

Глава 1

ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА

§ 2. Вектори — безкоординатна и координатна дефиниции

2.1. Вектори. Векторът е елемент на векторно пространство. Това почти тавтологично твърдение „определя“ понятието вектор *безкоординатно*.

В конкретните приложения векторите се появяват често и като набори от координати (компоненти) в дадена координатна система; при това обаче е необходимо да знаем как се преобразуват тези координати при смяна на координатната система. Координатното описание на вектора ще обсъдим по-подробно в § 2.2. Преди това е необходимо да напомним няколко добре известни факти от линейната алгебра.

Нека \mathcal{E} е векторно пространство. Обектите на \mathcal{E} означаваме с получерни букви $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$. Напомняме, че във векторно пространство са зададени две операции: *умножение* на вектор със скалар $\lambda \in \mathcal{R}$ (интересува ни само реалният случай, така че \mathcal{R} е числовата ос) и *събиране* на вектори. Геометрично изобразяваме векторите като насочени отсечки (с фиксирано и общо за всички тях начало). Тогава събирането им се осъществява по добре познатото правило на многоъгълника. Операциите „умножение на число“ и „събиране“ се подчиняват на няколко естествени (от гледна точка на „здравия разум“ и интуицията) аксиоми, чието изреждане тук е излишно.

Предполагаме, освен това, че пространството \mathcal{E} е *евклидово*, т. е. че съществува скаларно произведение или, иначе казано, симетрична билинейна (положителнодефинитна) форма, която на всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ съпоставя числото $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathcal{R}$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \tag{2.1}$$

линейно по всеки аргумент. Дължината $a \equiv |\mathbf{a}|$ на вектора \mathbf{a} тогава е

$$a = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

2.2. Координатно разлагане на вектор. Напомняме, че система от вектори $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\alpha)$, се нарича *линейно независима*, ако, при $\lambda_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, \alpha$,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \alpha.$$

С други думи, линейна комбинация на линейно независима система от вектори се анулира тогава и само тогава, когато тя е тривиална.

Размерността (или *дименсията*) на пространството е естествено число $n = \dim \mathcal{E}$ със следните свойства:

- а) съществува линейно независима система от n вектора;
- б) всяка система от $n + 1$ вектора е линейно зависима.

По-надолу, за да подчертаем, че работим в n -мерно пространство \mathcal{E} , ще използваме означението \mathcal{E}_n (макар че във всички конкретни механични приложения е достатъчно да се ограничим с тримерния случай $n = 3$).

Системите от n линейно независими вектора се наричат *базиси*. Всеки вектор \mathbf{x} се разлага еднозначно по елементите на базиса:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{a}_i = x^i \mathbf{a}_i = x^k \mathbf{a}_k, \quad (2.2)$$

където x^i , $i = 1, \dots, n$, са компонентите на вектора \mathbf{x} спрямо разглеждания базис.

В (2.2) е въведено *правилото на Айнщайн*, което ще се използва навсякъде по-нататък: ако във формула от вида (2.2) се срещат два еднакви индекса, единият долен, другият - горен, се подразбира сумиране по тези индекси от 1 до n . (Фактът на повторение на индекса заменя символа \sum на сумиране!) Записвайки в (2.2) сумата един път с помощта на индекса ' i ', а един път с ' k ', подчертаваме, че използваният за означение символ е без значение — щом той се повтаря, имаме сумиране. С други думи е съществен не конкретният символ i , k и т.н., а само фактът на двукратното му използване във формулата, един път като долен, друг път като горен. Поради това обстоятелство такива индекси се наричат *неми*.

2.3. Дуален базис. Нека $\{\mathbf{a}_i\}$ е базис в \mathcal{E}_n . Разглеждаме системата от вектори $\{\mathbf{a}^j\}$ със свойството

$$\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i = \delta_i^j, \quad (2.3)$$

$i, j = 1, \dots, n$. Тук δ_i^j са добре познатите символи на Кронекер:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Лесно се проверява, че векторите $\{\mathbf{a}^j\}$ са линейно независими и поради това също образуват базис в \mathcal{E}_n , наречен *дуален* (на $\{\mathbf{a}_i\}$). Очевидно базисът, дуален на $\{\mathbf{a}^j\}$, е изходният базис $\{\mathbf{a}_i\}$.

При $n = 3$ съществува проста и удобна формула за явно пресмятане на дуалния базис, именно

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_2 \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_3 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)}. \quad (2.4)$$

(Забележете, че формулите за \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 се получават от тази за \mathbf{a}^1 чрез циклична смяна на индексите $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.) Формулите (2.4) са известни като *формули на Гибс*.

Ако базисът съвпада с дуалния си, т. е. ако

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

то той се нарича *ортонормиран* (елементите му са взаимно перпендикулярни и имат единични дължини, както веднага следва от (2.3)).

След въвеждането на базиса $\{\mathbf{a}^i\}$, дуален на $\{\mathbf{a}_i\}$, естествено е да разгледаме също и разлагането на вектора спрямо този базис $\{\mathbf{a}^i\}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}^i = x_i \mathbf{a}^i = x_k \mathbf{a}^k. \quad (2.6)$$

„Логиката“ на айнщайновото правило за сумиране ни кара да запишем сега компонентите x_i на вектора \mathbf{x} спрямо дуалния базис, използвайки долни индекси.

2.4. Формули за компонентите. Разглеждането на базиса $\{\mathbf{a}_i\}$ заедно с неговия дуален $\{\mathbf{a}^i\}$ е много удобно за пресмятане на компонентите на вектор. Наистина, ако умножим скаларно вектора \mathbf{x} в (2.2) с вектора \mathbf{a}^k , то

$$\mathbf{a}^k \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}^k \cdot (x^i \mathbf{a}_i) = x^i \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = x^i \delta_i^k = x^k,$$

което веднага следва от дефинициите на дуалния базис (2.3) и на символа на Кронекер. Следователно

$$x^k = \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{x}, \quad x_k = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Втората формула тук се получава аналогично, но след скалярно умножаване на двете страни на (2.6) с вектора \mathbf{a}_k .

Обръщаме внимание, че формулата (2.7) е очевидно обобщение на добре познатия начин за пресмятане на компонентите на вектор при разлагането му по ортонормиран базис \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}, \quad x_{\alpha} = \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Очевидно е, че ако базисът е ортонормиран, то отпада разликата между компонентите на векторите с долни и горни индекси.

Нека

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{a}^i = x^i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{y} = y_i \mathbf{a}^i = y^i \mathbf{a}_i,$$

са вектори от \mathcal{E}_n . Скалярното им произведение тогава се пресмята по формулата

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_i \mathbf{a}^i) \cdot (y^j \mathbf{a}_j) = x_i y^j \delta_i^j = x_{\alpha} y^{\alpha} \quad (2.8a)$$

или, аналогично,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^{\alpha} y_{\alpha}. \quad (2.8b)$$

За ортонормиран базис (2.8b) е добре познатата формула

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha} y_{\alpha}, \quad (2.9)$$

доколкото в случая няма разлика между компонентите с долни и горни индекси.

2.5. Линеини форми и дуално пространство. По-долу ще се срещнем с т. нар. *линейни форми* над \mathcal{E}_n . По дефиниция това са линейни изображения, които на всеки вектор \mathbf{x} съпоставят числото $f(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}$:

$$\mathbf{x} \longrightarrow f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n,$$

линейно по \mathbf{x} , т. е.

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n, \alpha, \beta \in \mathfrak{R}.$$

Съвкупността от линейните форми над дадено линейно пространство \mathcal{A} отново образува линейно пространство, което се означава с \mathcal{A}^* и се нарича *дуално* на \mathcal{A} . Лесно се показва, че $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^*$. В общия случай, когато \mathcal{A} е векторно, но *не* е евклидово пространство (в него не е зададено скалярно произведение), пространствата \mathcal{A} и \mathcal{A}^* *не* могат да се отъждествят, и следва да се третират като *различни*. За да се подчертае това, елементите на \mathcal{A} се наричат вектори, а елементите на \mathcal{A}^* , т. е. формите — *ковектори*.

