние тези частици „лягат“ съответно в точките M и M' с радиус-вектори

\mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_0 , а материалната нишка \mathbf{X} заема положението $\mathbf{x} = \overrightarrow{MM'}$, вж. фиг. 15.1. (Тъй като векторът \mathbf{X} е предположен малък, „образът“ му \mathbf{x} след деформацията остава праволинеен с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\mathbf{X}|$.)

Търсим връзката между нишката \mathbf{X} и образа ѝ \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_0 &= \mathbf{r}(\mathbf{R}'_0) = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0 + \mathbf{X}) \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{R}_0) + \mathbf{X} \cdot \nabla \mathbf{r} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} + o(|\mathbf{X}|) \\ &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + o(|\mathbf{X}|).\end{aligned}$$

Тъй като $\mathbf{x} = \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0$, вж. фиг. 15.1, то с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\mathbf{X}|$,

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}. \quad (15.4)$$

Тук \mathbf{A} е двувалентният тензор

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{r} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} \quad (15.5)$$

— градиентът на закона на деформацията (15.3) в частицата M_0 — наречен *тензор на дисторсията*. В декартова система (15.4) има вида

$$\begin{aligned}(\mathbf{x})_i &= x'_i - x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (\mathbf{X})_j = A_{ji} (\mathbf{X})_j \quad \left(\sum_j \right), \\ A_{ji} &= \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad (\mathbf{X})_j = X'_j - X_j, \quad i, j = 1, 2, 3,\end{aligned} \quad (15.6)$$

където X_j и X'_j са координатите на M_0 и M'_0 съответно, а x_j и x'_j — на M и M' . Забележете, че в (15.4) пишем тензора \mathbf{A} *вдясно* от \mathbf{X} защото контракцията е по индекса ‘ j ’, вж. (15.6), а този индекс е пръв в координатното представяне $A_{ji} = \partial_j x_i$ на \mathbf{A} (наблата е поставена пред \mathbf{r} в дефиницията (15.5) на тензора на дисторсията).

Съотношението (15.4) показва, че локално — в малка околност на всяка частица от средата — деформацията е линейно преобразование, определено от тензора на дисторсията \mathbf{A} в тази частица.

Да напомним, че тензорът на дисторсията \mathbf{A} , като линейно преобразование на тримерното пространство \mathcal{E}_3 , притежава поне един собствен вектор, вж. § 4.9 и (4.48). Този чисто алгебричен факт в случая има нетривиална и неочевидна интерпретация: той означава, че *каквато и да е* деформацията на средата, във всяка нейна точка съществува поне една материална нишка, която запазва посоката си след деформирането.

Да обърнем внимание, че последното твърдение може да се разглежда като обобщение на добре известен факт от кинематиката на абсолютно твърдо тяло. Именно, съгласно теоремата на Ойлер-Даламбер (§ 4.12) всяко движение на такова тяло е ротация около ос. Тази ос очевидно остава неподвижна и представлява прототипа на онова влакно в точката на деформируемата среда, чиято посока не се мени при деформацията. (Самото влакно обаче, макар и да не мени посоката си при деформацията, в общия случай ще се свива или разтегля.)

Да представим тензора на дисторсията в „полярния“ вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{U}, \quad (15.7)$$

вж. (5.19), където $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ е ортогонално преобразование, \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 са съответно квадратните корени от тензорите

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}, \quad (15.8)$$

вж. (5.18). В разглеждания случай, когато \mathbf{A} е тензорът на дисторсията, тензорите (15.8) се наричат *тензори на Коши-Грийн*. Представянето (15.7) означава, че всяка деформация на средата се реализира локално като суперпозиция на ортогонално преобразование (т. е. на движение на околността на разглежданата материална частица като абсолютно твърдо тяло) и на „чиста“ деформация, определена от симетричните тензори на Коши-Грийн (15.8). Ако чиста деформация няма, т. е. тези тензори са единични, то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

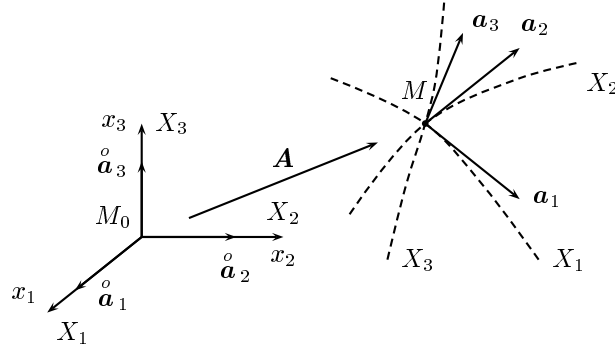
и дисторсията \mathbf{A} е ортогонален тензор, така че околността на разглежданата частица се движи като абсолютно твърдо тяло. Следователно локалната деформация на средата ще се определя от разликата

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}. \quad (15.9)$$

До същия извод ще достигнем и в § 15.3 по друг може би по-нагледен начин, вж. (15.17).

