Глава 2

# ТЕНЗОРЕН АНАЛИЗ

## § 10. Векторни и тензорни полета — безкоординатна и координатна дефиниции

**10.1. Криволинейни координатни системи**. Нека $\Omega$ е област в тримерно афинно пространство $\mathcal{A}$. Всички разсъждения по-долу могат да се проведат и в общия $n$-мерен случай. За конкретните цели на класическата механика на деформируемите тела е достатъчно (а и понагледно) тримерното третиране.

Въвеждаме декартовата координатна система $Ox_1x_2x_3$ с начало във фиксирана точка $O$, вж. фиг. 10.1. Положението на произволна точка $M \in \Omega$ се определя от нейния радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ или, еквивалентно, от декартовите ѝ координати $x_1$, $x_2$ и $x_3$:

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \,. \tag{10.1}$$

Тук $\boldsymbol{e}_i$ са единичните вектори на осите $Ox_i$, $i = 1, 2, 3$.

В редица конкретни задачи се оказва по-удобна да определяме положението на точката не чрез декартовите ѝ координати $x_1$, $x_2$ и $x_3$, а с помощта на друга тройка числа $q_1$, $q_2$ и $q_3$, наречени *криволинейни координати*. (Защо криволинейни, ще поясним в § 10.2.) Изборът на една или друга система се диктува изцяло от спецификата на всяка конкретна задача.

Фактът, че положението на всяка точка с радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ се определя от тройката параметри $q_1$, $q_2$ и $q_3$ означава, че в разглежданата област $\Omega$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) \tag{10.2}$$

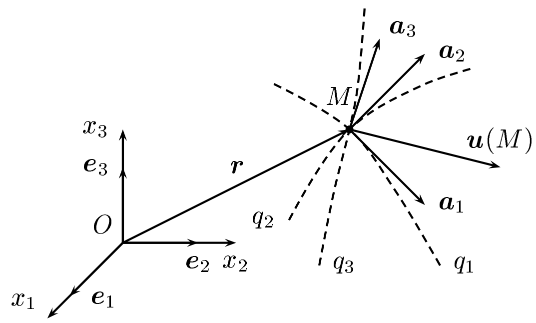
или

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3)\,, \\
x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3)\,, \\
x_3 &= x_3(q_1, q_2, q_3)\,.
\end{aligned}
\tag{10.3}
$$

За краткост ще записваме съотношенията (10.3) във вида

$$x_i = x_i(q_j)\,, \quad i, j = 1, 2, 3\,. \tag{10.4}$$

По-долу (§ 10.3) ще разгледаме някои от най-често използваните криволинейни координатни системи, като конкретизираме избора на $q_i$ и, съответно, на изразите (10.4).




Фиг. 10.1. Координатни линии и локален базис

**10.2. Локален базис. Коефициенти на Ламе**. За дадена криволинейна система $q_i$ да разгледаме повърхнините

$$q_i = \text{const}\,, \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{10.5}$$

върху които се менят само две от координатите $q_j$, $j \neq i$. Те се наричат *координатни повърхнини*. През всяка точка на пространството минават три координатни повърхнини. Техните пресечници са трите *координатни линии*, върху които се мени само една от координатите $q_i$.

За декартова система координатните повърхнини са успоредни на координатните равнини $Ox_1x_2$, $Ox_2x_3$ и $Ox_3Ox_1$, а координатните линии са прави, успоредни на осите $Ox_1$, $Ox_2$ и $Ox_3$. (Това обяснява защо декартовите системи се наричат също праволинейни.) За криволинейна система $q_i$ координатните линии са вече криви (което обяснява на свой ред използвания термин криволинейна).

За дадена система $q_i$ да разгледаме векторите

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{10.6}$$

При пресмятането на частната производна в (10.6) всички координати освен $i$-тата са фиксирани, което означава, че се движим по $i$-тата координатна крива ($q_i$-кривата, за краткост). Следователно векторите $\boldsymbol{a}_i$ са насочени по допирателната към тази крива. По този начин във всяка точка от пространството се появява тройката вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ които образуват т. нар. *локален базис*.

Линейната независимост на векторите $\boldsymbol{a}_i$ следва от факта, че съотношенията (10.3) задават взаимно еднозначно преобразование $(x_1, x_2, x_3)$ $\leftrightarrow$ $(q_1, q_2, q_3)$ в областта $\Omega$. Както е известно от анализа, якобианът на такова преобразование не може да се анулира

$$\det \left\| \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right\|, \quad i, j = 1, 2, 3\,. \tag{10.7}$$

Но (10.7) е точно условието за линейна независимост на векторите $\boldsymbol{a}_i$, тъй като

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\, \boldsymbol{e}_j\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{10.8}$$

Локалният базис в общия случай е *различен* в различните точки, в смисъл, че се мени както големината, така и посоката на векторите $\boldsymbol{a}_i$. Единствено за декартова система локалният базис е неизменен — по-точно, той се получава чрез успоредно пренасяне на фиксиран ортонормиран базис $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Най-удобни и най-често срещани в приложенията са *ортогоналните системи* криволинейни координати, при които локалният базис е ортогонален

$$\boldsymbol{a}_i \ \perp \ \boldsymbol{a}_j\,, \quad i \neq j\,.$$

Базисът $\boldsymbol{a}_i$ тогава се характеризира, освен от ориентацията, само от дължините на векторите си

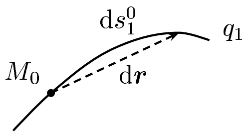
$$H_i = |\boldsymbol{a}_i| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right)^2}\,, \tag{10.9}$$

вж. (10.8), наречени *коефициенти на Ламе*. Тогава

$$\boldsymbol{a}_i = H_i \boldsymbol{e}_i \,, \quad |\boldsymbol{e}_i| = 1 \,, \quad i = 1, 2, 3 \,, \tag{10.10}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ е *ортонормираният локален базис*[1].

Пресмятането на коефициентите $H_i$ може да се извърши директно, използвайки изразите (10.9). По-просто и по-нагледно обаче е следното разсъждение. Да фиксираме координатите $q_i = q_i^0$, $i = 1, 2, 3$, определящи точката $M_0$. При зададените, например, $q_2^0$ и $q_3^0$ да позволим на $q_1^0$ да се измени с $\mathrm{d}q_1^0$, $\mathrm{d}q_1^0 > 0$. Точката $M_0$ тогава ще се придвижи по $q_1$-координатната линия, описвайки дъга с дължина $\mathrm{d}s_1^0$, вж. фиг. 10.2.




Фиг. 10.2

От дефинициите (10.6) и (10.9) от друга страна имаме

$$H_1 = |\boldsymbol{a}_1| = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1^0} \right| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}q_1^0} = \frac{\mathrm{d}s_1^0}{\mathrm{d}q_1^0} \,,$$

тъй като дължината на безкрайно малката хорда $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ съвпада с тази на дъгата $\mathrm{d}s_1^0$, вж. отново фиг. 10.2. Аналогични са разсъжденията и за координатните линии $q_2$ и $q_3$. Това означава, че

$$\mathrm{d}s_i^0 = H_i \, \mathrm{d}q_i^0 \,, \quad i = 1, 2, 3 \,. \tag{10.11}$$

С други думи коефициентите на Ламе показват на какво (инфинитезимално) разстояние се придвижваме по координатните линии, ако дадем (също така инфинитезимално) нарастване на съответната криволинейна координата.

Коефициентите на Ламе позволяват да намерим също така и векторите на дуалния локален базис за ортогонална система именно

$$\boldsymbol{a}^i = \frac{1}{H_i} \, \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i^2} \, \boldsymbol{a}_i \quad \left( \not{\Sigma}_i \right) \,. \tag{10.12}$$

Последното равенство се проверява веднага с помощта на дефинициите на дуалния базис (2.3) и на коефициентите на Ламе (10.9).

Да отбележим попътно, че от (10.11) следва формулата за елементарния обем при интегриране в (ортогонална) криволинейна координатна система $q_i$. Наистина да дадем нараствания $\mathrm{d}q_i^0$ на коор-

[1] Да обърнем внимание, че едно и също означение $\boldsymbol{e}_i$ се използва и за ортонормирания базис на декартовата система $Ox_1x_2x_3$, вж. (10.1), и за ортонормирания локален базис, вж. (10.10). Това няма да доведе до двусмисленост тъй като всеки път ще указваме или явно кой от двата базиса се има предвид, или това ще е ясно от контекста.

динатите $q_i$, $i = 1, 2, 3$, в дадената точка $M_0$. Тогава елементарният обем ще представлява правоъгълен паралелепипед със страни $\mathrm{d}s_i = H_i\,\mathrm{d}q_i^0$, $i = 1, 2, 3$, и следователно с обем

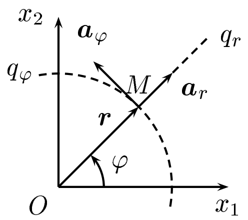
$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = H_1 H_2 H_3\,\mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3\,. \tag{10.13}$$

Дясната страна в (10.13) е именно елементът на обема в координатната система $q_i$.

**10.3. Примери на криволинейни координатни системи**. Да припомним тук най-често използваните криволинейни координатни системи в конкретните задачи.

а) *Полярни координати* $(r, \varphi)$ *в равнината.* В този случай

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\varphi\,, \quad x_2 = r\sin\varphi\,, \\ &r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,, \end{aligned} \tag{10.14}$$




Фиг. 10.3. Полярни координати

вж. фиг. 10.3. Полярният ъгъл $\varphi$ се отчита от фиксирана ос (т. нар. *полярна ос*), съвпадаща в случая с $Ox_1$; $r$ е дължината на радиус-вектора $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, на точката $M$ спрямо фиксирания полюс $O$. Очевидно, $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Координатните линии $r = \mathrm{const}$ са концентрични окръжности с център в полюса $O$; линиите $\varphi = \mathrm{const}$ са полуосите, излизащи от $O$, вж. фиг. 10.3. Давайки нарастване $\mathrm{d}r$, ние се преместваме по $r$-линията на същото разстояние $\mathrm{d}s_r = \mathrm{d}r$. На свой ред, при нарастване на ъгъла $\varphi$ с $\mathrm{d}\varphi$ се преместваме по $\varphi$-линията на разстояние $\mathrm{d}s_\varphi = r\,\mathrm{d}\varphi$. Следователно коефициентите на Ламе за полярните координати са

$$H_r = 1\,, \quad H_\varphi = r\,, \tag{10.15}$$

вж. (10.11).