В разглеждания случай на евклидово пространство обаче \mathcal{E}_n и \mathcal{E}_n^* могат да се отъждествят в този смисъл, че всяка форма над \mathcal{E}_n се поражда чрез скалярното умножение с даден вектор от \mathcal{E}_n . С други думи, ако $\xi(\mathbf{x})$ е форма над \mathcal{E}_n , то съществува вектор $\boldsymbol{\xi}$, такъв че

$$\xi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n. \quad (2.10)$$

Наистина ако \mathbf{a}_i е базис в \mathcal{E}_n то, съгласно (2.8а),

$$\xi(\mathbf{x}) = \xi(x^i \mathbf{a}_i) = x^i \xi(\mathbf{a}_i) = x^i \xi_i,$$

т. е.

$$\xi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{където} \quad \boldsymbol{\xi} = \xi_i \mathbf{a}^i, \quad \xi_i = \xi(\mathbf{a}_i).$$

2.6. Метрически коефициенти. „Жонглиране“ с индекси. Доколкото $\{\mathbf{a}_i\}$ и $\{\mathbf{a}^j\}$ са базиси в едно и също пространство \mathcal{E}_n , всеки вектор от единия базис може да се разложи по елементите на другия:

$$\mathbf{a}^i = g^{ij} \mathbf{a}_j, \quad \mathbf{a}_i = g_{ij} \mathbf{a}^j. \quad (2.11)$$

Коефициентите g^{ij} и g_{ij} се наричат *метрически*, по причини, които ще поясним по-долу (§3). Пресмятането им е елементарно — умножаваме първото съотношение в (2.11) скалярно с \mathbf{a}_k , а второто с \mathbf{a}^k . Използването на (2.3) веднага води до съотношенията

$$g^{kj} = \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}^j, \quad g_{kj} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j. \quad (2.12)$$

Следователно матрицата $\|g_{kj}\|$ носи информация за дължините на векторите $\{\mathbf{a}_i\}$ и за ъглите между тях. Аналогично, $\|g^{kj}\|$ носи същата информация за дуалния базис $\{\mathbf{a}^i\}$.

Очевидно матриците $\|g_{kj}\|$ и $\|g^{kj}\|$ са взаимно-обратни, т. е.

$$g^{i\alpha} g_{\alpha j} = \delta_j^i. \quad (2.13)$$

Ясно е също, че за ортонормиран базис

$$g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij},$$

т. е. и двете матрици $\|g^{kj}\|$ и $\|g_{kj}\|$ са единичните.

С помощта на метрическите коефициенти се установява простите връзки между компонентите x^i и x_i на един и същ вектор

$$x^i = g^{ij} x_j, \quad x_i = g_{ij} x^j, \quad (2.14)$$

които са очевидни следствия от (2.7) и (2.11).

Формулата (2.14) е най-простият пример на т. нар. *жонглиране с индекси*, в смисъл, че индексите се „подхвърлят“ отдолу горе и „падат“ обратно с помощта на матриците $\|g^{kj}\|$ и $\|g_{kj}\|$.

2.7. Преобразуване на базиса. Изборът на базиса $\{\mathbf{a}_i\}$ при разлагане на вектора е нещо, което зависи от конкретния контекст. В \mathcal{E}_n съществуват безбройно много базиси и всички те са *равноправни* — няма общ критерий, по който можем да дадем предпочитание на един базис в сравнение с други.

Нека $\{\mathbf{a}_{i'}\}$ е друг базис в пространството. Него ще наричаме „нов“, докато базисът $\{\mathbf{a}_i\}$, с който работихме досега, ще наричаме „стар“. Тогава

$$\mathbf{a}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_i = A_i^{i'} \mathbf{a}_{i'}, \quad (2.15)$$

тъй като, както векторите \mathbf{a}_i , така и векторите $\mathbf{a}_{i'}$, лежат в \mathcal{E}_n и всеки един от тях може да се разложи по векторите на базиса $\{\mathbf{a}_{i'}\}$ и $\{\mathbf{a}_i\}$, съответно.

Обръщаме внимание, че матриците $\|A_{i'}^i\|$ и $\|A_i^{i'}\|$ са *различни*, въпреки че използваме една и съща буква A в означенията им. Нещо повече, те очевидно са *взаимнообратни*, т. е.

$$A_{i'}^i A_j^{i'} = \delta_j^i, \quad A_i^{i'} A_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}. \quad (2.16)$$

Да попитаме първо как се преобразуват дуалните базиси при смяната на базиса. Нека $\mathbf{a}^{i'} = B_i^{i'} \mathbf{a}^i$ е преобразованието на дуалния базис. От дефиницията (2.3) следва

$$\begin{aligned} \delta_{j'}^{i'} &= \mathbf{a}^{i'} \cdot \mathbf{a}_{j'} = (B_i^{i'} \mathbf{a}^i) \cdot (A_{j'}^j \mathbf{a}_j) \\ &= B_i^{i'} A_{j'}^j \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = B_i^{i'} A_{j'}^j \delta_j^i = B_i^{i'} A_{j'}^i, \end{aligned}$$

което означава, че матрицата $\|B_i^{i'}\|$ е обратна на $\|A_i^i\|$. Следователно $B_i^{i'} = A_i^i$, вж. (2.16), т. е.

$$\mathbf{a}^{i'} = A_i^{i'} \mathbf{a}^i, \quad (2.17)$$

което означава, че ако базисът се сменя с помощта на матрицата $\|A_i^i\|$, то дуалният базис се сменя с помощта на обратната матрица $\|A_i^{i'}\|$. Записваме този прост, но основен за по-нататъшните разсъждения, факт по следния схематичен начин

$$\mathbf{a}_i \xrightarrow{A} \mathbf{a}_{i'}, \quad \mathbf{a}^i \xrightarrow{A^{-1}} \mathbf{a}^{i'}. \quad (2.18)$$

2.8. Координатна дефиниция на вектор. Контравариантни и ковариантни компоненти. Да разложим даден вектор \mathbf{x} едновременно и в новия и стар базис

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{a}_i = x^{i'} \mathbf{a}_{i'},$$

и да попитаме каква е връзката между компонентите x^i и $x^{i'}$ на този вектор.

От (2.7) и (2.17) имаме

$$x^{i'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^{i'} = \mathbf{x} \cdot A_i^{i'} \mathbf{a}^i = A_i^{i'} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}^i = A_i^{i'} x^i.$$

Аналогично, ако

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{a}^i = x_{i'} \mathbf{a}^{i'},$$

то от (2.15) и (2.7) следва, че

$$x_{i'} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_{i'} = \mathbf{x} \cdot A_i^{i'} \mathbf{a}_i = A_i^{i'} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i = A_i^{i'} x_i.$$

Следователно, при смяна на базиса по закона (2.15), компонентите на вектора \mathbf{x} се преобразуват по правилото

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i, \quad x_{i'} = A_i^{i'} x_i. \quad (2.19)$$

Това е т. нар. *векторен закон* за преобразуване на компонентите. Той позволява да дефинираме координатно вектора по следния начин.

Дефиниция 2.1. Векторът е наредена двойка $\{\mathbf{a}_i, x^i\}$, състояща се от базис $\{\mathbf{a}_i\}$ и числа $\{x^i\}$, наречени (контравариантни) компоненти на вектора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите x^i се сменят съгласно първото от съотношенията на векторния закон (2.19).

Забелязваме, че компонентите x^i се преобразуват с помощта на матрицата $\|A_i^j\|$, *обратна* на тази, преобразуваща базиса. Поради това именно компонентите x^i се наричат *контравариантни*.

Напълно аналогично се определя векторът \mathbf{x} с помощта на *ковариантните* си компоненти x_i . Това е наредена двойка $\{\mathbf{a}_i, x_i\}$ — във всеки базис $\{\mathbf{a}_i\}$ е зададен наборът от *ковариантни* компоненти $\{x_i\}$ на вектора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите x_i се сменят по векторния закон, който в случая представлява второто от съотношенията (2.19).

Забелязваме, че компонентите x_i се преобразуват с помощта на *същата* матрица $\|A_i^j\|$, която преобразува и базиса, вж. (2.15). Това обяснява защо компонентите x_i се наричат *ковариантни*.

Координатна дефиниция на вектора може да се резюмира и онагледя с „графичното“ представяне

$$\mathbf{x} = \underset{\curvearrowright}{x^i} \underset{\curvearrowleft}{\mathbf{a}_i} = \underset{\curvearrowleft}{x^i} \underset{\curvearrowright}{\mathbf{a}_i}, \quad (2.20)$$

в което знакът \curvearrowright съответства на преобразуване или, образно казано, „завъртане“, с помощта на матрицата $A = \|A_i^j\|$, а знакът \curvearrowleft — на обратното „завъртане“ с помощта на матрицата $A^{-1} = \|A_i^j\|$, вж. (2.15).