15.2. Диадно представяне на тензора на дисторсията. Нека $\overset{o}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{e}_i$ са единичните вектори на неподвижната координатна система x_i , $i = 1, 2, 3$. Тъй като $X_k \equiv x_k$ в момент $t = 0$, то $\overset{o}{\mathbf{a}}_i$ могат да се разглеждат и като вектори на локалния базис на декартовата система X_k в началното състояние

$$\overset{o}{\mathbf{a}}_k = \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_k}, \quad \left(\overset{o}{\mathbf{a}}_k \right)_j = \frac{\partial X_j}{\partial X_k} = \delta_{jk}. \quad (15.10)$$



Фиг. 15.2

Да погледнем сега на лагранжевите координати X_k като на криволинейни координати в деформираното състояние \mathcal{B} . (Съотношенията (15.1) казват, че положението на всяка точка от \mathcal{B} се определят еднозначно от материалните ѝ координати X_k .) Координатните линии на тази криволинейна система, които в началния момент са прави, успоредни на координатните оси, в деформираното състояние се изкривяват (лагранжевата система X_k е „залепена“ за тялото и се „деформира“ заедно с него). Съответно локалният базис

$$\mathbf{a}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_k}, \quad (\mathbf{a}_k)_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \quad (15.11)$$

в частицата от средата също се деформира и в общия случай вече не е ортонормиран, вж. фиг. 15.2.

Не е сложно да се види, че линейното преобразование, което трансформира началния локален базис $\{\overset{o}{\mathbf{a}}_k\}$ в базиса $\{\mathbf{a}_k\}$ в деформираното състояние е вече познатият ни тензор на дисторсията:

$$\mathbf{A} : \{\overset{o}{\mathbf{a}}_k\} \longrightarrow \{\mathbf{a}_k\}. \quad (15.12)$$

т. е., че

$$\mathbf{a}_k = \overset{o}{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{A}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (15.13)$$

Това е следствие на (15.10) и (15.11) и на очевидното твърдение

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial X_k} \quad (\sum_j).$$

(Забележете, че $\partial X_j / \partial X_k = \delta_{jk}$.)

Равенствата (15.13) позволяват да запишем тензора на дисторсията в следния удобен диаден вид:

$$\mathbf{A} = \overset{o}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i, \quad (15.14)$$

вж. (4.1) (§ 4.1).

Да отбележим, че локалният базис $\overset{o}{\mathbf{a}}^i = \overset{o}{\mathbf{a}}_i = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, в началното състояние беше избран ортонормиран — лагранжевата система X_k е декартова, от съображения за простота и нагледност. За произволна лагранжева система горните разсъждения заедно със съотношенията (15.12) — (15.14) остават непроменени, единствено локалният базис $\overset{o}{\mathbf{a}}_i$ вече е произволен.

15.3. Тензор на деформацията. Нека \mathbf{X} и \mathbf{Y} са две материални нишки с начало в частицата M_0 в недеформираното състояние. След деформацията те се превръщат съответно в нишките \mathbf{x} и \mathbf{y} , като

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}. \quad (15.15)$$

Тук \mathbf{A} е тензорът на дисторсията в частицата M_0 .

Деформацията в околността на частицата M_0 ще дефинираме чрез изменението на метриката (изменението на дължините и на ъглите), която се определя, да напомним, чрез скаларното произведение на векторите. Именно, въвеждаме тензора \mathbf{T}_ε , чиято билинейна форма

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}), \quad (15.16)$$

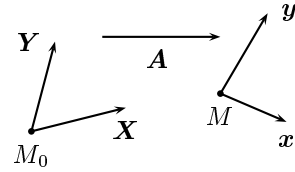
$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{E}_3$, определя споменатото изменение на метриката вследствие на деформирането (15.2) (с точност до множителя $1/2$ избран следвайки историческа традиция). Тензорът \mathbf{T}_ε се нарича *тензор на деформацията*.