б) *Цилиндрични координати* $(r, \varphi, z)$. В този случай

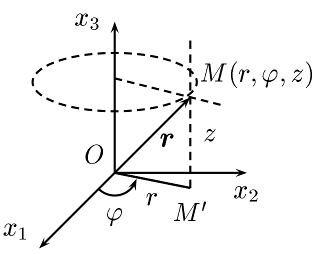
$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\varphi\,, \quad x_2 = r\sin\varphi\,, \quad x_3 = z\,, \\ &r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,. \end{aligned} \tag{10.16}$$

— проектираме точката $M$ в равнината $Ox_1x_2$ и определяме положението на проекцията ѝ $M'$ с помощта на полярните координати $(r, \varphi)$ в същата равнина (с полярна ос $Ox_1$). Координатата $z$ е „височината“ на точката $M$ над същата равнина. Очевидно $r \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$.

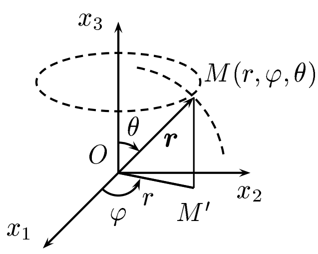
Тук $r$-линиите са полуосите с начало върху оста $Ox_3$, успоредни на равнината $Ox_1x_2$; $\varphi$-линиите са окръжности с център върху $Ox_3$, успоредни на същата равнина $Ox_1x_2$. Коефициентите на Ламе за цилиндричните координати са

$$H_r = 1\,, \quad H_\varphi = r\,, \quad H_z = 1\,, \tag{10.17}$$

вж. отново (10.11).




Фиг. 10.4. Цилиндрични координати




Фиг. 10.5. Сферични координати

в) *Сферични координати* $(r, \varphi, \theta)$. В този случай $r = |\boldsymbol{r}|$ е дължината на радиус-вектора, $\theta$ е ъгълът, който сключва радиус-вектора с оста $Ox_3$, а $\varphi$, както и при цилиндричните координати, е ъгълът между оста $Ox_1$ и вектора $\overrightarrow{OM'}$, където $M'$ е проекцията на $M$ в равнината $Ox_1x_2$, вж. фиг. 10.5. Очевидно

$$\begin{gathered} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi\,, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi\,, \quad x_3 = r\cos\theta\,, \\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \quad \theta = \arccos\frac{x_2}{r}\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,. \end{gathered} \tag{10.18}$$

Тук $r$-линиите са полуосите с начало в полюса $O$; $\varphi$-линиите са окръжности с център върху $Ox_3$, успоредни на равнината $Ox_1x_2$; $\theta$-линиите са окръжности с център в $O$, перпендикулярни на равнината $Ox_1x_2$. Коефициентите на Ламе за сферичните координати на свой ред са

$$H_r = 1\,, \quad H_\varphi = r\sin\theta\,, \quad H_\theta = r\,. \tag{10.19}$$

**10.4. Векторни и тензорни полета — безкоординатна дефиниция**. Нека във всяка точка $M$ на областта $\Omega$ е зададен вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(M)$. Тогава казваме, че в $\Omega$ е дефинирано *векторно поле.* Аналогично, ако със всяка точка $M$ е свързан ($p$-валентен) тензор $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(M)$, говорим за ($p$-валентно) *тензорно поле* в $\Omega$. В частност, при $p = 0$ имаме скаларно поле в $\Omega$ — зададена е скаларната функция $f = f(M)$.

Подчертаваме, че горната дефиниция е *безкоординатна* в смисъл, че в нея не е намесен конкретен избор на криволинейна координатна система в областта $\Omega$ (нещо повече, такава система не е даже спомената). Това е аналогично на безкоординатната дефиниция на вектора и на поливалентния тензор, вж., съответно, § 2.1, дефиниция 3.1 и дефиниция 8.1, в които изборът на конкретен базис също не се намесва.

Доколкото всяка точка $M \in \Omega$ се определя от своя радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ спрямо фиксиран полюс, то скаларното поле от математическа гледна точка е просто скаларна функция на векторен аргумент, векторното поле е векторна функция на векторен аргумент, и т. н. Терминът „поле“ има физически произход.

Да отбележим, че със скаларни, векторни и тензорни полета ще се сблъскваме непрекъснато по-нататък при изучаването на деформируемите среди. Интерпретацията им е най-различна. Например, скаларни полета са плътността на средата, температурата, обемното разширение (дилатацията) и др. Векторни са полетата на външните сили, на преместването на частиците или на тяхната скорост, топлинния поток и др. По естествен начин се появяват полетата на тензора на напрежението, на деформацията или на скоростта на деформация и пр.

**10.5. Векторни и тензорни полета — координатна дефиниция**. Нека $q_i$ е криволинейна координатна система с вектори на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, 2, 3$. Да разложим дадено векторно поле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ по векторите на този базис

$$\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{a}_i\,, \quad u^i = u^i(q_1, q_2, q_3) \tag{10.20}$$

— подчертаваме, че в последното разлагане както коефициентите $u^i(q_p)$, така и векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$ са различни в различните точки.

Нека $q_{i'}$ е друга криволинейна координатна система с вектори на локалния базис $\boldsymbol{a}_{i'}$, $i' = 1, 2, 3$, която ще наричаме „нова“. (По тази логика $q_i$ е „старата“ система, аналогично на § 2.7.)

Да разложим сега векторното поле $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ по локалните базиси и на новата, и на старата системи:

$$\boldsymbol{u} = u^i\, \boldsymbol{a}_i = u^{i'}\, \boldsymbol{a}_{i'}$$

и да и попитаме каква е връзката между компонентите $u^i$ и $u^{i'}$. За да отговорим на този въпрос следва първо да видим как са свързани помежду си векторите на двата локални базиса.

За целта забелязваме, че щом всяка една от системите $q_i$ и $q_{i'}$ определя еднозначно положението на точките $M \in \Omega$, то

$$q_{i'} = q_{i'}\left(q_i\right) \;, \quad q_i = q_i\left(q_{i'}\right) \tag{10.21}$$

— всяка една от координатите $q_i$ се изразява взаимно еднозначно чрез $q_{i'}$ и обратно. Оттук

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{i'} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_{i'}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_{i'}} \,, \\ \boldsymbol{a}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \sum_{i'=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_{i'}} \frac{\partial q_{i'}}{\partial q_i} \,, \end{aligned} \tag{10.22}$$

както следва от правилото за диференциране на сложна функция. Преписваме (10.22) във вида

$$\boldsymbol{a}_{i'} = A^i_{i'}\, \boldsymbol{a}_i \;, \quad \boldsymbol{a}_i = A^{i'}_i\, \boldsymbol{a}_{i'} \;, \tag{10.23}$$

където са въведени матриците на частните производни

$$A^i_{i'} = \frac{\partial q_i}{\partial q_{i'}} \,, \quad A^{i'}_i = \frac{\partial q_{i'}}{\partial q_i} \,, \quad i, i' = 1, 2, 3 \,. \tag{10.24}$$

Доколкото двете преобразования $q_{i'} = q_{i'}\left(q_j\right)$ и $q_i = q_i\left(q_{j'}\right)$ са взаимно обратни, вж. (10.21), същото е вярно и за двете матрици $\|A^i_{i'}\|$ и $\|A^{i'}_i\|$. Но (10.23) съвпада с закона (2.15) за преобразуването на базиса във векторна пространство. Единствената разлика е в това, че докато в (2.15) матриците $\|A^i_{i'}\|$ и $\|A^{i'}_i\|$ са фиксирани, тук те са *различни в различните* точки от областта $\Omega$. Затова можем да повторим дословно разсъжденията от § 2.8, които водят до търсената връзка между компонентите на векторното поле $\boldsymbol{u}$ в двата базиса

$$u^{i'} = A^{i'}_i u^i = \sum_{i=1}^{3} u^i \frac{\partial q_{i'}}{\partial q_i} \,. \tag{10.25}$$

Това е *векторният закон* за преобразуване на компонентите на векторно поле при смяна на криволинейната координатна система. Още един път подчертаваме пълната му аналогия със закона (2.19) за преобразуване на компонентите на вектор при смяна на базис, с единствената разлика, че матриците $\|A^i_{i'}\|$ и $\|A^{i'}_i\|$ тук са вече променливи, вж. (10.24).

На свой ред законът (10.25) позволява да дефинираме координатно векторното поле по следния очевиден начин, аналогично на дефиницията 2.1 на вектора.

**Дефиниция 10.1**. *Векторното поле е наредена двойка* $(q_i, u^i)$, *състояща се от криволинейна координатна система* $q_i$ *и функциите* $u^i = u^i(q_p)$, *наречени (контравариантни) компоненти на полето в тази система. При смяна на координатната система по закона* (10.21), *компонентите* $u^i$ *се сменят по векторния закон* (10.25).

Зад дефиницията 10.1 отново се крие *инвариантността* на понятието векторно поле. Това е обект, който *не зависи* от избора на криволинейната координатна система. Тук може да се повтори практически дословно целият коментар от края на § 2.8. Аналогична е и дефиницията на тензорно поле — в дефиницията 8.1 на поливалентния тензор компонентите $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ сега са функции на криволинейните координати $q_i$; при смяна на криволинейната координатна система те се преобразуват по тензорния закон (8.6), в който матриците $\|A^i_{i'}\|$ и $\|A^{i'}_i\|$ са зададени в (10.24), и т. н. и т. н.