Формулата (2.20) изразява *инвариантността* на понятието вектор. Това е обект, който *не зависи* от избора на координатната система (базиса). При смяна на базиса с помощта на матрица A , съответстваща на символа \curvearrowright , контравариантните компоненти се сменят с помощта на обратната матрица A^{-1} , т.е. символа \curvearrowleft в (2.20). Двете взаимнообратни преобразования A и A^{-1} , съответно, т.е. символите \curvearrowright и \curvearrowleft взаимно „се изяждат“. Като следствие, векторът $\mathbf{x} = x^i \mathbf{a}_i$ *не чувства* преобразуването на базиса, както и трябва да бъде за *всеки инвариантен обект*, независещ от избора на координатната система. Това е и смисълът на неговата инвариантност спрямо базиса,

§ 3. Двувалентни тензори — безкоординатна и координатна дефиниции

3.1. Безкоординатна дефиниция на двувалентен тензор. Ще започнем с формалната дефиниция.

Дефиниция 3.1. Ако \mathcal{E}_n е векторно пространство с размерност $\dim \mathcal{E}_n = n$, то пространството от двувалентни тензори $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ е векторно пространство със следните свойства:

- 1) $\dim \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n = n^2$;
- 2) Съществува изображение

$$\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n,$$

което съпоставя на всеки два вектора \mathbf{a}, \mathbf{b} тяхното диадно (или тензорно) произведение $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$:

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.$$

Това изображение е билинейно, т. е. то е линейно по всеки от аргументите си, така че

$$\mathbf{a} \otimes (\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mu \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Елементите $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се наричат диади (или диади на Гибс);

3) Пространството $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се поражда от диадите в смисъл, че произволен негов елемент може да се представи като линейна комбинация на диади.

Както ще видим зад горната дефиниция, звучаща твърде абстрактно на пръв поглед, се крие нещо просто, а именно това че, пространството от двувалентни тензори не е нищо друго освен съвкупността от линейните преобразования на \mathcal{E}_n или, което е еквивалентно, на всички билинейни форми над \mathcal{E}_n .

Преди да се убедим в това ще отбележим, че горната дефиниция (и по-точно свойствата 1) до 3)) определя пространството $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ „еднозначно“ с точност до един естествен изоморфизъм (линейно и взаимно еднозначно съответствие), *независещ* от избора на базиса в \mathcal{E}_n , а само от конкретната интерпретация на диадното умножение.

Наистина, нека имаме две диадни произведения $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \hat{\otimes} \mathbf{b}$ които пораждат, съответно, пространствата $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n \hat{\otimes} \mathcal{E}_n$. Тези пространства могат да се „отъждествят“ по естествен начин:

$$\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \longleftrightarrow \mathcal{E}_n \hat{\otimes} \mathcal{E}_n \tag{3.1}$$

с помощта на взаимноеднозначно и обратимо съответствие

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \longleftrightarrow \mathbf{a} \hat{\otimes} \mathbf{b} \tag{3.2}$$

между диадите, породени от векторите \mathbf{a} и \mathbf{b} . Тъй като всеки елемент и в $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, и в $\mathcal{E}_n \hat{\otimes} \mathcal{E}_n$, е линейна комбинация на диади, то съответствието (3.2) може да се разпространи по очевиден начин върху тези пространства.

3.2. Двувалентните тензори като линейни преобразования на \mathcal{E}_n . Дефинираме диадата по следния естествен начин

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n. \quad (3.3)$$

Това очевидно е линейно преобразование на пространството \mathcal{E}_n .

От (3.3) е ясно, че диадното произведение в общия случай не е комутативно:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$$

тъй като е видно, че в общия случай

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \neq \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}).$$

От последното съотношение, впрочем, е ясно, че

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b},$$

т. е. ако (и само ако) векторите \mathbf{a} и \mathbf{b} са колинеарни.

Отбелязваме също, че можем да определим диадата и като я приложим към вектора \mathbf{x} отдясно:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Очевидно е, че

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x}, \quad (3.4)$$

т. е. сменяйки местата на диадните множители ние фактически сменяме мястото на \mathbf{x} — прилагаме диадата към \mathbf{x} вместо отляво, отдясно.

Нека $\{\mathbf{a}_i\}$ е базис. Разглеждаме диадите

$$\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Ще покажем първо, че те са линейно независими. Да допуснем, че някоя тяхна линейна комбинация се анулира:

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j = 0.$$

Умножаваме $\boldsymbol{\lambda}$ скалярно с вектора \mathbf{a}^p , от дуалния базис:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{a}^p &= (\lambda^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{a}^p = \lambda^{ij} \mathbf{a}_i (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^p) \\ &= \lambda^{ij} \mathbf{a}_i \delta_j^p = \lambda^{ip} \mathbf{a}_i = 0, \quad p = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

— ползваме дефиницията (3.3) на диадата. Но векторите \mathbf{a}_i са линейно независими, и затова $\lambda^{ip} \mathbf{a}_i = 0$ влече $\lambda^{ip} = 0, \forall i, p = 1, \dots, n$.

Ще покажем сега, че диадите (3.5) са не само линейно независими, но и образуват базис в $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, който се нарича *диаден*.

Нека \mathbf{T} е произволно линейно преобразование на \mathcal{E}_n , което преобразува вектора \mathbf{y} в \mathbf{x} . Означаваме това така:

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n.$$

За даден базис $\mathbf{a}_i \in \mathcal{E}_n$ имаме

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot (x_j \mathbf{a}^j) = x_j \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j. \quad (3.6)$$

Нека

$$\mathbf{b}^j = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j = t^{ij} \mathbf{a}_i. \quad (3.7)$$

Тогава

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= x_j \mathbf{b}^j = t^{ij} \mathbf{a}_i x_j \\ &= t^{ij} \mathbf{a}_i (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}) = (t^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

използвайки (2.7) и още един път дефиницията на диадата (3.3). Тъй като (3.8) е в сила за всяко \mathbf{x} , то

$$\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j, \quad (3.9)$$

което означава, че диадите $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_k$ наистина образуват базис в пространството $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$.

Да отбележим, че от (3.7) веднага следва, че

$$t^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

В последната формула се появява т. нар. *билинейна форма* на линейното преобразование \mathbf{T} :

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \longrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} \quad (3.11)$$

— прилагаме \mathbf{T} към вектора \mathbf{y} , а резултата умножаваме скалярно с вектора \mathbf{x} . Съотношението (3.11) е очевидно линейно по всеки от аргументите си. Тогава компонентите на тензора \mathbf{T} в диадния базис $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j$ се оказват равни на стойността на билинейната форма на \mathbf{T} , приложена към векторите от дуалния базис \mathbf{a}^p . Последното твърдение не е нищо друго освен формулата (3.10), изказана с думи.

Очевидно е, че диадните базиси могат да се образуват и от векторите на дуалния базис; могат да се използват и „смесени“ диадни базиси, образувани от векторите на дадения и на дуалния базиси. Това означава, че освен $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j$, можем да разглеждаме също и базисите $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$, $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j$ в $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. Съответните диадни разлагания на тензора \mathbf{T} тогава ще имат вида

$$\mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = t_j^i \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^j. \quad (3.12)$$

Компонентите t_{ij} в последната формула ще се изразят отново чрез билинейната форма на \mathbf{T} по следния очевиден начин:

$$t_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_j, \quad t_j^i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_j, \quad (3.13)$$

$i, j = 1, \dots, n$.

Да обърнем внимание също, че (3.10) и (3.13) представляват „двувалентните“ аналози на формулата (2.7) за координатите на вектор.

3.3. Двувалентните тензори като билинейни форми над \mathcal{E}_n . Нека сега \mathbf{T} е билинейна форма над \mathcal{E}_n , т. е. изображение

$$\mathbf{T} : \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathfrak{R},$$

което на всеки два вектора \mathbf{x} , \mathbf{y} съпоставя числото $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, зависещо линейно от всеки един от аргументите \mathbf{x} и \mathbf{y} . Ще означим

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} \quad (3.14)$$

— както ще видим по-долу, съвпадението на означението $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$ с онова, използвано в п. 3.2 при третирането на тензора \mathbf{T} като линейно преобразование, вж. (3.11), ще се окаже съвсем естествено.

В този пункт ще покажем, че съвкупността от двувалентни тензори $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ може да се интерпретира и като пространството от билинейни форми над \mathcal{E}_n . За тази цел първо дефинираме диадите като билинейни форми по следния начин

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y}), \quad (3.15)$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n$.

Нека отново $\{\mathbf{a}_i\}$ е базис в \mathcal{E}_n , а \mathbf{T} е произволна билинейна форма. За всеки два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n$ имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = (x_i \mathbf{a}^i) \cdot \mathbf{T} \cdot (x_j \mathbf{a}^j) \\ &= (\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j) x_i x_j = t^{ij} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (t^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j) \cdot \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

където

$$t^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

В (3.16) използвахме билинейността на \mathbf{T} , формулата (2.7) и дефиницията (3.15) на диадата като билинейна форма. Следователно

$$\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j. \quad (3.18)$$

Това означава, че произволна билинейна форма се представя като линейна комбинация на елементите на диадния базис $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j$. (Линейната независимост на $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j$ се установява съвсем просто — проверете!)