Заместваме (15.4) в (15.16):

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon \cdot \mathbf{Y} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Y}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{E}_3 \end{aligned}$$

— да припомним, че $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{Y}$, където \mathbf{I} е единичният тензор. Следователно

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}). \quad (15.17)$$



Фиг. 15.3

Както и трябваше да се очаква, тензорът на деформацията се оказва пропорционален на „отклонението“ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}$ на единия от тензорите на Коши-Грийн от единичния тензор, вж. (15.9) и края на § 15.1.

15.4. Интерпретация на компонентите на тензора на деформация. Да заместим диадното представяне (15.14) на тензора на дисторсията в (15.17). Тъй като

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{a}_i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i,$$

вж. (4.4) и (4.5), то

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* &= \left(\overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \mathbf{a}_i \right) \cdot \left(\mathbf{a}_j \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j \right) = g_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \\ \mathbf{I} &= \overset{\circ}{g}_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \quad \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_j, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon &= \varepsilon_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right) \overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right). \end{aligned} \tag{15.18}$$

Компонентите на тензора на деформацията се оказват пропорционални на разликата на метрическите коефициенти в началното и деформираното състояние спрямо диадния базис $\overset{\circ}{\mathbf{a}}^i \overset{\circ}{\mathbf{a}}^j$.

Преминаваме към интерпретацията на компонентите на тензора на деформация. Разглеждаме материална нишка \mathbf{X} с дължина $d \overset{\circ}{s}_k$, насочена по k -тата координатна линия X_k в началното състояние, т. е.

$$\mathbf{X} = d \overset{\circ}{s}_k \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k = d \overset{\circ}{s}_k \mathbf{e}_k \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right).$$

Образът на тази нишка след деформацията е

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = d \overset{\circ}{s}_k \overset{\circ}{\mathbf{a}}_k \cdot \mathbf{A} = d \overset{\circ}{s}_k \mathbf{a}_k \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right),$$

вж. (15.4), а дължината ѝ е

$$ds_k = |\mathbf{x}| = d \overset{\circ}{s}_k |\mathbf{a}_k| \quad \left(\overset{\circ}{\Sigma}_k \right).$$

Разглеждаме относителното изменение на дължината на нишката \mathbf{X} :

$$\ell_k = \frac{ds_k - d \overset{\circ}{s}_k}{d \overset{\circ}{s}_k} = |\mathbf{a}_k| - 1,$$

т. е.

$$g_{kk} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_k = |\mathbf{a}_k|^2 = (1 + \ell_k)^2 \quad \left(\sum_k' \right),$$

което замества в (15.18):

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{2}(g_{kk} - 1) = \frac{1}{2} \left[(1 + \ell_k)^2 - 1 \right] = \ell_k + \frac{1}{2}\ell_k^2 \quad \left(\sum_k' \right). \quad (15.19)$$

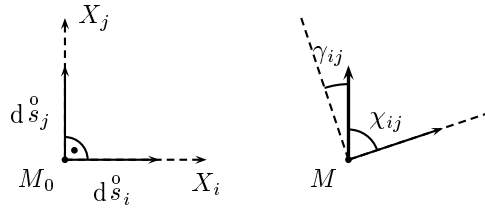
(Тъй като базисът $\hat{\mathbf{a}}_k$ е ортонормиран, то $\hat{g}_{kk} = \hat{\mathbf{a}}_k \cdot \hat{\mathbf{a}}_k = 1$.)

Формулата (15.19) означава, че диагоналните компоненти ε_{kk} на матрицата на тензора на деформацията се определят еднозначно от относителните удължения ℓ_k на материалните нишки, разположени по координатните оси X_k , $k = 1, 2, 3$.

Да предположим, че удължението на материалните нишки е малко, $|\ell_k| \ll 1$. В този случай можем да пренебрегнем ℓ_k^2 спрямо ℓ_k в (15.19):

$$\varepsilon_{kk} = \ell_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \left(\sum_k' \right), \quad (15.20)$$

т. е. при малка деформация диагоналните компоненти ε_{kk} на тензора на деформацията просто съвпадат с относителните удължения на съответните материални нишки.



Фиг. 15.4

Да разгледаме сега две материални нишки, разположени по осите X_i и X_j , $i \neq j$, съответно с дължини $d s_i^0$ и $d s_j^0$, вж. фиг. 15.4. Образът на тези нишки след деформацията е

$$\mathbf{a}_i = d s_i^0 \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{A} = d s_i^0 \mathbf{a}_i,$$

$$\mathbf{a}_j = d s_j^0 \hat{\mathbf{a}}_j \cdot \mathbf{A} = d s_j^0 \mathbf{a}_j$$

— те вече не са ортогонални. Косинусът на ъгъла χ_{ij} между тях е

$$\cos \chi_{ij} = \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_i| |\mathbf{a}_j|} = \frac{g_{ij}}{(1 + \ell_i)(1 + \ell_j)}.$$

Оттук

$$g_{ij} = (1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \sin \gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.21)$$

където $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\pi - \chi_{ij}$ е ъгълът на „скосяване“ на ъгъла между разглежданите нишки, който първоначално е прав, вж. фиг. 15.4. Величината γ_{ij} можем да наречем *ъглова деформация*.