## § 11. Оператор градиент. Набла-смятане на Хамилтън

В този параграф ще въведем основните диференциалните операции над скаларни и векторни полета ще изразим компонентите им в декартова координатна система и ще обсъдим най-важните им свойства.

**11.1. Производна по направление**. Ако $f = f(x)$ е скаларна функция на една скаларна променлива, то скоростта на изменението на $f$ в околност на точката $x_0$ се характеризира с производната $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$, пресметната в същата точка $x_0$.

Нека

$$f = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3,$$

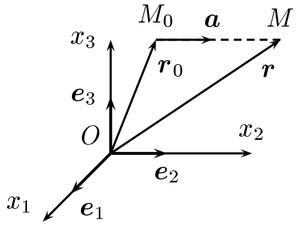
е скаларна функция, дефинирана в област $\Omega \subset \Re^3$ на тримерното пространство $\Re^3$; $\boldsymbol{r}$ е радиус-векторът на точка с декартови координати $(x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{e}_i$ са векторите на ортонормирания базис, определен от осите $Ox_i$, $i = 1, 2, 3$, вж. фиг. 11.1.

Фиксираме точка $M_0$ с радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ и разглеждаме изменението на функцията $f = f(\boldsymbol{r})$ върху правата $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}$, $\lambda \in \Re$, при зададен вектор $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Върху тази права $f = f(\boldsymbol{r})$ се превръща във функция на скаларния аргумент $\lambda$:

$$f(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{a}) = f_a(\lambda)\,.$$

Въвеждаме производната

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\, f_a(\lambda)\,\Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\boldsymbol{r}_0+\lambda\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{r}_0)}{\lambda} = \lim_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{|MM_0|}\,, \tag{11.1}$$




Фиг. 11.1. Производна по направление

вж. фиг. 11.1. Ако векторът $\boldsymbol{a}$ е единичен, $|\boldsymbol{a}| = 1$, то $\mathrm{d}f/\mathrm{d}a$ се нарича *производна на функцията $f(\boldsymbol{r})$ по направлението $\boldsymbol{a}$*. Тази производна определя скоростта на изменението на $f(\boldsymbol{r})$ по направлението, определено от вектора $\boldsymbol{a}$.

Ако векторът $\boldsymbol{a}$ не е единичен, то очевидно

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = a\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}e}\,, \quad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}\,, \quad |\boldsymbol{e}| = 1\,. \tag{11.2}$$

За да характеризираме скоростта на изменение на $f(\boldsymbol{r})$ в дадената точка $M$, е необходимо да знаем производната ѝ по *всички* възможни направления. Предвид (11.2) това е еквивалентно на задаването на съответствието

$$\boldsymbol{a} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}\,, \quad \forall\,\boldsymbol{a} \neq 0\,. \tag{11.3}$$

Този именно факт съществено отличава многомерния от едномерния случай (в последния както вече споменахме е достатъчна само производната $f'(x_0)$ за да опишем скоростта на изменението на $f(x_0)$ в точката $x_0$.)

Оказва се, че съответствието (11.3) е линейно: съществува вектор $\operatorname{grad} f$, дефиниран с равенството

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\boldsymbol{e}_3\,, \tag{11.4}$$

така че

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad} f = a_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + a_3\,\frac{\partial f}{\partial x_3}\,. \tag{11.5}$$

Формулата (11.5) е просто следствие на дефиницията (11.1) и на правилото за диференциране на сложна функция. (Проверете!)

От (11.5) следва, че посоката на вектора $\operatorname{grad} f$ съвпада с посоката на най-бързото нарастване на функцията в дадената точка.

**Упражнение 11.1.** *Повърхнините* $f(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const}$ *се наричат повърхнини на ниво за скаларната функция* $f(\boldsymbol{r})$*. Покажете, че векторът* $\operatorname{grad} f$*, пресметнат в коя да е точка* $M$*, е насочен винаги по нормала към повърхнината на ниво, минаваща през* $M$*, в посока на нарастването на* $f(\boldsymbol{r})$*.*

Да отбележим също и формулите

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi\,, \tag{11.6}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{11.7}$$

$$\operatorname{grad} F(\varphi) = F'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{11.8}$$

които са очевидно следствие от дефиницията на градиента (11.4).

**11.2. Набла-смятане**. Въвеждаме, следвайки Хамилтън, абстрактния вектор $\nabla$ (*набла*):

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\,. \tag{11.9}$$

С други думи, това е „вектор“, чиито „компоненти“ в декартова координатна система $Ox_1x_2x_3$ са $\partial/\partial x_i$, $i = 1, 2, 3$.

Оказва се, че в редица случаи е много удобно да се третира абстрактният символ $\nabla$ като истински вектор. В това се състои основната идея на *набла-смятането* на Хамилтън, към чието изложение и най-прости приложения ще преминем сега.

Ще отбележим, че при подобно разглеждане няма значение дали ще поставим $\nabla$ вляво или вдясно от символа на функцията $f$: и в двата случая резултатът ще бъде градиента на $f$

$$\nabla f = f\nabla = \operatorname{grad} f\,, \tag{11.10}$$

вж. (11.5).

Да се спрем на няколко примера, свързани с пресмятането на градиента за някои най-прости функции.

**Пример 11.1.** Нека $f(\boldsymbol{r})$ е сферически-симетрична функция, т. е. тя зависи само от дължината $r$ на радиус-вектора:

$$f(\boldsymbol{r}) = f(r)\,, \quad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,. \tag{11.11}$$

Да пресметнем $\nabla f$.

Забелязваме първо, че $\partial r/\partial x_i = x_i/r$, $i = 1, 2, 3$. Оттук

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\,\frac{x_i}{r}\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{11.12}$$

Следователно

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\boldsymbol{e}_i = \frac{f'(r)}{r}\sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = f'(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,,$$

т. е.

$$\nabla f(r) = f'(r)\,\boldsymbol{e}_r\,, \quad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,. \tag{11.13}$$

Тук $\boldsymbol{e}_r$ е единичният вектор на радиус-вектора $\boldsymbol{r}$.

**Пример 11.2.** Да пресметнем $\nabla f$, където $f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}$ с постоянен вектор $\boldsymbol{G}$.

Имаме

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3} x_k G_k = \sum_{k=1}^{3} G_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i}\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Но

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}\,, \quad \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{ако } k = i\,, \\ 0, & \text{ако } k \neq i\,, \end{cases} \tag{11.14}$$

където $\delta_{ki}$ е т. нар. *символ на Кронекер*. Следователно

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} G_k \delta_{ki} = G_i\,, \quad i = 1, 2, 3$$

(при сумирането по $k$ остава само членът с индекс $k = i$). Тогава

$$\nabla(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}\,. \tag{11.15}$$

**Пример 11.3.** Нека $f(\boldsymbol{r}) = h(r)\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}$ със сферически-симетрична функция $h(r)$ и фиксиран вектор $\boldsymbol{G}$. Да пресметнем $\nabla f$.

С помощта на (11.7) намираме

$$\nabla f(\boldsymbol{r}) = \nabla(h(r)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})) = (\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})\nabla h(r) + h(r)\nabla(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})\,.$$

Използването на (11.13) и (11.7) в последната формула дава

$$\nabla(h(r)(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r})) = h'(r)\,\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{r}) + h(r)\boldsymbol{G}\,. \tag{11.16}$$

**11.3. Лапласиан**. В рамките на тази трактовка на наблата нека видим първо какво представлява „квадратът на дължината“ на $\nabla$, т. е. величината, която стандартно се означава с $\Delta$ или $\nabla^2$:

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla\,. \tag{11.17}$$

Съгласно (11.4)

$$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\,\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\,, \tag{11.18}$$

т. е. $\Delta f$ е сумата от вторите производни на функцията $f(x_1, x_2, x_3)$ спрямо аргументите ѝ $x_1$, $x_2$, $x_3$. (Естествено в $n$-мерния случай се сумират вторите производни $\partial^2 f/\partial x_i^2$ на $f$ по $i$ от 1 до $n$.)

Скаларният оператор $\Delta$, който на функцията $f$ съпоставя $\Delta f$, се нарича *оператор на Лаплас* или *лапласиан*. Съответно уравнението $\Delta f = 0$ се нарича *уравнение на Лаплас*; то се появява в много класически задачи на математическата физика, например в уравнението на топлопроводността, което ще изведем и обсъдим в § 21.3. На свой ред функции $f$, за които $\Delta f = 0$, се наричат *хармонични*.

**Пример 11.4.** Да предположим, че скаларната функция $f(\boldsymbol{r})$ е сферически-симетрична, вж. (11.11). Търсим лапласиана на $f(\boldsymbol{r})$.

Пресмятаме нужните ни частни производни с помощта на (11.12):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= f''(r)\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{x_i}{r} + f'(r)\,\frac{1}{r} - f'(r)\,\frac{x_i}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\\ &= f''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + f'(r)\,\frac{1}{r} - f'(r)\,\frac{x_i^2}{r^3}\,, \quad i = 1,2,3\,.\end{aligned}$$

Сумираме производните $\partial^2 r/\partial x_i^2$ по $i$ от 1 до 3

$$\begin{aligned}\Delta f(r) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\\ &= f''(r)\,\frac{1}{r^2}\,\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + \frac{3f'(r)}{r} - \frac{f'(r)}{r^3}\,\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.\end{aligned} \tag{11.19}$$

Но $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = r^2$ и от (11.19) сега намираме търсената формула за лапласиана на функцията $f(r)$:

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} = \frac{1}{r^2}\,\Big(r^2 f'(r)\Big)'\,. \tag{11.20}$$

В § 12.3 ще видим, че (11.20) е частен случай на общата формула за лапласиана на скаларна функция в ортогонална криволинейна координатна система.

**Упражнение 11.2.** *Обобщете формулата* (11.20) *за скаларна сферически-симетрична функция от $n$ променливи.*

Отг.: Ако $f = f(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, то

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\,\left(r^{n-1} f'(r)\right)'\,, \quad n \geq 2\,.$$

**Упражнение 11.3.** *Намерете всички хармонични сферически-симетрични функции от $n$ променливи, т. е. общото решение на уравнението $\Delta f(r) = 0$ в $\Re^n$.*

Отг.:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2\,, & \text{ако } n \geq 3\,, \\ C_1 \ln r + C_2\,, & \text{ако } n = 2\,; \end{cases}$$

тук $C_1$ и $C_2$ са произволни константи.