Сега би трябвало да е ясно, защо формулите (3.9) и (3.10) на външен вид съвпадат, съответно, с (3.16) и (3.17). Причината е, че зад тях стои *еквивалентна*, макар и различна на пръв поглед, интерпретация на понятието двувалентен тензор. В (3.10) тензорът се третира като линейно преобразование, а в (3.17) — като съответната нему билинейна форма. Еквивалентността на двете интерпретации, коментирана още веднъж в следващия § 3.4, обяснява и защо в (3.14) използвахме означението $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$ за стойността $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на билинейната форма \mathbf{T} с аргументи \mathbf{x} и \mathbf{y} .

3.4. Еквивалентност на линейните преобразования и билинейните форми. За пълнота на изложението да коментираме тук кратко простия и добре известен факт, че пространствата на билинейните форми и на линейните преобразования над \mathcal{E}_n могат да се отъждествят.

Нека \mathbf{T} е линейно преобразование. То очевидно поражда билинейната форма (3.11).

Обратно, нека \mathbf{T} е билинейна форма $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Фиксираме вектора \mathbf{x} . Тогава

$$\xi_x(\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n,$$

е линейна форма над \mathcal{E}_n , т.е. на всяко \mathbf{x} се съпоставя линейната форма ξ_x .

Но всяка линейна форма над \mathcal{E}_n се поражда чрез скалярно произведение с даден вектор, който ще означим в случая с ξ_x :

$$\xi_x(\mathbf{y}) = \xi_x \cdot \mathbf{y},$$

както беше показано в § 2.5, вж. (2.10).

Съответствието $\mathbf{x} \rightarrow \xi_x$ е очевидно линейно преобразование на \mathcal{E}_n , което ще означим отново с \mathbf{T} :

$$\xi_x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}. \quad (3.19)$$

Тогава

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi_x(\mathbf{y}) = \xi_x \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y},$$

т. е. билинейната форма $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е просто билинейната форма (3.11), съответстваща на дефинираното в (3.19) линейно преобразоване \mathbf{T} .

3.5. Координатна дефиниция на тензор. Контравариантни и ковариантни компоненти. Както и в при разглеждането на векторите в § 2.7 и 2.8, да разгледаме, освен базиса \mathbf{a}_i , и друг („нов“) базис $\mathbf{a}_{i'}$ в \mathcal{E}_n . Базисите се преобразуват отново по закона (2.15).

Тензорът \mathbf{T} може да разложи както по стария $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j$, така и по новия диаден базис $\mathbf{a}_{i'} \otimes \mathbf{a}_{j'}$

$$\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j = t^{i'j'} \mathbf{a}_{i'} \otimes \mathbf{a}_{j'}.$$

Връзката между компонентите t^{ij} и $t^{i'j'}$ следва от (3.10):

$$\begin{aligned} t^{i'j'} &= \mathbf{a}^{i'} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^{j'} = \left(A_i^{i'} \mathbf{a}^i \right) \cdot \mathbf{T} \cdot \left(A_j^{j'} \mathbf{a}^j \right) \\ &= A_i^{i'} A_j^{j'} \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j = A_i^{i'} A_j^{j'} t^{ij}. \end{aligned}$$

т. е.

$$t^{i'j'} = A_i^{i'} A_j^{j'} t^{ij}. \quad (3.20)$$

Това е т. нар. *тензорен закон* за преобразуване на компонентите. Той позволява да дефинираме координатно тензора по следния начин (забележете — *напълно аналогичен* на координатната дефиниция 2.1 на вектора!).

Дефиниция 3.2. Тензорът е наредена двойка $\{\mathbf{a}_i, t^{ij}\}$, състояща се от базис $\{\mathbf{a}_i\}$ и числата $\{t^{ij}\}$, наречени (контравариантни) компоненти на тензора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите t^{ij} се сменят по тензорния закон (3.20).

Забелязваме, че компонентите t^{ij} се преобразуват с помощта на матрицата $\|A_i^{i'}\|$, *обратна* на тази, преобразуваща базиса. Поради това именно компонентите t^{ij} се наричат *контравариантни*.

По същия начин се проверява, че компонентите t_{ij} и t_j^i , вж. (3.12), (3.13), се преобразуват, съответно, по законите

$$t_{i'j'} = A_{i'}^i A_{j'}^j t_{ij}, \quad t_j^{i'} = A_i^{i'} A_j^i t_j^i. \quad (3.21)$$

Вижда се, че t_{ij} се преобразуват с помощта на *същата* матрица $\|A_{i'}^i\|$, която преобразува и базиса, вж. (2.15). Ето защо компонентите t_{ij} се наричат *ковариантни*.

Компонентите t_j^i се наричат *смесени* (по-точно, един път ковариантни и един път контравариантни), тъй като в техния закон за преобразоване участва един път „правата“ матрица $\|A_i^i\|$ и един път „обратната“ $\|A_i^{i'}\|$, вж. (2.15) и (3.21).

Отбелязваме за пълнота, че напълно аналогично на дефиниция 3.2 тензорът \mathbf{T} може да се определи, например, и с помощта на ковариантните си компоненти t_{ij} . В случая това ще бъде наредената двойка $\{\mathbf{a}_i, t_{ij}\}$ — във всеки базис $\{\mathbf{a}_i\}$ е зададен набора от ковариантни компоненти $\{t_{ij}\}$ на тензора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите t_{ij} се сменят по тензорния закон, който в случая е първото от съотношенията (3.21).

Координатната дефиниция на тензора може да се резюмира и онагледи по „графичен“ начин, напълно аналогичен на този за вектора (вж. § 2.8). Например,

$$\mathbf{T} = t \underset{\circlearrowleft}{i} \underset{\circlearrowright}{j} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (3.22)$$

Както и в края на § 2, знакът \circlearrowleft говори за „завъртане“ с помощта на матрицата $A = \|A_i^i\|$, а знакът \circlearrowright — за обратното „завъртане“ с помощта на матрицата $A^{-1} = \|A_i^{i'}\|$, вж. (2.15).

Формулата (3.22) изразява *инвариантността* на понятието тензор. Аналогично на вектора, това отново е обект, който *не зависи* от избора на координатната система (базиса). При смяна на базиса чрез матрицата A , изразено схематично със символа \circlearrowleft , контравариантните компоненти се сменят с помощта на обратната матрицата A^{-1} , вж. символа \circlearrowright в (3.22). Взаимнообратните преобразования A и A^{-1} — т. е. символите \circlearrowleft и \circlearrowright взаимно се „изяждат“. В резултат на това тензорът $\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ *не чувства* преобразуването на базиса — както и трябва да бъде за *всеки инвариантен обект*, независещ от избора на координатната система.

3.6. „Жонглиране“ с индексите на двувалентен тензор. Връзката между ко- и контравариантните компоненти на тензора се осъществява, както и при векторите (§ 2.5), с помощта на матриците на метрическите коефициенти g^{ij} и g_{ij} . Например,

$$t^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j = g^{i\alpha} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^j = g^{i\alpha} t_\alpha^j,$$

вж. (3.17) и (2.11). Аналогично,

$$t^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} t_{\alpha\beta}, \quad t_{ij} = g_{i\alpha} g_{j\beta} t^{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

и т. н.

По този начин индексите на двувалентния тензор се „подхвърлят“ от „долу“ „горе“ и обратно с помощта на матриците на метрическите коефициенти $\|g^{ij}\|$ и $\|g_{ij}\|$. Всяко „подхвърляне“ се „заплаща“ с появата на една от тези матрици, вж. (3.23).

Ясно е, че ако базисът е ортонормиран, отпада разликата между ко- и контравариантните компоненти. Матриците $\|g^{ij}\|$ и $\|g_{ij}\|$ (а не само $\|g_j^i\|$) са единични и затова

$$t^{ij} = t_{ij} = t_j^i$$

за компонентите на всеки двувалентен тензор.

§ 4. Двувалентни тензори — основни свойства и операции с тях

Както ще видим по-нататък, основните и най-често срещани тензори в механиката на непрекъснатите среди са двувалентни. (По-точно, това са преди всичко тензорите на напрежение, на деформация и на скоростта на деформация.) Поради това нека ги изучим тук по-подробно, заедно с основните операции, които ще се налага да извършваме върху тях.