Заместваме (15.21) в (15.18):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}g_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \ell_i)(1 + \ell_j) \sin \gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.22)$$

тъй като в случая $\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{\mathbf{a}}_i \cdot \overset{o}{\mathbf{a}}_j = 0, i \neq j$.

Равенството (15.22) означава, че недиагоналните компоненти на тензора на деформацията са свързани както с относителните удължения на нишките, насочени по координатните оси, така и със скосяванията на ъглите между тях.

Да предположим, че не само удълженията ℓ_i са малки, но и ъглите γ_{ij} са също малки. От (15.22) тогава следва, че

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}, \quad i \neq j, \quad (15.23)$$

т. е. недиагоналната компонента на тензора на деформацията в случая е точно половината от съответната ъглова деформация.

15.5. Тензор на малката деформация. Представяме вектора, определящ положението на точката M в деформираното състояние като

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}. \quad (15.24)$$

Тук \mathbf{u} е векторът на преместването на M , вж. (14.3) и Фиг. 14.1. Заместваме (15.24) в дефиницията (15.5) на тензора на дисторсията :

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{r} = \nabla \mathbf{R} + \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} = \mathbf{I} + \mathbf{B}, \quad (15.25)$$

където

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} \quad (15.26)$$

е градиентът на полето на преместването \mathbf{u} . (Очевидно $\nabla \mathbf{R} = \mathbf{I}$ — в декартовата система X_k , тъй като $(\nabla \mathbf{R})_{ij} = X_{j,i} = \delta_{ij}$.)

Изразяваме тензора на деформацията \mathbf{T}_ε чрез тензора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon &= \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{I} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{B}^*) - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Деформацията наричаме *малка*, ако $|\mathbf{B}| \ll 1$, т. е. ако компонентите на \mathbf{B} в една (а следователно и във всяка друга) координатна система са много малки. Тогава $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*$ може да се пренебрегне по сравнение както с \mathbf{B} , така и с \mathbf{B}^* , подчертаният член в (15.27) е пренебрежимо малък и тензорът на деформацията се опростява:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^*) . \quad (15.28)$$

Тензорът, дефиниран в (15.28), се нарича *тензор на малката деформация*. Той често се означава в литературата с \mathbf{T}_ε , за да се отличи от тензора на голямата деформация \mathbf{T}_ε , в който участва и *нелинейния* (спрямо преместването \mathbf{u}) член $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*$. Тъй като $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{u}$, то

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \text{def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) , \quad (15.29)$$

където сме въвели оператора на симетризирания градиент ‘def’.

Упражнение 15.1. Ако две векторни полета \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 пораждат един и същ тензор на малката деформация, то те се отличават с поле на преместване на абсолютно твърдо тяло, т. е.

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} ,$$

с постоянен вектор $\boldsymbol{\omega}$. (Това твърдение е известно като теорема на Кирхоф.)

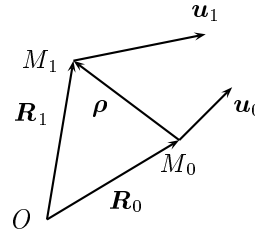
За да поясним понятието малка деформация и да видим, че то съвпада с въведените по-горе предположения за малко относително удължение и малка ъглова деформация, разглеждаме точка M_0 от тялото с радиус-вектор \mathbf{R}_0 , вж. фиг. 15.5. Нека M_1 е близка до M_0 точка, нейният радиус-вектор е $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}$ с малко $\boldsymbol{\rho}$, $|\boldsymbol{\rho}| \ll 1$. Използвайки тейлоровото разлагане, записваме

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{R}_1) = \mathbf{u}(\mathbf{R}_0 + \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{u}(\mathbf{R}_0) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \Big|_{\mathbf{R} = \mathbf{R}_0} + o(|\boldsymbol{\rho}|) ,$$

т. е.