**Упражнение 11.4.** *Покажете, че ако една сферически-симетрична функция е хармонична и ограничена върху цялото пространство $\Re^n$, $n \geq 2$, то тя е константа.*

**11.4. Дивергенция на векторно поле**. Нека

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$$

е векторна функция на векторния аргумент $\boldsymbol{r}$. Такива функции се наричат също *векторни полета*; те се появяват често в различен контекст в конкретни приложения. (Например силата, преместването на точка в деформируема среда, скоростта на точка от флуид и т. н. са все векторни полета.) В декартова координатна система

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} u_k(x_1, x_2, x_3)\,\boldsymbol{e}_k\,. \tag{11.21}$$

Да отбележим, че лапласианът на $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ се намира по очевиден начин от (11.18):

$$\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{k=1}^{3} \Delta u_k(x_1, x_2, x_3)\, \boldsymbol{e}_k\,. \tag{11.22}$$

Пример на векторно поле е и градиентът

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \nabla f(\boldsymbol{r}) \tag{11.23}$$

на всяка скаларна функция. Такива векторни полета се наричат *потенциални*, а функцията $f(\boldsymbol{r})$ е съответният ѝ *скаларен потенциал*. От дефиницията (11.23) впрочем е ясно, че потенциалът $f(\boldsymbol{r})$ е дефиниран с точност до произволна адитивна константа.

Да „умножим“ скаларно $\nabla$ с векторното поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, т. е. да разгледаме (скаларната) функция

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{11.24}$$

— тя се нарича *дивергенция* на полето $\boldsymbol{u}$ и често се записва и като $\operatorname{div}\boldsymbol{u}$.

От дефинициите (11.17) и (11.23) се вижда, че

$$\nabla\cdot\nabla f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f, \tag{11.25}$$

т. е. дивергенцията на потенциалното поле е просто лапласианът на неговия потенциал.

**11.5. Свойство на потенциални полета**. Потенциалните полета притежават едно важно свойство, свързано с криволинейните интеграли от вида

$$\int_\gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\gamma \left(u_1\,\mathrm{d}x_1 + u_2\,\mathrm{d}x_2 + u_3\,\mathrm{d}x_3\right)\,, \tag{11.26}$$

където $\gamma$ е крива, свързваща фиксираните точки $M'$ и $M''$ от дефиниционната област на дадено поле $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. За произволно векторно поле стойността на този интеграл зависи от кривата $\gamma$, свързваща $M'$ и $M''$.

Ако полето обаче е потенциално, то

$$\begin{aligned}\int_\gamma \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3\right)\\ &= \int_\gamma \mathrm{d}f = f(M'') - f(M')\,.\end{aligned} \tag{11.27}$$

Тук $\mathrm{d}f$ е пълният диференциал на функцията $f$. Следователно интегралът (11.27) е *инвариантен* спрямо пътя $\gamma$. По-точно, той зависи само от стойностите на $f$ в началната и крайната точки $M'$ и $M''$ и не зависи от пътя, съединяващ тези точки. С други думи,

$$\int_{\gamma_1} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\gamma_2} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \quad \text{ако} \quad \boldsymbol{u} = \nabla f\,,$$

за *всеки* два пътя $\gamma_1$ и $\gamma_2$, съединяващи $M'$ и $M''$ (или, еквивалентно, $\oint_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ при интегриране по произволна затворена крива $\gamma$).

Вярно е и обратното: ако интегралът

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

не зависи от кривата $\gamma$, а само от началната и крайната ѝ точки, и дефиниционната област $\Omega$ на $\boldsymbol{u}$ е едносвързана (т. е. в нея няма „дупки“), то полето е потенциално. Еквивалентно,

$$\boldsymbol{u} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad \oint_\gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

за всяка затворена крива $\gamma$.

Да отбележим, че ако $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$ е силово поле, то $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ е т. нар. *елементарна работа*, т. е. работата, която извършва силата $\boldsymbol{F}$ при безкрайно малко („елементарно“) преместване $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ на материална точка. Интегралът

$$A_{\overset{\smile}{M'M''}} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

тогава представлява работата, извършена от силите на полето при движението на точката от $M'$ до $M''$ по кривата $\gamma = \overset{\smile}{M'M''}$. Ако тази работа не зависи от пътя $\gamma$, а само от началното и крайното положение, то полето $\boldsymbol{F}$ е потенциално:

$$\boldsymbol{F} = \nabla U\,, \quad \mathrm{d}U = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \tag{11.28}$$

т. е. $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ (елементарната работа) е точен диференциал на функцията $U$. В разглеждания случай функцията $U$ се нарича *потенциал* на силата, а $V = -U$ — *потенциална енергия*. В курсовете по механика се показва, че при движението на материална точка в потенциално силово поле се запазва пълната енергия $E$:

$$E = T + V = \mathrm{const}\,, \tag{11.29}$$

където $T = \frac{1}{2}mv^2$ е кинетичната енергия на точката. Този факт обяснява важността на потенциалните полета в класическата механика. Именно, за такива полета съществува нетривиалния интеграл на движението (11.29) с ясен физически смисъл (вж. [6, § 38] за подробности).

**Пример 11.5.** Най-често срещаните в приложенията силови полета са централните, в които големината на силата зависи само от разстоянието до полюса:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\boldsymbol{e}_r\,, \quad \boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

Покажете, че такива полета са потенциални и намерете потенциалната функция.

*Решение.* Съгласно (11.28)

$$\mathrm{d}U = F(r)\,\frac{\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{r}\,. \tag{11.30}$$

Записваме очевидното равенство $r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ и пресмятаме диференциалите на двете му страни:

$$2r\,\mathrm{d}r = 2\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \quad \text{т. е.} \quad \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = r\,\mathrm{d}r\,.$$

Внасяме последното равенство в (11.30):

$$\mathrm{d}U = F(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Оттук се вижда, че потенциалната функция наистина съществува, като зависи само от дължината $r$ на радиус-вектора. Нещо повече, тази функция представлява примитивната на $F(r)$:

$$U(r) = \int F(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

**Упражнение 11.5.** *Намерете потенциалната функция за нютоновото поле на привличане*

$$F(r) = -\frac{\mu m}{r^2}\,.$$

*Тук $m$ е масата на точката, движеща се в нютоновото поле, а $\mu$ е т. нар. гаусова постоянна на полето (пропорционална на масата на привличащия център).*

Отг.: $U(r) = \dfrac{\mu m}{r} + \mathrm{const}\,.$

**11.6. Ротация на векторно поле**. Операторът набла освен скаларно може да се „умножи“ и векторно с полето $\boldsymbol{u}$. Резултатът е векторното поле, наречено *ротация* (или просто *ротор*) на $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \,. \tag{11.31}$$

(В англоезичната литература вместо $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ е прието означението $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}$.)

Компонентите на $\nabla \times \boldsymbol{u}$ в декартова система се намират по добре известното правило за разкриване на векторното произведение:

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_1(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) + \boldsymbol{e}_2(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) + \boldsymbol{e}_3(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \,. \tag{11.32}$$

Тук е използвано за краткост означението $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Често се използват още по-кратки означения, в които диференцирането се записва като индекс след запетая:

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \,, \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{и т. н.}$$

На свой ред, компонентите на ротора се записват по-компактно (в декартова система) с помощта на алтернираща символ, съгласно (8.27) и (8.28)

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} : (\boldsymbol{u}\nabla) \tag{11.33}$$

или

$$(\nabla \times \boldsymbol{u})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_k u_j = \varepsilon_{ijk} u_{j,k} \quad \left(\textstyle\sum_{j,k}\right) . \tag{11.34}$$

Заедно с $\boldsymbol{u}$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ е векторно поле, чиято ротация също може да се пресметне. Резултатът е т. нар. *биротация* (или *биротор*) на полето $\boldsymbol{u}$:

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \operatorname{Rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \boldsymbol{u}$$

— изредени са различните означения, които могат да се срещнат в литературата.

По формулата за разкриване на двойното векторно произведение (да я напомним: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, вж. (9.36)) биroторът се представя във вида

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}(\nabla \cdot \nabla) \,.$$

Тук третираме, съгласно възприетата в § 11.2 „идеология“, наблата като абстрактен вектор. Но $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, а $\boldsymbol{u}(\nabla \cdot \nabla) = (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u}$, вж. (11.10), и затова

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \Delta\boldsymbol{u}\,.$$

Последното равенство може да се срещне и в еквивалентния му вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta\,.$$

Аналогично на понятието потенциално поле въвеждаме полетата $\boldsymbol{u}$, които се представят във вида

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi}\,. \tag{11.35}$$

Те се наричат *соленоидални*, а функцията $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ в (11.35) — *векторен потенциал* на полето $\boldsymbol{u}$.

**11.7. Характеристика на потенциалните и соленоидалните полета**. В § 11.4 характеризирахме потенциалните полета чрез независимостта на криволинейния интеграл (11.26) от пътя $\gamma$. Съществува и друга тяхна характеризация, свързана с ротацията на полето. Именно, нека $\boldsymbol{u}$ се представя във вида (11.23). Тогава

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \nabla \times \nabla f = 0\,.$$

В рамките на набла-смятането този факт е очевиден: абстрактният вектор $\nabla$ се „умножава“ векторно сам със себе си и затова резултатът трябва да е нула. Това обаче има силата само на евристично разсъждение и следва да се провери директно от дефиницията на ротацията (11.32):

$$\nabla \times \nabla f = \boldsymbol{e}_1(\partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f) + \cdots = 0\,,$$

т. е. $\nabla \times \nabla f$ наистина се анулира като следствие от (11.9) и (11.32).