4.1. Единичен тензор. Да започнем с един прост и полезен факт, касаещ двувалентните тензори. Нека \mathbf{a}_i е базис в \mathcal{E}_n и нека \mathbf{A} е линейно преобразование (двувалентен тензор), който превръща векторите \mathbf{a}_i в \mathbf{b}_i :

$$\mathbf{a}_i \longrightarrow \mathbf{b}_i, \quad \text{т. е. } \mathbf{b}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогава

$$\mathbf{A} = \mathbf{b}_k \mathbf{a}^k. \quad (4.1)$$

Доказателството на диадното представяне (4.1) следва директно от дефиницията на диадата (3.3):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_k \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_k \delta_i^k = \mathbf{a}_i,$$

съгласно свойството (2.3) на векторите от дуалния базис \mathbf{a}^k .

Нека \mathbf{I} е единичният двувалентен тензор (тъждественото преобразование на \mathcal{E}_n), който оставя всеки вектор неизменен:

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n. \quad (4.2)$$

В частност, $\mathbf{I} \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, n$, за всеки базис $\mathbf{a}_i \in \mathcal{E}_n$. Съгласно (4.1), това означава, че диадното представяне на \mathbf{I} е

$$\mathbf{I} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^i. \quad (4.3)$$

От формулите (2.11) следва

$$\mathbf{I} = g_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j = g^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j, \quad (4.4)$$

т. е. метричните коефициенти g_{ij} и g^{ij} в даден базис представляват компонентите (ковариантните и контравариантните) на единичния тензор \mathbf{I} в съответните диадни разлагания. В ортонормиран базис матрицата на единичния тензор е разбира се единичната — $g^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$.

Да отбележим, че билинейната форма на единичния тензор е скаларното произведение

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}. \quad (4.5)$$

Поради това единичният тензор се нарича още и *метрически* — чрез билинейната си форма той определя „метриката“ върху даденото векторно пространство \mathcal{E}_n (по-точно, скаларното произведение, което именно превръща едно линейно пространство в евклидово).

Използването на координатните разлагания (2.2) и (2.6) в (4.5), заедно с (4.4), дава

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g^{ij} x_i y_j = g_{ij} x^i y^j = x_\alpha y^\alpha = x^\alpha y_\alpha, \quad (4.6)$$

т. е. скаларното произведение в произволен базис се изразява чрез съответните метрически коефициенти.

За ортонормиран базис разликата между ко- и контравариантните компоненти отпада. Матриците $\|g^{ij}\|$ и $\|g_{ij}\|$ са единичните и това води до добре познатия израз

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha y_\alpha, \quad \mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

за скаларното произведение на два вектора чрез декартовите им компоненти, вж. (2.9) и (4.6).

Тензори, пропорционални на единичния:

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}, \quad (4.7)$$

се наричат *сферични* (този термин се обяснява от факта, че тензорният елипсоид, съответстващ на тензорите от вида (4.7) (при $\lambda > 0$), се изразжда в сфера, вж. § 6.3). Те играят специална роля в механиката на деформируемите среди. Например, както ще видим в § .., ако \mathbf{T} е тензорът на напрежението, то $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$ описва т. нар. хидростатично напрегнато състояние. Тук p е налягането, действащо върху произволна площадка в средата. Ако \mathbf{T} е тензорът на деформацията, то $\mathbf{T} = \lambda\mathbf{I}$ описва равномерно разширение или свиване в зависимост от знака на λ (наречено още чиста дилатация). При тази деформация куб с единична страна, изрязан от средата, се превръща отново в куб, но със страна $1 + \lambda$. Изменението на обема на куба (т. е. обемната деформация или дилатацията), тогава е $(1 + \lambda)^3 - 1 \approx 3\lambda$, при предположението, че деформацията е малка ($|\lambda| \ll 1$), вж. § 15.5.

4.2. Транспониран тензор. Нека $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ е двувалентен тензор, като

$$\mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \quad (4.8)$$

е разлагането му в даден диаден базис. Въвеждаме тензора

$$\mathbf{T}^* = t^{ij} \underset{\sqsubset}{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j} = t^{ij} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i. \quad (4.9)$$

Знакът ‘ \sqsubset ’ в диадата $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ означава, че сме разменили местата на диадните множители, т. е.

$$\underset{\sqsubset}{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_i. \quad (4.10)$$

Индексите ‘ i ’ и в ‘ j ’ в (4.9) са неми. Да ги преименуваме — ‘ i ’ да го прекръстим на ‘ j ’, а ‘ j ’ на ‘ i ’. Тогава

$$\mathbf{T}^* = t^{ji} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (4.11)$$

Сравняването на (4.11) с (4.8) показва, че в диадния базис $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ матрицата на тензора \mathbf{T}^* е транспонираната матрица $\|t^{ji}\|$. Поради тази причина тензорът, дефиниран в (4.9) или (4.11), се нарича *транспониран* или (*спрегнат*) на \mathbf{T} (използва се и означението \mathbf{T}^\top). В диадната терминология операцията транспониране съответства на смяна на местата на диадните множители; координатно, това е просто пермутация на индексите i, j .

Да припомним (§ 3.2), че диадата \mathbf{ab} може да се прилага към вектора \mathbf{x} както отляво, така и отдясно. Смяната на мястото (ляво или дясно) е еквивалентно на смяната на местата на диадните множители, вж. (3.4),

т. е. на операцията (4.10). Това показва, че транспонираният тензор може да се дефинира и чрез равенството

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}^*, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n. \quad (4.12)$$

Както ще видим по-долу (§ 8.5), транспонирането на двувалентните тензори е частен случай на една по-обща операция — съставянето на *изомери* на поливалентни тензори. За такива тензори броят на диадните множители е по-голям, съответно индексите са повече, и ние можем да правим различни пермутации на диадните (в този случай ще говорим за полиадни) множители или, в съответните координатни представяния, на индексите. За двувалентен тензор очевидно има единствена нетривиална пермутация $(i, j) \rightarrow (j, i)$, пораждаща и единствения нетривиален изомер на \mathbf{T} — транспонирания тензор \mathbf{T}^* .

4.3. Симетрични и кососиметрични тензори. Двувалентният тензор \mathbf{T} се нарича *симетричен*, ако

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}, \quad (4.13)$$

и *антисиметричен* (или *кососиметричен*), ако

$$\mathbf{T}^* = -\mathbf{T}. \quad (4.14)$$

Означаваме с $\mathcal{E}_n \otimes_s \mathcal{E}_n$ пространството от симетрични двувалентни тензори. Очевидно то е линейно пространство с размерност

$$\dim \mathcal{E}_n \otimes_s \mathcal{E}_n = \frac{1}{2} n(n+1). \quad (4.15)$$

Аналогично, нека $\mathcal{E}_n \otimes_a \mathcal{E}_n$ е пространството от двувалентни антисиметрични тензори; размерността му е

$$\dim \mathcal{E}_n \otimes_a \mathcal{E}_n = \frac{1}{2} n(n-1). \quad (4.16)$$

Да отбележим, че съществува *единствена* размерност n на изходното пространство \mathcal{E}_n , за която

$$\dim \mathcal{E}_n \otimes_a \mathcal{E}_n = \dim \mathcal{E}_n, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2} n(n-1) = n,$$

и това е $n = 3$. Следователно в тримерното (и само в тримерното) пространство кососиметричните тензори могат, по подходящ и еднозначен

начин, да се отъждествят с вектори. Следствие от това е съществуването в тримерното пространство на операцията векторно произведение (§ 7).¹

Всеки двувалентен тензор може да се представи като сума от симетричен и кососиметричен:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^a, \\ \mathbf{T}^s &= \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*), \quad \mathbf{T}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*). \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.4. Следа на тензор. Да вземем произволна диада \mathbf{ab} и да заменим тензорното умножение в нея със скалярно:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \longrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.18)$$

Това превръща двувалентният тензор \mathbf{ab} в скаляр, т.е. намалява валентността му с две.

Тъй като всеки тензор е линейна комбинация на диади, то операцията (4.18) може да се разпространи върху цялото пространство $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ по очевиден начин

$$\mathbf{T} = t_j^i \mathbf{a}^j \mathbf{a}_i \longrightarrow t_j^i \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i \quad (4.19)$$

— във всяка от базисните диади $\mathbf{a}^j \mathbf{a}_i$ сме заменили тензорното произведение със скалярно. От дефиницията на дуалния базис (2.3) следва, че

$$t_j^i \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i = t_\alpha^\alpha$$

— полученото число е сумата t_α^α от диагоналните елементи на матрицата на тензора $\|t_j^i\|$, т.е. следата на тази матрица. Поради това наричаме тази сума *следа* на тензора \mathbf{T} и използваме означението

$$\text{tr } \mathbf{T} = t_\alpha^\alpha. \quad (4.20)$$

Видно е, че операцията (4.19) при координатно представяне съответства на следното: в матрицата $\|t_j^i\|$ на тензора \mathbf{T} вземаме горният и долният индекс равни, $i = j = \alpha$, и сумираме по вече повтарящия се индекс α .