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{B} ,$$

с точност до малки от по-висок ред спрямо $|\boldsymbol{\rho}|$. Но $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$ е относителното преместване на точката M_1 спрямо M_0 (ако „седнем“ върху точката



Фиг. 15.5

M_0 и се преместим заедно с нея, то спрямо нас M_1 ще се придвижи с $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$). Предположението $|\mathbf{B}| \ll 1$ тогава означава, че относителното преместване на M_1 спрямо M_0 е малко, т. е. близките точки и след осъществената деформация остават близки. Следователно и относителните удължения и скосяванията на ъглите следва да бъдат малки, ако $|\mathbf{B}| \ll 1$, и обратно.

15.6. Израз за обемното разширение при малка деформация. Разглеждаме елементарен куб с обем dV и страни $d\overset{\circ}{s}_i$, насочени по декартовите оси X_k , $k = 1, 2, 3$. След деформацията кубът се „сплесква“, страните му вече имат дължини $ds_i = (1 + \ell_i) d\overset{\circ}{s}_i$, а правите му ъгли се скосяват с γ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, вж. § 15.4. Тъй като при малка деформация $|\ell_i|, |\gamma_{ij}| \ll 1$, то обемът на деформирания куб, с точност до малки от по-висок ред спрямо ℓ_i и γ_{ij} , е

$$dV = (1 + \ell_1)(1 + \ell_2)(1 + \ell_3) dV_0,$$

$dV_0 = d\overset{\circ}{s}_1 d\overset{\circ}{s}_2 d\overset{\circ}{s}_3$. Относителното изменение на обема (обемната деформация или дилатацията) се дефинира като

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1 + \ell_1)(1 + \ell_2)(1 + \ell_3) - 1 \approx \ell_1 + \ell_2 + \ell_3.$$

Но $\ell_i = \varepsilon_{ii}$ (\sum_i^{\prime}), вж. (15.20), и затова

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = u_{\alpha,\alpha} \quad (\sum_{\alpha}),$$

където \mathbf{T}_{ε} е тензорът на малката деформация (15.28). От друга страна $u_{\alpha,\alpha} = \nabla \cdot \mathbf{u}$, т. е.

$$\theta = \text{tr } \mathbf{T}_{\varepsilon} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (15.30)$$

— дивергенцията $\nabla \cdot \mathbf{u}$ на полето на преместване съвпада с обемната деформация в предположение, че деформацията е малка.

В частност, ако тялото е несвиваемо, то полето \mathbf{u} е соленоидално, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Аналогичен факт ще установим в § 18 — полето на скоростите \mathbf{v} в несвиваема среда ще се окаже също соленоидално, вж. (18.15). Да подчертаем обаче, че соленоидалността (15.30) на полето на преместване \mathbf{u} е в сила само при малка деформация. При големи (крайни) деформации условието за несвиваемост има значително по-сложния вид:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}) = 1,$$

който тук няма да коментираме.

§ 16. Уравнения на съвместимостта на Сен-Венан

16.1. Съвместимост на деформациите. Нека $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е поле на двувалентен (симетричен) тензор. Интересува ни представимо ли е то във вида

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (16.1)$$

където $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ е векторно поле. С други думи, питаме кога полето $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ представлява поле на тензора на (малката) деформация, породено от преместването $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на тяло в тримерното пространство.

В общия случай произволно поле $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ не може да се представи във вида (16.1). Причината е например в това, че полето $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ се определя координатно от шест функции, които искаме да се изразят с помощта само на три — компонентите на $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Следователно за да е в сила представянето (16.1) е необходимо $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ да се подчинява на определени условия. Това са именно *условията на съвместимост на Сен-Венан*. Преди да преминем към техния формален извод да се спрем на тяхната интерпретация.

Да разрежем мислено тяло на малки части с център в точките \mathbf{x}_k , $k = 1, 2, \dots$. Отделяме всяко парче от тялото и го подлагаме на деформацията $\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$. Връщаме обратно деформираните парчета в съответните точки \mathbf{x}_k и се опитваме да слепим от тях ново тяло. Ясно е, че в общия случай на произволно (симетрично) тензорно поле $\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$ това няма да е възможно: отделните парчета ще се припокриват, или между тях ще има фуги. Ново „гладко“ тяло ще получим единствено, ако деформациите $\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$ са „съвместими“ помежду си, т.е. ако те се пораждат от векторно поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ съгласно формулата (16.1).

Горното разсъждение става още по-нагледно, ако тялото е тънка пластина, която се деформира в равнината си. По-конкретно, можем да си представим паркет: ако той е бил наводнен при авария, след изсъхването всяка от плочките се деформира по свой начин. Ако тази деформация е съвместима, то паркетът ще остане равнинен и следи от аварията няма да има. Както е печално известно обаче, деформацията на плочките е несъвместима и в резултат паркетът се изкорубва, появяват се фуги и прочие неприятности за собственика.