В случая на едносвързана област е вярно и обратното твърдение. С други думи

$$\boldsymbol{u} = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{11.36}$$

т. е. полето е потенциално тогава и само тогава, когато ротацията му е нулева.

Нека сега полето е соленоидално. Тогава

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) = 0,$$

което в рамките на набла-смятането отново е очевидно: векторът $\nabla \times \boldsymbol{\Phi}$ е „перпендикулярен“ на $\nabla$ и поради това, скаларно умножен с $\nabla$, дава нула. Това се вижда и от директната проверка:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi}) &= \partial_1(\partial_2\Phi_3 - \partial_3\Phi_2) \\ &\quad + \partial_2(\partial_3\Phi_1 - \partial_1\Phi_3) + \partial_3(\partial_1\Phi_2 - \partial_2\Phi_1) = 0\,,\end{aligned}$$

вж. (11.24) и (11.31). Отново в случая на едносвързана област е вярно и обратното твърдение:

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{\Phi} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0\,, \tag{11.37}$$

т. е. полето е соленоидално тогава и само тогава, когато дивергенцията му е нулева.

Доказателство на критериите за потенциалност (11.36) и соленоидалност (11.37) на едно векторно поле могат да се намерят например в [7, § 16] или [14, § 14].

**11.8. Теорема на Хелмхолц**. *Произволно векторно поле, дефинирано в едносвързана област и достатъчно гладко, е сума от потенциално и соленоидално* поле:

$$\boldsymbol{u} = \nabla f + \nabla \times \boldsymbol{\Phi}\,. \tag{11.38}$$

*Идея за доказателство.* Нека $f$ е частно решение на уравнението

$$\Delta f = \nabla \cdot \boldsymbol{u}\,. \tag{11.39}$$

Такова решение се дава например от т. нар. *интеграл на Поасон*:

$$f(\boldsymbol{x}) = -\int_\Omega \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\,\mathrm{d}V_y\,,$$

където $\Omega$ е дефиниционната област на $\boldsymbol{u}$, вж. [14, стр. 390] или [5, стр. ...]. Разглеждаме функцията $\boldsymbol{u} - \nabla f$; дивергенцията ѝ очевидно е нула, предвид (11.39). От (11.37) тогава следва, че $\boldsymbol{u} - \nabla f$ е соленоидално и затова $\boldsymbol{u} - \nabla f = \nabla \times \boldsymbol{\Phi}$, вж. (11.37).

**11.9. Формула на Гаус**. Нека $\boldsymbol{u}$ е векторно поле, $\mathcal{V}$ е област в $\Re^3$ с граница $\mathcal{S}$, вж. фиг. 11.2. Разглеждаме интеграла

$$\int_\mathcal{S} u_n\,\mathrm{d}S = \int_\mathcal{S} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S\,. \tag{11.40}$$

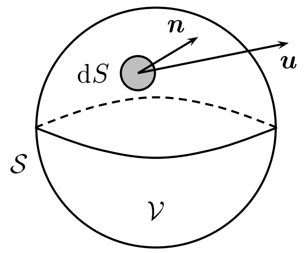
Тук $\boldsymbol{n}$ е единичният вектор на външната нормала към повърхнината $\mathcal{S}$, така че $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ е проекцията на $\boldsymbol{u}$ върху тази нормала. Интегралът (11.40) се нарича *поток на векторното поле* през повърхнината $\mathcal{S}$.

Произходът на този термин се крие в „хидродинамичната“ интерпретация на (11.40). Да си представим, че $\boldsymbol{u}$ е полето на скоростта в течност, преминаваща през $\mathcal{V}$. Тогава $u_n\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$ е количеството течност, която пресича елементарното лице $\mathrm{d}S$ от повърхнината $\mathcal{S}$ за време $\mathrm{d}t$, като по този начин влиза или излиза от него в зависимост от знака на $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}$. „Сумирайки“ по всички елементарни лица, получаваме интеграла (11.40), който по такъв начин представлява сумарното количество течност, преминаващо през обема $\mathcal{V}$ за време $\mathrm{d}t$.

Да отбележим впрочем, че ако няма приток или загуба на течността вътре в обема $\mathcal{V}$, то

$$\int_{\mathcal{S}} u_n\,\mathrm{d}S = 0\,.$$

Последното равенство означава, образно казано, че колкото течност се влива в обема, толкова изтича от него.




Фиг. 11.2. Поток на векторно поле

Оказва се, че потокът на векторното поле може да се изрази и чрез обемния интеграл на дивергенцията му с помощта на *формулата на Гаус*[2]

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V\,. \tag{11.41}$$

Формулата на Гаус играе централна роля в многомерния анализ и приложенията му, свързани с математическото моделиране. Но преди да скицираме доказателството ѝ, нека обърнем внимание на два важни факта, свързани с тази формула.

Първо, тя може да се разглежда като многомерно обобщение на класическата формула на Лайбниц-Нютон

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\Big|_a^b\,,$$

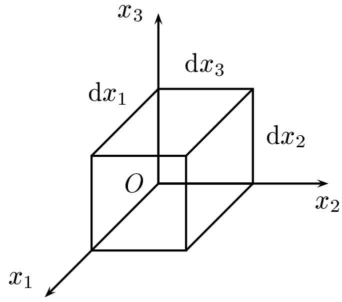
в която ролята на $\mathcal{V}$ играе интервалът $(a,b)$, границата $\mathcal{S}$ са точките $a$ и $b$, понятието външна нормала губи смисъл, а интегралът при тази граница е просто $f(b) - f(a)$.

Второ, формулата на Гаус е в сила не само за векторни полета. В най-простия си вид (11.41), който единствено ще се обсъжда и използва тук, тя илюстрира най-съществено в тази формула. Именно, за да се

[2]или още на Гаус-Остроградски (в руската литература).

премине от обемен към повърхнинен интеграл, операторът набла следва да се замени с единичния вектор на външната нормала. По този начин формулата на Гаус в по-общия си вид схематично може да се изрази с формалното равенство

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} = \int_{\mathcal{V}} \nabla\,.$$




Фиг. 11.3

В частност, за скаларно поле $f$ имаме

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} f\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla f\,\mathrm{d}V$$

или, за векторно поле $\boldsymbol{u}$ например,

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$$

и т. н.

Ще скицираме доказателството на формулата (11.41), акцентирайки само върху основните идеи. (Детайлно доказателство може да се намери например в [7, § 14] или [14, § 12].)

Започваме с разглеждането на елементарен паралелепипед, чиито ръбове $\mathrm{d}x_k$ са успоредни на декартовите оси $Ox_k$, $k = 1, 2, 3$, а върхът му $O$ е в точката $(x_1, x_2, x_3)$, вж. фиг. 11.3. Да означим с $\mathcal{S}_k$ двете стени на паралелепипеда, перпендикулярни на оста $Ox_k$; техните външни нормали са съответно $+\boldsymbol{e}_k$ и $-\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогава повърхнината на паралелепипеда е

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$$

и съответно потокът (11.40) на векторното поле е

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_1} u_1\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_2} u_2\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_3} u_3\,\mathrm{d}S\,.$$

Но

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_1} u_1\,\mathrm{d}S &= \Big[ u_1(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2, x_3) \Big]\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\mathrm{d}V\,,\end{aligned}$$

тъй като паралелепипедът е безкрайно малък с обем $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$, а стойностите на $x_1$-координатата върху задната и предната му стени, перпендикулярни на оста $Ox_1$, са съответно $x_1$ и $x_1 + \mathrm{d}x_1$. Аналогични са изразите и за $\int_{\mathcal{S}_2} \dots$ и $\int_{\mathcal{S}_3} \dots$

Като сумираме така намерените изрази за интегралите $\int_{\mathcal{S}_k} \dots$, $k = 1, 2, 3$, и използваме още веднъж инфинитезималността на паралелепипеда, получаваме

$$\int_{\mathcal{S}} u_n \, \mathrm{d}S = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V \, .$$

С това формулата на Гаус е доказана за всеки елементарен паралелепипед.

Да разбием произволна област $\mathcal{V}$ на елементарни паралелепипеди:

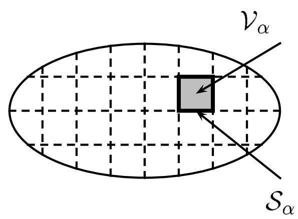
$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{V}_\alpha \, ,$$

вж. фиг. 11.4, и да напишем формулата (11.41) за всеки от тях:

$$\int_{\mathcal{S}_\alpha} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}_\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V \, .$$

Сумираме по $\alpha$. Предвид адитивността на обемния интеграл имаме

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{V}_\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V \, .$$



Фиг. 11.4

На свой ред

$$\sum_{\alpha} \int_{\mathcal{S}_\alpha} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}S$$

— остава само интегрирането по повърхнината $\mathcal{S}$ на обема, тъй като потоците през частите от повърхнините вътре в обема взаимно се унищожават. (Единичните нормали към съответните стени на два съседни допиращи се паралелепипеда, вътрешни за областта, са очевидно равни и срещуположно насочени.)

## § 12. Диференциални операции в криволинейни координати

**12.1. Градиент на скаларно поле**. Дефиницията (11.5) на градиента чрез производната по направление позволява лесно да намерим израза му не само за декартова, но и за произволна криволинейна координатна система $q_i$. За целта е достатъчно да видим, че

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial q_i}\,, \tag{12.1}$$

тъй като в посоката на вектора $\boldsymbol{a}_i$ се мени само координатата $q_i$, $i = 1, 2, 3$. Оттук

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \boldsymbol{a}^i\,. \tag{12.2}$$

В частност, ако системата $q_i$ е ортогонална, то векторите от дуалния базис са пропорционални на тези от изходния и затова

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}\, \boldsymbol{e}_i\,, \tag{12.3}$$

вж. (10.12), където $\boldsymbol{e}_i$ са векторите на ортонормирания локален базис.