¹Тук фактически е единственото място в цялата тази глава, където разглеждането на n -мерния случай наистина е оправдано. Навсякъде другаде, започвайки от самото начало, можем да се ограничим само със случая $n = 3$, имайки предвид, че телата в класическата механика се движат и деформират в тримерното пространство.

Ако \mathbf{T} е зададен с ко- или контравариантните си компоненти, то следата му се изразява с помощта на метрическите коефициенти g_{ij} или g^{ij} :

$$\begin{aligned} \text{ако } \mathbf{T} = t^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j, \quad \text{то } \operatorname{tr} \mathbf{T} &= t^{ij} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = t^{ij} g_{ij}, \\ \text{ако } \mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j, \quad \text{то } \operatorname{tr} \mathbf{T} &= t_{ij} \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j = t_{ij} g^{ij}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

вж. (4.19) и (2.12).

Да подчертаем специално, че следата, макар и дефинирана в (4.20) или (4.21) чрез компонентите на \mathbf{T} , представлява *инвариант* на тензора \mathbf{T} , т. е. величина, която *не зависи* от избора на базиса, а единствено от самия тензор. Това се вижда ясно от съотношенията (4.18) или (4.19) — при определянето на $\operatorname{tr} \mathbf{T}$ тензорното произведение се заменя със скаларно. Това е очевидно инвариантна операция, независима от избора на конкретен базис.

В инвариантността на следата можем, разбира се, да се убедим и директно, използвайки формулата (3.21) за преобразуване на смесените компоненти на двувалентен тензор при смяна на базиса:

$$t_{\alpha'}^{\alpha} = A_p^{\alpha'} A_{\alpha'}^q t_q^p = \delta_p^q t_q^p = t_{\alpha}^{\alpha},$$

вж. (2.16), т. е. $\operatorname{tr} \mathbf{T}$ наистина е инвариант на тензора \mathbf{T} .

Отбелязваме и очевидното равенство

$$\operatorname{tr} \mathbf{T} = \operatorname{tr} \mathbf{T}^* \quad (4.22)$$

— следите на тензора и на спрегнатия му съвпадат.

Да забележим, че операцията (4.18) е частен случай на т. нар. контракция при поливалентни тензори (§ 8.5). При тези тензори диадните множители в базиса са повече (по-точно, базисът не е вече от диади, а от полиади). Във всяка двойка диадни множители в полиадата можем да заменим тензорното произведение със скаларно. Това ще намали валентността на тензора с две. Ако в една двойка диадни множители в полиадния базис единият от векторите е от базиса \mathbf{a}_i , а другият от дуалния базис \mathbf{a}^i , координатно контракцията ще се извърши по начина, споменат по-горе. Именно вземаме съответната (на разглежданите диадни множители) двойка индекси (един горен и един долен) равни и сумираме. В поливалентния случай можем естествено да извършим няколко разнообразни контракции. За двувалентния тензор \mathbf{T} възможната контракция е само една и резултатът от извършването ѝ е следата $\operatorname{tr} \mathbf{T}$.

Следите на основните тензори, с които ще се сблъскаме по-нататък, имат проста и важна интерпретация. Например, следата на тензора на

деформация съвпада с обемното разширение на елемент от средата. Следата на тензора на напрежението е хидростатичното налягане в тази точка. Поради това тензори, чиято следа е нула, играят специална роля в механиката на деформируемите среди; те се наричат *девиатори*.

Да отбележим, че всеки тензор $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ може да се представи като сума на сферичен тензор и на девиатор:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{1}{n} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T} + \mathbf{D}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{T} - \frac{1}{n} \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0,\end{aligned}\tag{4.23}$$

тъй като $\operatorname{tr} \mathbf{I} = n$ в n -мерния случай.

4.5. Детерминанта на тензор. Освен следата, можем да определим още един важен инвариант на двувалентен тензор \mathbf{T} — неговата *детерминанта*.

Нека $\mathbf{T} = t_i^j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$ е разлагането на \mathbf{T} с помощта на смесените му компоненти t_i^j в даден диаден базис. По дефиниция

$$\det \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \det \left(t_i^j \right), \tag{4.24}$$

т. е. това е детерминантата на матрицата $\|t_i^j\|$. Макар и въведена в (4.24) координатно, $\det \mathbf{T}$ не зависи от избора на базиса, т. е. представлява *инвариант* на тензора \mathbf{T} . Наистина, ако t_i^j са съответните компоненти на \mathbf{T} в друг базис, то

$$\begin{aligned}\det \left(t_i^j \right) &= \det \left(A_{i'}^i A_j^{j'} t_i^j \right) \\ &= \det \left(A_{i'}^i \right) \det \left(A_j^{j'} \right) \det \left(t_i^j \right) = \det \left(t_i^j \right),\end{aligned}$$

съгласно добре познатите свойства на детерминантата на матрици (детерминантата на произведение от матрици е произведение на детерминантите на матриците множители). Използвана е също формулата (3.21) за преобразуване на компонентите t_i^j при смяна на базиса, както и фактът, че $A_{i'}^i$ и $A_i^{i'}$ са взаимнообратни и затова

$$\det \left(A_{i'}^i \right) \det \left(A_i^{i'} \right) = 1,$$

вж. (2.16). Ще отбележим за пълнота и формулата

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}^*, \tag{4.25}$$

която следва от дефиницията (4.24) и от добре известно свойство на детерминантата на матрица.

4.6. „Полускаларно“ умножение на тензори.² Ще определим тази операция първо върху диадите.

Нека \mathbf{ab} и \mathbf{cd} са две диади. Въвеждаме полускаларното им произведение по следния начин:

$$(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad}. \quad (4.26)$$

Тук използваме знака ‘ \cdot ’ както и при скаларното произведение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ на векторите \mathbf{x} и $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_n$. При последните обаче $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ е число, докато при диадите операцията (4.26) води отново до диада. Това обяснява, впрочем, защо наричаме (4.26) полускаларно произведение.

Веднага ще отбележим, че полускаларното произведение (за разлика от скаларното) не е комутативно. Наистина

$$(\mathbf{cd}) \cdot (\mathbf{ab}) = \mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})\mathbf{cb} \quad (4.27)$$

и, очевидно,

$$(\mathbf{cd}) \cdot (\mathbf{ab}) \neq (\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}), \quad (4.28)$$

както показва сравнението между (4.26) и (4.27) (освен при специален избор на векторите \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} — какъв?).

Операцията (4.26) се разпространява по естествен начин от съвкупността на диадите върху цялото пространство $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. За тази цел припомним, че всеки двувалентен тензор е линейна комбинация на диади, вж. дефиниция 3.1. Именно нека \mathbf{T} , $\mathbf{S} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и

$$\mathbf{T} = t_p^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^p, \quad \mathbf{S} = s_j^q \mathbf{a}_q \mathbf{a}^j,$$

за даден базис $\mathbf{a}_i \in \mathcal{E}_n$. Тогава

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} &= \left(t_p^i \mathbf{a}_i \mathbf{a}^p \right) \cdot \left(s_j^q \mathbf{a}_q \mathbf{a}^j \right) \\ &= t_p^i s_j^q \mathbf{a}_i (\mathbf{a}^p \cdot \mathbf{a}_q) \mathbf{a}^j = t_p^i s_j^q \delta_p^q \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = t_\alpha^i s_j^\alpha \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} t_\alpha^i s_j^\alpha \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j. \quad (4.29)$$

Следователно матрицата (от смесените компоненти) на тензора $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ е произведение на съответните матрици на тензорите \mathbf{T} и \mathbf{S}

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})_j^i = t_\alpha^i s_j^\alpha. \quad (4.30)$$

² „semi-dot product“ в английската литература

От (4.29) се вижда, че полускаларното произведение на тензорите има проста интерпретация. Именно, ако третираме \mathbf{T} и $\mathbf{S} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ като линейни преобразования на \mathcal{E}_n , то $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ е тяхната суперпозиция

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n, \quad (4.31)$$

— прилагаме \mathbf{S} към вектора \mathbf{x} , резултатът е векторът $\mathbf{y} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$, към който прилагаме на свой ред тензора \mathbf{T} .

Лесно е да се покаже, че операцията (4.29) е асоциативна (като следствие от факта, че произведението на матриците е асоциативно). Това означава, да споменем, че полускаларното произведение превръща пространството от двувалентни тензори в линейна некомутативна алгебра.