16.2. Уравнения на съвместимостта на Сен-Венан. Да „слезем една валентност по-надолу“ и да припомним, че едно векторно поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ е потенциално, ако то е представимо във вида $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, вж. (11.23). Ясно е, че не всяко поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ е потенциално: $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ се определя с помощта на трите си компоненти-функции, които в общия случай не могат да

се представят чрез единствената скаларна функция $f(\mathbf{x})$. В § 11.7 изведохме условието за потенциалност като приложихме оператора ротация към двете страни на (11.23) и забелязахме, че $\nabla \times \nabla = 0$.

Аналогично ще постъпим и „една валентност по-нагоре“. Ако тензорното поле $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е представимо във вида (16.1), то прилагайки операцията ротация един път от ляво и един път от дясно на $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ необходимо ще получим нула:

$$\text{Rot } \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T} \times \nabla = 0. \quad (16.2)$$

Полето $\text{Rot } \mathbf{T}$ се нарича *биротация* (или *биротор*) на тензорното поле $\mathbf{T}(\mathbf{x})$. То е тензорният аналог на биротора на векторно поле, дефиниран в § 11.6. Очевидно $\text{Rot } \mathbf{T}$ е също двувалентно тензорно поле което е симетрично, щом $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е симетрично.

Анулирането на биротацията на тензорното поле представлява условието за съвместимост на на Сен-Венан, т. е. условието за представимост на тензорното поле във вида (16.1).

В декартова система тензорното уравнение (16.2) има вида

$$(\nabla \times \mathbf{T} \times \nabla)_{ij} = \varepsilon_{ip\alpha} \varepsilon_{jq\beta} t_{pq,\alpha\beta} = 0, \quad (16.3)$$

вж. (11.34) и § 11.6.

Да опростим уравнението (16.3) като използваме схемата по която достигнахме в § 9.6 до известната формула (9.36) за разкриване на двойното векторно произведение. Схемата е основана отново на изотропността на алтерниращия тензор и на вече познатата ни структура на изотропните тензори (§ 9.4), но се налага да се реализира „две валентности по-горе“, т. е. вместо с четиривалентни ще работим сега с шествалентни тензори.

Забелязваме, че $\varepsilon_{ip\alpha} \varepsilon_{jq\beta}$ са компонентите на шествалентния тензор $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ в декартова координатна система. Тензорът \mathbf{E} е изотропен, следователно $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ е също изотропен тензор от четна (шеста) валентност. Съгласно § 9.4, компонентите

$$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})_{ip\alpha jq\beta} = \varepsilon_{ip\alpha} \varepsilon_{jq\beta} \quad (16.4)$$

ще представляват линейни комбинации на изомерите на тензора с компоненти $\delta_{ij} \delta_{pq} \delta_{\alpha\beta}$. С други думи, следва да построим всевъзможните комбинации на индексите в тройките $(ip\alpha)$ и $(jq\beta)$ по двойки (като първият индекс е от едната тройка, а вторият от другата) и чрез тях да изразим компонентите (16.4). Тази процедура вече е позната от § 9.6, където я осъществихме в двата по-прости случая (контракция по две, а след това

по една двойка индекси в шествалентния тензор $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$). В случая на контракция по една двойка индекси резултатът беше формулата (9.33), записана удобно чрез детерминанта. Оказва се, че аналогично детерминантно записване е в сила и за компонентите (16.4) на тензора $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$, именно

$$\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{iq} & \delta_{i\beta} \\ \delta_{pj} & \delta_{pq} & \delta_{p\beta} \\ \delta_{\alpha j} & \delta_{\alpha q} & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}, \quad (16.5)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} &= \delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{ij}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha q} - \delta_{iq}\delta_{pj}\delta_{\alpha\beta} \\ &+ \delta_{iq}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha j} + \delta_{i\beta}\delta_{pj}\delta_{\alpha q} - \delta_{i\beta}\delta_{pq}\delta_{\alpha j}. \end{aligned} \quad (16.6)$$

За да докажем (16.6) написваме лявата страна на (16.6) във вида

$$\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} = \varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{jm\beta} \delta_{pn}\delta_{qm} \quad \left(\sum_{n,m} \right)$$

и използваме (9.33) в дясната страна на последната формула:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta} &= \varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{jm\beta} (\varepsilon_{nqs}\varepsilon_{pms} + \delta_{nm}\delta_{pq}) \\ &= (\varepsilon_{in\alpha}\varepsilon_{nqs}) (\varepsilon_{jm\beta}\varepsilon_{pms}) + \delta_{pq} (\varepsilon_{im\alpha}\varepsilon_{jm\beta}) \\ &= (\delta_{\alpha q}\delta_{is} - \delta_{\alpha i}\delta_{\beta s}) (\delta_{jp}\delta_{\beta s} - \delta_{js}\delta_{p\beta}) \\ &+ \delta_{pq} (\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}) \quad \left(\sum_{n,m,s} \right), \end{aligned}$$

което съвпада с (16.6).