**12.2. Градиент на векторно поле**. Нека сега $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ е векторна функция, дефинирана в област $\Omega \subset \mathcal{E}_3$ на тримерното пространство $\mathcal{E}_3$. Аналогично на случая на скаларна функция (§ 11.1) можем да дефинираме производната

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\, \boldsymbol{u}_a(\lambda)\,\Big|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_0)}{\lambda} \\ &= \lim_{M\to M_0} \frac{\boldsymbol{u}(M) - \boldsymbol{u}(M_0)}{|MM_0|}\,, \end{aligned} \tag{12.4}$$

вж. фиг. 11.1, при зададени точка $M_0 \in \Omega$ и вектор $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$; тук $\boldsymbol{u}_a(\lambda) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \lambda \boldsymbol{a})$. Ако векторът $\boldsymbol{a}$ е единичен, вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}| = 1$, то $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/\mathrm{d}\boldsymbol{e}$ е *производната на* $\boldsymbol{u}$ *по направлението* $\boldsymbol{e}$.

Ако векторът $\boldsymbol{a}$ не е единичен, то очевидно

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} = a\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}e}\,, \quad \boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}\,, \quad |\boldsymbol{e}| = 1\,, \tag{12.5}$$

ср. (11.2)

За да характеризираме скоростта на изменение на $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ в дадената точка $M$, е необходимо да знаем производната ѝ по *всички* възможни направления. Предвид (12.5) това е еквивалентно на задаването на векторната функция:

$$\boldsymbol{a} \to \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a}, \quad \forall\, \boldsymbol{a} \in \mathcal{E}_3\,. \tag{12.6}$$

Както и в случая на скаларно поле (§ 11.1), лесно се проверява, че функцията (12.6) е линейно преобразование на $\mathcal{E}_3$. Поради това съществува двувалентен тензор $\nabla\boldsymbol{u}$, наречен *градиент* на $\boldsymbol{u}$, такъв че

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{a}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\,. \tag{12.7}$$

Формулата за диференциране на сложна функция, приложена към (12.4), показва, че компонентите на $\nabla\boldsymbol{u}$ в декартова система $Mx_1x_2x_3$ са частните производни

$$(\nabla\boldsymbol{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \partial_i\, u_j = u_{j,i}\,, \quad i,j = 1,2,3\,, \tag{12.8}$$

където $u_i$ са компонентите на $\boldsymbol{u}$ в дадената декартова система. Попътно в (12.8) са въведени и различни означения за частните производни, които често се използват в литературата.

За криволинейна координатна система $q_i$, разлагаме полето $\boldsymbol{u}$ по векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, т. е. $\boldsymbol{u} = u^i\,\boldsymbol{a}_i$. Тогава

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{u} = \nabla(u^i\,\boldsymbol{a}_i) &= (\nabla u^i)\otimes\boldsymbol{a}_i + u^i\,\nabla\boldsymbol{a}_i\\ &= \frac{\partial u^i}{\partial q_j}\,\boldsymbol{a}^j\boldsymbol{a}_i + u^i\,\nabla\boldsymbol{a}_i\end{aligned} \tag{12.9}$$

— използвахме формулата (12.2) за $\nabla u^i$. От (12.9) се вижда, че за пресмятането на$\nabla\boldsymbol{u}$ е необходимо да знаем $\nabla\boldsymbol{a}_i$.

Величините $\nabla\boldsymbol{a}_i$ представляват двувалентни тензори — те определят „скоростта“, с която се менят векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, когато се преместваме в пространството. Тензорите $\nabla\boldsymbol{a}_i$ се изразяват чрез т. нар. *символи на Кристофел*, които ще разгледаме по-подробно в § 13.

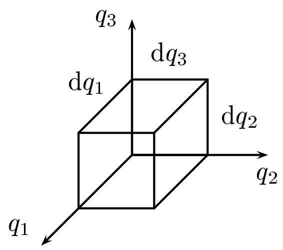
**12.3. Дивергенция на векторно поле в криволинейни координати**. Да разгледаме дивергенцията $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ на векторното поле $\boldsymbol{u}$.

Съгласно (12.9) имаме

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{a}_i\cdot\nabla u^i + u^i\,\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i\\ &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial q_i} + u^i\,\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i\,.\end{aligned}\tag{12.10}$$

Оказва се, че в ортогонална криволинейна система $q_i$ величините $\nabla\cdot\boldsymbol{a}_i$, а по такъв начин и дивергенцията на полето $\boldsymbol{u}$, могат да се пресметнат по прост начин, като използваме единствено формулата на Гаус без привличане на символите на Кристофел.

Фиксираме точка $M(q_1, q_2, q_3)$ и разглеждаме елементарния паралелепипед $\mathcal{V}$, образуван от дъгите $\mathrm{d}s_i$ на координатните линии $q_i$, $i = 1, 2, 3$, вж. фиг. 12.1. Дъгите $\mathrm{d}s_i$ се описват в резултат на зададените нараствания $\mathrm{d}q_i$ на координатите $q_i$ и затова $\mathrm{d}s_i = H_i\,\mathrm{d}q_i$, съгласно (10.11). Предвид предположената ортогоналност на криволинейната система $q_i$, обемът на паралелепипеда е




Фиг. 12.1. Към извода на (12.16)

$$\mathrm{d}V = H_1H_2H_3\,\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\,. \tag{12.11}$$

Тъй като той е безкрайно малък, можем да запишем

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{\mathrm{d}V}\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V \tag{12.12}$$

Прилагаме формулата на Гаус към интеграла (12.12):

$$\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{S}}u_n\,\mathrm{d}S\,,\quad u_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,,$$

$\boldsymbol{n}$ е единичната външна нормала.

Разбиваме шестте стени на паралелепипеда, т. е. повърхнината му $\mathcal{S}$, на три групи:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2\cup\mathcal{S}_3\,,$$

като всяка от тях, $\mathcal{S}_i$, се състои от двете стени, перпендикулярни на координатните линии $q_i$ (по-точно, на векторите на локалния базис $\boldsymbol{a}_i$), $i = 1, 2, 3$. Тогава

$$\int_{\mathcal{S}}u_n\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{S}_1}u_n\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_2}u_n\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{S}_3}u_n\,\mathrm{d}S\,. \tag{12.13}$$

Нека

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3\,, \tag{12.14}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ е ортонормираният локален базис, $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i/H_i$, $i = 1, 2, 3$.

Единичната нормала към двете стени, например, в $\mathcal{S}_1$, съвпада с $+\boldsymbol{e}_1$ (на предната стена) и с $-\boldsymbol{e}_1$ на задната. Следователно

$$\int_{\mathcal{S}_1} u_n\,\mathrm{d}S = u_1\,\mathrm{d}S_1\Big|_{q_1+\mathrm{d}q_1} - u_1\,\mathrm{d}S_1\Big|_{q_1}$$

— върху предната стена стойността на координатата $q_1$ е $q_1 + \mathrm{d}q_1$, съгласно конструкцията на елементарния паралелепипед, вж. фиг. 12.1. На свой ред

$$\mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_3 = H_2H_3\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3\,,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_1} u_n\,\mathrm{d}S &= \left(u_1H_2H_3\Big|_{q_1+\mathrm{d}q_1} - u_1H_2H_3\Big|_{q_1}\right)\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\\ &= \frac{\partial}{\partial q_1}\left(u_1H_2H_3\right)\,\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3\,.\end{aligned} \tag{12.15}$$

Обръщаме внимание, че коефициентите на Ламе *също зависят* от координатите $q_i$ и поради това имат *различни стойности* при $q_1$ и $q_1$ $+\mathrm{d}q_1$. Затова в (12.15) е отчетено, че произведението $H_2H_3$ е различно на предната и на задната стени, перпендикулярни на $\boldsymbol{e}_1$.

Аналогично пресмятаме потоците през двойките стени $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ и внасяме съответните резултатите, заедно с (12.15), в (12.13). Отчитайки и формулата за $\mathrm{d}V$, вж. (12.11), намираме окончателно

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\bigg\{&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(u_1H_2H_3\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(u_2H_3H_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(u_3H_1H_2\right)\bigg\}.\end{aligned} \tag{12.16}$$

Да забележим, че ако векторното поле $\boldsymbol{u}$ е зададено чрез компонентите си в локалния базис $\boldsymbol{a}_i$, то

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u^i\,\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{3} u^iH_i\,\boldsymbol{e}_i\,.$$

Оттук

$$u_i = H_iu^i\,,\quad i = 1, 2, 3\quad \left(\not\sum_i\right)\,.$$

Спрямо компонентите $u^i$ формулата (12.16) придобива един по-симетричен вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} (u^i \, H_1 H_2 H_3) \,. \tag{12.17}$$

Оттук, в частност, следват формулите за дивергенцията на векторите $\boldsymbol{e}_i$ на ортонормирания локален базис:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \, \frac{\partial \, (H_2 H_3)}{\partial q_1} \,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \, \frac{\partial \, (H_3 H_1)}{\partial q_2} \,, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \, \frac{\partial \, (H_1 H_2)}{\partial q_3} \,. \end{aligned} \tag{12.18}$$

Да изредим няколко частни случая на формулата (12.16) за конкретни координатни системи.

Например в полярни координати

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \, (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \,,$$

където $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$ (тъй като в случая $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, вж. (10.15)).

В цилиндрични координати

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + r \, \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \,,$$

вж. (10.17).

В сферични координати

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \, \frac{\partial \, (r^2 u_r)}{\partial r} & \\ & + \frac{1}{r \sin\theta} \, \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin\theta} \, \frac{\partial \, (u_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} \,, \end{aligned}$$

където $\boldsymbol{u} = u_r \boldsymbol{e}_r + u_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + u_\theta \boldsymbol{e}_\theta$ (тъй като в случая $H_r = 1$, $H_\varphi = r \sin\theta$, $H_\theta = r$).