Да отбележим очевидните равенства

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^* = \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{T}^*, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \quad (4.32)$$

както и формулата

$$\det(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) = (\det \mathbf{T}) (\det \mathbf{S}), \quad (4.33)$$

която отново следва от дефиницията (4.24), от (4.30) и от добре известно свойство на детерминантата на матрица.

4.7. „Дължина“ на тензор. С помощта на полускаларното умножение (4.29) можем да въведем по естествен начин скаларно произведение в пространството от двувалентни тензори. Именно, нека $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. Полагаме

$$(\mathbf{T}, \mathbf{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^*) = t^{ij} s_{ij}. \quad (4.34)$$

Упражнение 4.1. С помощта на тензорния закон (3.21) проверете, че (\mathbf{T}, \mathbf{S}) е инвариант, т. е. зависи единствено от тензорите \mathbf{T} и \mathbf{S} , но не и от избора на базиса в \mathcal{E}_n .

Функцията (\mathbf{T}, \mathbf{S}) е очевидно билинейна — линейно зависи от всеки от аргументите си \mathbf{T} и \mathbf{S} . Тя е и симетрична:

$$(\mathbf{T}, \mathbf{S}) = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^*) = \text{tr}((\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^*)^*) = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^*) = (\mathbf{S}, \mathbf{T}),$$

вж. (4.22) и (4.32). Освен това

$$(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^*) = t^{ij} t_{ij} = \sum_{i,j=1}^n t_{ij}^2 \geq 0,$$

избирайки ортонормиран базис. От последното равенство се вижда, че

$$(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T} = 0.$$

Всичко това означава, че билинейната форма (\mathbf{T}, \mathbf{S}) , дефинирана в (4.34), представлява скалярно произведение в $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, превръщайки последното в евклидово пространство.

Дължината (или нормата) на тензора \mathbf{T} се дефинира стандартно чрез скалярното произведение:

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{(\mathbf{T}, \mathbf{T})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^*)} = \sqrt{t^{ij} t_{ij}}, \quad (4.35)$$

или

$$|\mathbf{T}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n t_{ij}^2}, \quad (4.36)$$

ако базисът е ортонормиран.

Напомняме, че (4.36) е една от познатите норми на матрица, използвани в курсовете по линейна алгебра и числени методи. Да подчертаем още веднъж, че тя е инвариант на тензора \mathbf{T} , т. е. зависи само от \mathbf{T} , но не и от избора на конкретното му координатно представяне.

Ще отбележим също и неравенството

$$|\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}| \leq |\mathbf{T}| |\mathbf{S}|, \quad (4.37)$$

което е просто следствие на класическото неравенство на Шварц.

4.8. Обратен тензор. Тензорът \mathbf{B} със свойството $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$ се нарича *обратен* на \mathbf{A} с се означава с \mathbf{A}^{-1} , т. е.

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (4.38)$$

За съществуването на \mathbf{A}^{-1} е необходимо и достатъчно тензорът \mathbf{A} да осъществява взаимноеднозначно преобразование на пространството \mathcal{E}_n , т. е. да е изпълнено условието

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (4.39)$$

Условието (4.39), предвид линейността на \mathbf{A} , е еквивалентно на

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \quad (4.40)$$

— единствено образът на нулевия вектор може да бъде нулев, ако съществува \mathbf{A}^{-1} (и обратно).

От (4.38) и от свойството на детерминантата следва, впрочем, че

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1,$$

т. е.

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}. \quad (4.41)$$

Следователно ако \mathbf{A}^{-1} съществува, то $\det \mathbf{A} \neq 0$. Верно е и обратното твърдение.³ Това означава, че

$$\exists \mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0. \quad (4.42)$$

За пълнота ще споменем и очевидната формула

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad (4.43)$$

която е в сила, ако и двата тензора \mathbf{T} и \mathbf{S} са обратими.

4.9. Собствени вектори. Доколкото всеки двувалентен тензор може да се интерпретира като линейно преобразование над \mathcal{E} , припомняме едно основно понятие от линейната алгебра. Векторът $\mathbf{a} \neq 0$ се нарича *собствен вектор* на \mathbf{T} , съответстващ на собствената стойност λ , ако

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}. \quad (4.44)$$

От (4.44) следва, че

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} \neq 0.$$

Съгласно (4.40), тензорът $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}$ не е обратим и поради това детерминантата му е нула:

$$f_{\mathbf{T}}(\lambda) = \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4.45)$$

вж. (4.42).

Функцията $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$ е очевидно полином от степен n , наречен *характеристичен* за тензора \mathbf{T} . От проведените разсъждения е ясно, че реалните корени на този полином изчерпват собствените стойности на \mathbf{T} . (Да

³Използваме условието за обратимост (4.40) на тензора \mathbf{A} . Уравнението $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ в даден базис има вида

$$A_i^\alpha x_\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

където $\|A_i^\alpha\|$ е съответната матрица на \mathbf{A} . Това е система от линейни уравнения спрямо компонентите x_α на вектора \mathbf{x} . По правилото на Крамер решението на тази хомогенна система е единствено нулевото, ако $\det(A_i^\alpha) = \det \mathbf{A} \neq 0$.

напомним, че навсякъде тук работим с векторни пространства над реалната ос \mathfrak{R} и затова ни интересуват само реалните корени на полинома $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$.)

Развиваме характеристичния полином $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$ по степените на λ

$$f_{\mathbf{T}}(\lambda) = \lambda^n - I_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} \lambda + (-1)^n I_n. \quad (4.46)$$

Полиномът $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$ е дефиниран в (4.45) безкоординатно. Поради това и коефициентите I_1, I_2, \dots, I_n в разлагането (4.46) притежават същото свойство. Това са т. нар. *скаларни инварианти* на тензора \mathbf{T} . (Инварианти, доколкото зависят само от тензора \mathbf{T} , но не и от конкретния избор на базиса и от съответната матрица на \mathbf{T} в този базис.) Впрочем, полагайки $\lambda = 0$ в (4.46) и сравнявайки резултата с (4.45) намираме

$$(-1)^n I_n = \det \mathbf{T}, \quad (4.47)$$

което е несъмнено инвариант на \mathbf{T} (вж. § 4.5). Изразите за останалите инварианти ще обсъдим по-долу.

Ако пространството е тримерно, то характеристичният полином е от трета степен. Уравнението (4.45) в този случай винаги има поне един реален корен. Това означава, че всеки тензор в тримерното пространство има поне един собствен вектор. Еквивалентно,

$$\forall \mathbf{T} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \quad \exists \mathbf{a} \in \mathcal{E}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} \parallel \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \neq 0, \quad (4.48)$$

ако $\dim \mathcal{E} = 3$ (и, по-общо, ако $\dim \mathcal{E}$ е нечетно). С думи, за всеки тензор \mathbf{T} над тримерното пространство ще се намери поне един вектор $\mathbf{a} \neq 0$, така че $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$ и \mathbf{a} са колинеарни.

Нека \mathbf{T} е симетричен тензор. Съгласно класически резултат на линейната алгебра всички негови собствени стойности λ_i , общо n на брой, са реални, а съответните им собствени вектори \mathbf{e}_i образуват ортонормиран базис в \mathcal{E}_n (предполагаме, че $|\mathbf{e}_i| = 1$). В диадния базис $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ матрицата на тензора \mathbf{T} е диагонална

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \quad \text{т. е.} \quad t_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \quad \left(\sum_i' \right), \quad (4.49)$$

или

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Стандартната формулировка на този резултат от курса по линейна алгебра гласи, че всяка симетрична матрица може да се приведе в диагоналния вид с помощта на подходящо преобразование на координатната система.⁴ Напомняме също, че ако собствените стойности са различни, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, то собствените вектори се определят *еднозначно*, с точност до посоката си — ако \mathbf{e}_i е собствен вектор на \mathbf{T} , то и $-\mathbf{e}_i$ е такъв. Ако някои от собствените стойности съвпадат например $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_i$, $i = 3, \dots, n$, то всеки вектор в равнината $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ е собствен за \mathbf{T} .

Съгласно формулите на Виет, коефициентите I_1, \dots, I_n на характеристичния полином $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$, вж. (4.46), се изразяват чрез корените му по следния начин:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n, \\ \dots, I_n &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

Оттук, в частност, се вижда, че

$$I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{T}, \quad I_n = (-1)^n \det \mathbf{T}, \quad (4.51)$$

ср. с (4.47). В тримерния случай

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{T})^2 - \operatorname{tr} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) \right]. \quad (4.52)$$

(Проверете!)