Да заместим компонентите $\varepsilon_{ip\alpha}\varepsilon_{jq\beta}$, изразени чрез кронекеровите делти съгласно (16.6), в израза (16.2) на биротора и да представим всяка от съответните контракции в безкоординатен вид:

$$\begin{aligned} \delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{\alpha\beta} t_{pq,\alpha\beta} &= \delta_{ij} t_{pp,\alpha\alpha} \longrightarrow \mathbf{I} \Delta \operatorname{tr} \mathbf{T}, \\ \delta_{ij}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha q} t_{pq,\alpha\beta} &= \delta_{ij} t_{\beta\alpha,\alpha\beta} \longrightarrow \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla, \\ \delta_{iq}\delta_{pj}\delta_{\alpha\beta} t_{pq,\alpha\beta} &= t_{ij,\alpha\alpha} \longrightarrow \Delta \mathbf{T}, \\ \delta_{iq}\delta_{p\beta}\delta_{\alpha j} t_{pq,\alpha\beta} &= t_{\beta i,j\beta} \longrightarrow (\nabla \cdot \mathbf{T}) \nabla, \\ \delta_{i\beta}\delta_{pj}\delta_{\alpha q} t_{pq,\alpha\beta} &= t_{j\alpha,\alpha i} \longrightarrow \nabla (\mathbf{T} \cdot \nabla), \\ \delta_{i\beta}\delta_{pq}\delta_{\alpha j} t_{pq,\alpha\beta} &= t_{pp,ij} \longrightarrow \nabla \nabla \operatorname{tr} \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Отгук намираме безкоординатния израз на биротора и в частност, на уравнението на съвместимостта (16.2)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{T} \times \nabla &= \mathbf{I} (\Delta \operatorname{tr} \mathbf{T} - \nabla \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla) \\ &+ \nabla (\mathbf{T} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \nabla - \Delta \mathbf{T} - \nabla \nabla \operatorname{tr} \mathbf{T} = 0. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Уравнението (16.7) може да се опрости. За целта пресмятаме следата на лявата му част: след прости преобразования това дава

$$\Delta \operatorname{tr} \mathbf{T} - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \cdot \nabla,$$

т. е. множителят пред единичния тензор в (16.7) се анулира. Това води до следния окончателен вид на уравнението на съвместимостта на Сен-Венан:

$$\nabla(\mathbf{T} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \mathbf{T})\nabla - \Delta \mathbf{T} - \nabla \nabla \operatorname{tr} \mathbf{T} = 0. \quad (16.8)$$

В декартова координатна система уравнението (16.8) има вида:

$$\varepsilon_{j\alpha, \alpha i} + \varepsilon_{\alpha i, j\alpha} - \varepsilon_{ij, \alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha, ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\sum_{\alpha}).$$

Пример 16.1. Да предположим, че полето \mathbf{T} представлява чиста дилатация

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (16.9)$$

т. е. деформацията във всяка точка е обемно разширение (или свиване). Реализируемо ли е такова поле като поле на малка деформация на тримерна среда?

Решение. В случая $\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \theta$, $\operatorname{tr} \mathbf{T} = 3\theta$, което заместваме в (16.9):

$$\mathbf{I}\Delta\theta + \nabla\nabla\theta = 0. \quad (16.10)$$

Пресмятаме следата на лявата част в последното уравнение: $\Delta\theta = 0$, т. е. дилатацията $\theta(\mathbf{x})$ необходимо е хармонична функция. Нещо повече, от (16.10) сега следва, че $\nabla\nabla\theta = 0$ и затова

$$\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{x} + C_0,$$

където \mathbf{C}_1 и C_0 са константи (вектор и скалар съответно). Следователно полето (16.9) е поле на (малката) деформация на среда в тримерното пространство единствено ако дилатацията $\theta(\mathbf{x})$ е линейна функция на пространствените координати.