**12.4. Лапласиан в криволинейни координати**. Нека $\boldsymbol{u} = \nabla f$ е потенциално поле. В ортогонална криволинейна система $q_i$ компонентите на $\nabla f$ имат познатия вид

$$u_i = \frac{1}{H_i} \, \frac{\partial f}{\partial q_i} \,, i = 1, 2, 3 \,,$$

вж. (12.3). Заедно с (12.16) това води до формулата за лапласиана в ортогоналната система $q_i$:

$$\Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\Bigg\{ \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\,\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\,\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\,\frac{\partial f}{\partial q_3}\right)\Bigg\}\,. \tag{12.19}$$

В частност, в полярни координати

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right\}, \tag{12.20}$$

а в сферични

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right\}. \tag{12.21}$$

В частния случай на сферически симетрична функция $f = f(r)$ последната формула съвпада с (11.20).

**12.5. Ротация в криволинейни координати**. Нека $q_i$ криволинейна координатна система. Тъй като координатите $q_i$ определят еднозначно положението на точките в пространството, съотношенията (10.3) са обратими, т. е.

$$q_i = q_i(x_j)\,, \quad i, j = 1, 2, 3\,.$$

Оттук

$$\nabla q_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial q_i}{\partial x_j}\,\boldsymbol{e}_j\,, \tag{12.22}$$

където $\boldsymbol{e}_j$ са единичните вектори на декартовата система $Ox_1x_2x_3$, вж. фиг. 10.1.

Съгласно дефиницията на градиента (12.1)

$$\boldsymbol{a}_j \cdot \nabla q_i = \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta^i_j\,.$$

Сравнението на последната формула с (2.3) ни дава

$$\nabla q_i = \boldsymbol{a}^i \tag{12.23}$$

за *произволна* криволинейна координатна система.

Нека сега $q_i$ е ортогонална система. Тогава

$$\nabla q_i = \boldsymbol{a}^i = h_i \boldsymbol{e}_i \qquad \left(\not\sum\nolimits_i\right) , \tag{12.24}$$

където $\boldsymbol{e}_i$ е ортонормираният локален базис. Сравнението с (10.12) показва, че

$$h_i = \frac{1}{H_i} \,, \quad h_i = |\boldsymbol{a}^i| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}\right)^2} \,,$$

вж. (12.22).

Преди да преминем към пресмятането на ротацията на произволно векторно поле в координатите $q_i$ е необходимо да намерим ротацията на векторите $\boldsymbol{e}_i$ от ортонормирания локален базис. За целта забелязваме, че полето $\boldsymbol{a}^i$ е потенциално, вж. (12.24), и затова ротацията му е нула

$$\nabla \times \boldsymbol{a}^i = \nabla \times \left(\frac{1}{H_i}\boldsymbol{e}_i\right) = 0 \,, \tag{12.25}$$

съгласно критерия за потенциалност (11.36).

Нека $f$ е произволно скаларно поле, а $\boldsymbol{a}$ е векторно поле. Пресмятаме $\nabla \times (f\boldsymbol{a})$. Съгласно дефиницията на ротацията (11.34) имаме

$$\begin{aligned} [\,\nabla \times (f\boldsymbol{a})\,]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\,(f a_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} f_j a_k + f\varepsilon_{ijk}\partial, j a_k \qquad \left(\sum\nolimits_{j,k}\right) , \end{aligned}$$

или, в безкоординатен вид,

$$\nabla \times (f\boldsymbol{a}) = \nabla f \times \boldsymbol{a} + f\,\nabla \times \boldsymbol{a} \,. \tag{12.26}$$

Прилагаме формулата (12.26) в (12.25)

$$\nabla \times \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i}\,(\nabla H_i) \times \boldsymbol{e}_i \,, \quad i = 1, 2, 3 \,, \tag{12.27}$$

тъй като $\nabla \dfrac{1}{H_i} = -\dfrac{1}{H_i^2}\,\nabla H_i$ . Но

$$\nabla H_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j}\,\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\,\boldsymbol{e}_j \,,$$

вж. (12.3), и затова, например,

$$\nabla H_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_1}{\partial q_j} \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_1 \,.$$

Оттук и от (12.27) намираме търсените изрази за ротациите $\nabla \times \boldsymbol{e}_i$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_3 \,, \\
\nabla \times \boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \boldsymbol{e}_1 \,, \\
\nabla \times \boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \boldsymbol{e}_3 \,,
\end{aligned} \tag{12.28}$$

където използвахме, че

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \,, \quad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \,, \quad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{12.29}$$

**Упражнение 12.1.** *Покажете, че*

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b}) \tag{12.30}$$

*за произволни векторни полета* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

**Упражнение 12.2.** *Вземете в* (12.30) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$. *От първото съотношение на* (12.29) *тогава следва*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \, \nabla \times \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \, \nabla \times \boldsymbol{e}_2 \,.$$

*Използвайки* (12.28), *изведете оттук съотношенията* (12.18), *а с тяхна помощ и общата формула* (12.17) *за дивергенцията на произволно векторно поле.*

Нека сега

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=3}^{3} u_k \boldsymbol{e}_k$$

е произволно векторно поле, разложено по векторите на ортонормирания локален базис. С помощта на (12.26) и (12.27) намираме

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{u} &= \sum_{k=1}^{3} \left[ (\nabla u_k) \times \boldsymbol{e}_k + u_k \, \nabla \times \boldsymbol{e}_k \right] = \sum_{k=1}^{3} \left[ \nabla u_k + \frac{u_k}{H_k} \nabla H_k \right] \times \boldsymbol{e}_k \\
&= \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} \left[ H_k \nabla u_k + u_k \nabla H_k \; \times \boldsymbol{e}_k \right] = \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} \nabla \left( H_k u_k \right) \times \boldsymbol{e}_k \,,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{1}{H_k} \sum_{k=1}^{3} \left( \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{H_j} \frac{\partial \left(H_k u_k\right)}{\partial q_j} \boldsymbol{e}_j \right) \times \boldsymbol{e}_k \,.$$

Използвайки (12.29), оттук намираме търсената формула за ротацията на произволно векторно поле в ортогонална криволинейна координатна система, именно,

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} = {} & \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial \left(u_3 H_3\right)}{\partial q_2} - \frac{\partial \left(u_2 H_2\right)}{\partial q_3} \right\} \boldsymbol{e}_1 \\ & + \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial \left(u_1 H_1\right)}{\partial q_3} - \frac{\partial \left(u_3 H_3\right)}{\partial q_1} \right\} \boldsymbol{e}_2 \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial \left(u_2 H_2\right)}{\partial q_1} - \frac{\partial \left(u_1 H_1\right)}{\partial q_2} \right\} \boldsymbol{e}_3 \,. \end{aligned} \tag{12.31}$$

В частност, в цилиндрични координати

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} = {} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) \boldsymbol{e}_r \\ & + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \boldsymbol{e}_\varphi \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \left(r u_\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{e}_z \,, \end{aligned}$$

а в сферични —

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{u} = {} & \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial \left(u_\varphi \sin\theta\right)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{e}_r \\ & + \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r u_\varphi\right)}{\partial r} \right) \boldsymbol{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \left(r u_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \boldsymbol{e}_\varphi \,. \end{aligned}$$

## § 13. Символи на Кристофел

**13.1. Дефиниция на символите на Кристофел**. Както вече подчертахме в § 10.1, векторите $\boldsymbol{a}_i$ на локалния базис за криволинейна координатна система $q_i$ се менят от точка в точка. „Скоростта“ на изменението им се характеризира с т. нар. *символи на Кристофел*, които се дефинират от равенството

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}_k\,. \tag{13.1}$$

Оттук се вижда, че

$$\nabla \boldsymbol{a}_i = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_k\,, \tag{13.2}$$

тъй като, съгласно дефиницията на производната по направление, $\boldsymbol{a}_j \cdot \nabla \boldsymbol{a}_i = \partial \boldsymbol{a}_i / \partial q_j$ .

Символите на Кристофел са симетрични по индексите $i, j$. За да се убедим в това, припомняме дефиницията (10.6) на векторите $\boldsymbol{a}_i$

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \quad \text{и затова} \quad \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_i \partial q_j} = \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}_k\,,$$

и забелязваме, че смесената производна $r_{,ij}$ е симетрична спрямо $i, j$. Следователно броят на символите на Кристофел за всяка криволинейна система е 18 (= 6 × 3).

От (13.2) се вижда, че матрицата $\|\Gamma^k_{\textcircled{i}j}\|$ за всяко фиксирано $i$ се преобразува по тензорен закон, т. като това са компоненти на двувалентния тензор $\nabla \boldsymbol{a}_i$. Подчертаваме, че '$i$' е фиксирано, като го ограждаме с кръгче, $\textcircled{i}$. Ще отбележим без коментар, че $\|\Gamma^k_{ij}\|$ *не представляват* компоненти на тривалентно тензорно поле: при смяна на координатната система, те не се преобразуват по съответния тензорен закон от типа на (10.25), вж. края на § 10.5. (В закона им за преобразуване се появява и матрицата на вторите производни $\partial^2 q_{i'} / \partial q_i \partial q_j$.)

**13.2. „Ковариантна“ производна**. Нека $\boldsymbol{u} = u^i\, \boldsymbol{a}_i$ е векторно поле. Градиентът му, $\nabla \boldsymbol{u}$, беше изразен в (12.9) с помощта на тензорите $\nabla \boldsymbol{a}_i$. Използвайки формулата (13.2), от (12.9) намираме

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{u} &= \frac{\partial u^i}{\partial q_j} \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_i + u^i\, \Gamma^k_{ij}\, \boldsymbol{a}^j \boldsymbol{a}_k \\ &= \left( \frac{\partial u^p}{\partial q_i} + u^\alpha\, \Gamma^p_{\alpha i} \right) \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_p\,, \end{aligned} \tag{13.3}$$

след подходящо преименуване на съответните неми индекси.

Компонентите на $\nabla \boldsymbol{u}$ в диадния базис $\boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}_p$ често се означават във физическата литература като $u^i{}_{;p}$

$$u^i{}_{;p} = \frac{\partial u^p}{\partial q_i} + u^\alpha\, \Gamma^p_{\alpha i} \tag{13.4}$$

и се наричат *ковариантни производни* на компонентите $u^i$, за разлика от частните производни $u^i{}_{,p} = \partial u^i / \partial q_p$. (Обърнете внимание на означението ';' във формулата (13.4).) Смисълът на този термин е, че матрицата от ковариантните производни $\|u^i{}_{;p}\|$ се преобразува при смяна на координатната система по съответния тензорен закон. В същото време е очевидно, че частните производни $\|\partial u^i / \partial q_p\|$ *не образуват* матрица на тензор за произволна система $q_i$, т. е. те *не се преобразуват* по тензорен закон. Причината, да подчертаем и тук, се състои в това, че при диференцирането на векторното поле, разложено по локалния базис, $\boldsymbol{u} = u^i\, \boldsymbol{a}_i$, следва да диференцираме както компонентите $u^i$, така и (променливите) вектори на базиса $\boldsymbol{a}_i$.

**13.3. Градиент на векторите от дуалния базис**. Нека $\boldsymbol{a}^i$ са векторите от дуалния локален базис за дадената криволинейна система. По дефиниция, $\boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i = \delta_i^p$, вж. (2.3), и затова $\nabla\, (\boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i) = 0$. Но

$$\nabla \boldsymbol{a}^p \cdot \boldsymbol{a}_i = -\nabla \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^n_{im}\, \boldsymbol{a}^m\, \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^n_{im}\, \boldsymbol{a}^m\, .$$

Следователно

$$\nabla \boldsymbol{a}^p = -\Gamma^p_{im}\, \boldsymbol{a}^m \boldsymbol{a}^i\, , \tag{13.5}$$

което и представлява търсената формула за градиентите $\nabla \boldsymbol{a}^p$ на векторите от дуалния базис.

**Упражнение 13.1.** *С* помощта на (13.5) покажете, че ако $\boldsymbol{u} = u_i\, \boldsymbol{a}^i$, то

$$\nabla \boldsymbol{u} = \left( \frac{\partial u_p}{\partial q_i} - u_\alpha\, \Gamma^\alpha_{pi} \right) \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^p\, .$$

**13.4. Диференциране на тензорни полета в криволинейна координатна система.** Формулите (13.2) и (13.5), които изразяват градиентите на векторите на локалните базиси, позволяват да диференцираме произволни тензорни полета, разложени по локалните полиадни базиси на криволинейната координатна система $q_i$.

Ще илюстрираме това върху примера на тензорно поле, зададено с помощта на чисто ковариантните си компоненти

$$\boldsymbol{T} = t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j\, .$$

С помощта на (12.2) и (13.5) намираме

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{T} &= (\nabla t_{ij})\, \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \left(\nabla \boldsymbol{a}^i\right) \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i (\nabla \boldsymbol{a}^j) \\ &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k}\, \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \left(-\Gamma^i_{pq}\, \boldsymbol{a}^p \boldsymbol{a}^q\right) \boldsymbol{a}^j + t_{ij}\, \boldsymbol{a}^i \left(-\Gamma^j_{pq}\, \boldsymbol{a}^p \boldsymbol{a}^q\right). \end{aligned} \tag{13.6}$$

Знакът $\sqcup$ под двойките $(\boldsymbol{a}^i, \nabla)$ и $(\boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{a}^p)$ показва, че в крайния резултат следва да се сменят местата на съответните диадни множители. Причината е, че в тензора $\nabla\boldsymbol{T}$ полиадният множител (или индексът в съответното координатно представяне), отговарящ на оператора $\nabla$, следва да бъде *пръв*.

След подходящо „преименуване“ на съответните неми индекси в (13.6), намираме

$$\nabla\boldsymbol{T} = \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} - t_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{a}^i \boldsymbol{a}^j \,. \tag{13.7}$$

По напълно аналогичен път можем да пресметнем и градиента на произволно тензорно поле, зададено в съответния полиаден базис, породен от векторите на локалния базис за произволна координатна система $q_i$.

**13.5. Дивергенция на тензорно поле**. Нека отново $\boldsymbol{T}$ е двувалентно тензорно поле. В тривалентния тензор $\nabla\boldsymbol{T}$ можем да направим контракция по първата двойка индекси, т. е. да заменим диадното произведение $\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{a}^i$ в триадата $\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j$ със скаларно, вж. § 8.5. Резултатът, по аналогия с векторния случай, наричаме *дивергенция* на тензорното поле $\boldsymbol{T}$, а изразът ѝ следва веднага от (13.7):

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} = \nabla\cdot\boldsymbol{T} = g^{ki} \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} - t_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^j \,. \tag{13.8}$$

При контракция по двойка индекси валентността се намалява с две; естествено е тогава, че дивергенцията на двувалентното тензорно поле е векторно поле, чийто явен вид е даден в (13.8).

Отбелязваме, че контракцията (13.8), извършена в тривалентното поле $\nabla\boldsymbol{T}$, *не е единствено* възможната. Например, можем да извършим контракция и по индексите $k$ и $j$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}\operatorname{div} &= \operatorname{div}\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{T}\cdot\nabla \\ &= g^{kj} \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} - t_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^i \,. \end{aligned}$$

Това, че наблата се появява вдясно от $\boldsymbol{T}$ в последното уравнение се обяснява от факта, че сега $\nabla$ се „умножава“ скаларно с втория (десния) диаден множител на тензора $\boldsymbol{T}$. Разбира се, можем да извършим и контракция по индексите $i$ и $j$ — резултатът ще е просто градиентът на следата, $\operatorname{tr}\boldsymbol{T}$, на тензора $\boldsymbol{T}$:

$$\nabla(\operatorname{tr}\boldsymbol{T}) = \nabla\left(g^{ij}\,t_{ij}\right) = g^{ij} \left\{ \frac{\partial t_{ij}}{\partial q_k} - t_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} - t_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} \right\} \boldsymbol{a}^k \,.$$

**13.6. Изразяване на символите на Кристофел чрез метрическите коефициенти**. Да приложим формулата (13.7) към единичния тензор $\boldsymbol{I} = g_{ij}\,\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{a}^j$. Тъй като той е постоянен, то $\nabla\boldsymbol{I} = 0$ и от (13.7) следва

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} = g_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ki} + g_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj}\,. \tag{13.9}$$

Въвеждаме т. нар. *символи на Кристофел от втори род*:

$$\Gamma_{j,ki} = g_{\alpha j}\,\Gamma^{\alpha}_{ki}\,. \tag{13.10}$$

(Обръщаме внимание, че запетайката в означението $\Gamma_{j,ki}$ в случая няма *нищо общо* с диференцирането.) При това, очевидно,

$$\Gamma^{p}_{ki} = g^{pj}\,\Gamma_{j,ki}\,, \tag{13.11}$$

като използваме, че матриците $\|g_{kj}\|$ и $\|g^{kj}\|$ са взаимно обратни, вж. (2.13).

С помощта на символите $\Gamma_{j,ki}$ съотношението (13.9) се опростява:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k} = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{i,kj}\,. \tag{13.12}$$

С циклична смяна на индексите в (13.12) можем да запишем още две уравнения за неизвестните $\Gamma_{i,jk}$, $\Gamma_{j,ki}$ и $\Gamma_{k,ij}$. Заедно с (13.12) те представляват система линейна за тези три неизвестни (използваме симетричността на $\Gamma^{p}_{ij}$ и следователно и на $\Gamma_{p,ij}$ спрямо индексите $i, j$, вж. § 13.1. Решението на така получената система е елементарно:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right)$$

или

$$\Gamma^{p}_{ij} = \frac{1}{2}g^{pr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_r}\right)\,, \tag{13.13}$$

вж. (13.11). Формулата (13.13) дава възможност по дадени метрични коефициенти $g_{ij}$ в криволинейната система $q_i$ да се пресметнат елементарно съответните символи на Кристофел $\Gamma^{p}_{ij}$.

Ако системата $q_i$ е ортогонална, то

$$g_{ij} = H_i H_j\,\delta_{ij} = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^3 \end{pmatrix} \quad \Big(\not\sum\nolimits_{i,j}\Big)\,. \tag{13.14}$$

От (13.13) тогава намираме, че

$$\begin{aligned}\Gamma^p_{ij} &= \frac{1}{2H_p H_r}\,\delta_{pr}\left(\frac{\partial\,(H_i H_r)}{\partial q_j} + \frac{\partial\,(H_j H_r)}{\partial q_i} - \frac{\partial\,(H_i H_j)}{\partial q_r}\right) \\ &= \frac{1}{2H_p^2}\left(\frac{\partial\,(H_p H_i)}{\partial q_j} + \frac{\partial\,(H_p H_j)}{\partial q_i} - \frac{\partial\,(H_i H_j)}{\partial q_p}\right).\end{aligned} \tag{13.15}$$

(В първия ред на (13.15) сумираме по $r$.)

Съотношенията (13.15) показват, в частност, че $\Gamma^p_{ij} = 0$, ако $i \neq j \neq p \neq i$, т. е. ако нито една двойка индекси не съвпада. Тъй като има три такива тройки (в разглеждания тримерен случай), то броят на символите на Кристофел за ортогонална криволинейна система в общия случай е 15 $(= 18 - 3)$.

От (13.14) следва също така, че

$$\Gamma^p_{pj} = \frac{1}{H_p}\,\frac{\partial H_p}{\partial q_j} \qquad \left(\not\sum\nolimits_p\right).$$

Оттук, сумирайки по $p$, намираме

$$\sum_{p=1}^{3}\Gamma^p_{pj} = \Gamma^\alpha_{\alpha j} = \sum_{p=1}^{3}\frac{\partial \ln H_p}{\partial q_j} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\,\frac{\partial\,(H_1H_2H_3)}{\partial q_j},$$

или, ако означим с $g = \det\,(g_{ij})$, то

$$\Gamma^\alpha_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q_j} \qquad \left(\sum\nolimits_\alpha\right), \quad j = 1, 2, 3, \tag{13.16}$$

тъй като $\sqrt{g} = H_1H_2H_3$, вж. (13.14). Ще отбележим, че формулата (13.16) е в сила за произволна криволинейна координатна система, а не само за ортогонална, вж. [3, т. 1, стр. 176].