§ 17. Тензор на скоростта на деформацията. Теорема на Хелмхолц

17.1. Тензор на скоростта на деформацията. Разглеждаме положенията \mathcal{B}_t и $\mathcal{B}_{t+\Delta t}$ на среда в процеса на деформацията ѝ в два близки

момента от време t и $t + \Delta t$. Нека \mathbf{u} е преместването на материална частица M за интервала $(t, t + \Delta t)$, а \mathbf{v} е нейната скорост, вж. фиг. 17.1. Тогава

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} dt + o(\Delta t). \quad (17.1)$$

Тензорът на деформацията (15.27), съответстващ на това поле на преместване, е

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\varepsilon^{\Delta t} &= \frac{1}{2} (\mathbf{B} + \mathbf{B}^* + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

тъй като $\mathbf{B} = \nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{v} \Delta t + o(\Delta t)$ съгласно (15.27). Следователно

$$\frac{\mathbf{T}_\varepsilon^{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) + o(\Delta t). \quad (17.2)$$

Въвеждаме тензора

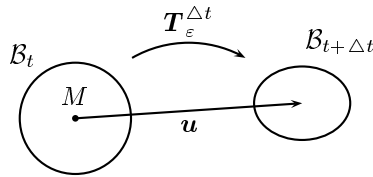
$$\mathbf{T}_\xi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}_\varepsilon^{\Delta t}}{\Delta t},$$

който се нарича *тензор на скоростта на деформацията*. Съгласно (17.3)

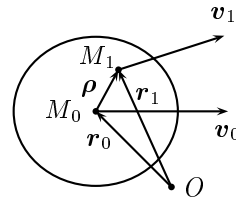
$$\mathbf{T}_\xi = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla), \quad (17.3)$$

т. е. \mathbf{T}_ξ е симетризираният градиент на полето на скоростта. В декартова система компонентите на \mathbf{T}_ξ са

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} (v_{j,i} + v_{i,j}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (17.4)$$



Фиг. 17.1



Фиг. 17.2

17.2. Теорема на Хелмхолц. Фиксираме материална частица M_0 , която се движи със скорост $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$ в момента t . Интересува ни разпределението на скоростите в околност на M_0 .

Нека $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_1)$ е скоростта на точката M_1 , близка до M_0 . Тук

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{M_0 M_1}, \quad |\boldsymbol{\rho}| \ll 1,$$

вж. фиг. 17.2. По формулата на Тейлър

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} + o(|\boldsymbol{\rho}|),$$

т. е.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\rho} \cdot \nabla \mathbf{v} + o(|\boldsymbol{\rho}|), \quad (17.5)$$

където $\nabla \mathbf{v}$ е градиентът на полето \mathbf{v} в точката M_0 .

Представяме тензора $\nabla \mathbf{v}$ като сума от симетричен и антисиметричен тензор:

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla),$$

вж. (4.17). Симетричната част очевидно съвпада с тензора на скоростта на деформацията (17.3), т. е.

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{T}_\xi + \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla). \quad (17.6)$$

Заместваме (17.6) в (17.5):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho} + o(|\boldsymbol{\rho}|). \quad (17.7)$$

(Очевидно \mathbf{T}_ξ е симетричен тензор, така че $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{T}_\xi = \mathbf{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho}$.)

За изясняване на физическия смисъл на формулата (17.7) да изразим антисиметричния тензор $\boldsymbol{\Omega}$ чрез съответния му вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \text{т. е.} \quad \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (\sum_k), \quad (17.8)$$

вж. (8.34). За вектора $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ тогава имаме²

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{E} : (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho},$$

вж. (17.8) и (8.28). Това позволява да напишем (17.7) във вида:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho} + o(|\boldsymbol{\rho}|). \quad (17.9)$$

²В декартови компоненти

$$(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\Omega})_i = \rho_j \Omega_{ji} = \rho_j \varepsilon_{jik} \omega_k = \varepsilon_{jik} \omega_k \rho_j = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})_i \quad (\sum_{k,j}),$$

вж. (8.27).

Формулата (17.9) изразява теоремата на Хелмхолц за разпределението на скоростите в малка околност на частица на деформируема среда. Интерпретацията ѝ е ясна и нагледна. Първият член в (17.9) е резултат от трансляцията на разглежданата околност на частицата. Вторият член описва движението ѝ като абсолютно твърдо тяло: тук $\boldsymbol{\omega}$ се интерпретира като вектора на моментната ъглова скорост при това движение (по формулата на Ойлер (6.3) $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ е съответната скорост на точката M_1 при това движение). Последният член в (17.9), а именно $\mathbf{T}_\xi \cdot \boldsymbol{\rho}$, е скоростта на M_1 в резултат на чистата деформация на частицата.