4.10. Ортогонални тензори. Тензорът $\mathbf{U} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се нарича *ортогонален*, ако той запазва скаларното произведение:

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n. \quad (4.53)$$

С помощта на (4.12) преобразуваме (4.53)

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}^*) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

или

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n.$$

Това означава, че

$$\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1} \quad (4.54)$$

⁴Ще отбележим, че представянето (4.49) е крайномерният прототип на спектралното разлагане на самоспрегнатите оператори, изучавано подробно в безкрайномерния случай вече във функционалния анализ.

— свойство, което ще използваме по-нататък за характеризирането на ортогоналните тензори.

Означаваме с $\mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ съвкупността от всички ортогонални преобразования на \mathcal{E}_n . Това очевидно е група спрямо полускаларното умножение, наречена *ортогонална* (или *унитарна*) *група* на пространството \mathcal{E}_n (ако $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$, то и $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ — проверете, например, формално с помощта на (4.54), макар че това е ясно и от самата дефиниция (4.53).) Единичният елемент на групата $\mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ е тъждественото преобразование (единичният тензор) \mathbf{I} . В частност, ако $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$, то и $\mathbf{U}^{-1} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$. Обратимостта на ортогоналните тензори е видна впрочем и от факта, че те запазват дължината на векторите, така че $\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = 0$ е възможно само ако $\mathbf{x} = 0$, вж. (4.40).

Щом ортогоналните тензори са обратими, детерминантата им е ненулева. Нещо повече, нейният модул е винаги единица. Това следва от (4.54), (4.25) и (4.33):

$$\det(\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{U}) = (\det \mathbf{U})^2 = \det \mathbf{I} = 1,$$

т. е.

$$\det \mathbf{U} = \pm 1. \quad (4.55)$$

4.11. Ортогонални тензори в тримерния случай. Ортогоналните тензори над тримерно пространство представляват специален интерес. Една от основните за нас причини е тясната им връзка с движенията на абсолютно твърдите тела в тримерното пространство, в което ще се убедим в следващия пункт § 4.12.

Както е известно от линейната алгебра, матрицата на всяко ортогонално преобразование \mathbf{U} в тримерното пространство \mathcal{E}_3 може да се приведе, при подходящ избор на декартовата система $Ox_1x_2x_3$, във вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

т. е.

$$\mathbf{U} = \pm \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \cos \varphi (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) + \sin \varphi (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad (4.57)$$

където \mathbf{e}_i са единичните вектори (ортите) на координатните оси Ox_i , $i = 1, 2, 3$.

Упражнение 4.2. С помощта на (4.29) проверете директно равенството $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{I}$, гарантиращо ортогоналността на тензора \mathbf{U} , зададен в (4.57).

Тензорът \mathbf{U} , дефиниран в (4.57), представлява или ротация (на ъгъл φ) около оста Ox_1 , определена от вектора \mathbf{e}_1 , или ротация, комбинирана с инверсията

$$-\mathbf{I} : \mathbf{x} \longrightarrow -\mathbf{x},$$

в зависимост, съответно, от знака ‘плюс’ или ‘минус’ на диадата $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$ (т.е. на първия елемент на матрицата (4.56)). Нещо повече, този знак съвпада със знака на $\det \mathbf{U}$, вж. (4.55). Този факт ни подсказва да въведем множеството

$$\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3) = \{ \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3) \mid \det \mathbf{U} = 1 \} \subset \mathcal{O}(\mathcal{E}_3), \quad (4.58)$$

от т. нар. *собствено ортогонални преобразования* в тримерното пространство. Ясно е, че $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ е подгрупа в $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$ — суперпозицията (полускаларното произведение) на две собствено ортогонални преобразования е отново собствено ортогонално. Геометрично, елементите на $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ представляват „чисти“ ротации на пространството \mathcal{E}_3 .

Очевидно, произволен тензор $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$ е или собствено ортогонален, или може да се представи във вида $\mathbf{U} = (-\mathbf{I}) \cdot \mathbf{V} = -\mathbf{V}$, където \mathbf{V} е собствено ортогонален (ако детерминантата на \mathbf{U} е -1). В последния случай \mathbf{U} представлява отново ротация, но този път съпроводена с инверсия на пространството.

4.12. Теорема на Ойлер-Даламбер. Ще отбележим първо, че собствено ортогоналните преобразования в \mathcal{E}_3 могат да се отъждествят с движенията на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка.

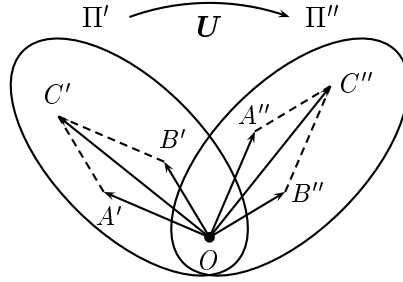
За да се убедим в това, разглеждаме две положения, Π' и Π'' , на тялото, вж. фиг. 4.1. Материалната частица, заемаща точката A' в положение Π' се премества в точката A'' при движението на тялото от Π' в Π'' . Съответно, векторът $\overrightarrow{OA'}$ се преобразува в $\overrightarrow{OA''}$:

$$\mathbf{U} : \overrightarrow{OA'} \longrightarrow \overrightarrow{OA''} \quad (4.59)$$

при това движение, с което се определя преобразованието \mathbf{U} на пространството \mathcal{E}_3 . Това преобразование очевидно запазва дължините и ъглите между векторите, щом се разглежда движение на абсолютно твърдо тяло. Остава да покажем, че \mathbf{U} освен това е и линейно.

Наистина нека

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}.$$



Фиг. 4.1. Движение на абсолютно твърдо тяло

При движението $\Pi' \rightarrow \Pi''$ точките A' , B' и C' „лягат“ в положения A'' , B'' и C'' , съответно. Успоредникът $OA'C'B'$ при това движение само се завърта около полюса O , заемайки положението $OA''C''B''$, вж. фиг. 4.1, без са се деформира, т. като тялото е абсолютно твърдо. Но това означава, че

$$\overrightarrow{OC''} = \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC''} &= \mathbf{U} \cdot \overrightarrow{OC'} = \mathbf{U} \cdot (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}) \\ &= \overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} = \mathbf{U} \cdot \overrightarrow{OA'} + \mathbf{U} \cdot \overrightarrow{OB'}, \end{aligned}$$

с което линейността на \mathbf{U} е доказана.

Ортогоналността на преобразованието \mathbf{U} следва вече от факта, че \mathbf{U} запазва дължините: $|\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$, $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{E}_3$. Оттук, при $\mathbf{a} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y})|^2 &= \mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{U} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}|^2 \\ &+ 2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}) = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \end{aligned}$$

и затова $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (тъй като $|\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$, $|\mathbf{U} \cdot \mathbf{y}| = |\mathbf{y}|$). Но според дефиницията (4.53), това именно и означава, че $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$.

Съгласно § 4.11 ортогоналните преобразования в \mathcal{E}_3 са или ротации, или ротации съчетани с инверсия. Но абсолютно твърдо тяло, движейки се в тримерното пространство, не може да извърши инверсията $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, оставайки по време на цялото си движение в тримерното пространство. Следователно преобразованието $\Pi' \rightarrow \Pi''$ дефинирано в (4.59) е собствено ортогонално и поради това то представлява ротация, вж. отново § 4.11. Но последното твърдение не е нищо друго освен съдържанието

на известната теорема на Ойлер-Даламбер от кинематиката на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка O : всяко движение на такова тяло може да се реализира като ротация около ос, минаваща през O . По такъв начин се оказва, че тази класическа теорема на кинематиката има чисто алгебричен характер, свързан със структурата на ортогоналните тензори в тримерното пространство.

§ 5. Функция на тензор. Полярно разлагане

5.1. Функция на тензор. Нека $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. Заедно с \mathbf{T} можем да разглеждаме полускаларните му „степенни“:

$$\mathbf{I}, \mathbf{T}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}, \dots \quad (5.1)$$

— добавяме тук и единичния тензор \mathbf{I} за пълнота, предполагайки, че той представлява нулевата степен на всеки тензор $\mathbf{T} \neq 0$ (аналогично на реалните числа, при които $a^0 = 1$ за всяко $a \neq 0$).

Нека $f(x)$ е реална аналитична функция

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (5.2)$$

с област на сходимост $|x| \leq R$. Операцията полускаларно умножение позволява да въведем по естествен начин функцията $f(\mathbf{T})$ на двувалентния тензор \mathbf{T} , по следния естествен начин:

$$f(\mathbf{T}) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{T} + a_2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + a_3 \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \dots, \quad (5.3)$$

който ще е сходящ, ако $|\mathbf{T}| \leq R$, вж. дефиницията на нормата (4.35) и свойството ѝ (4.37).

По този начин добре известните елементарни функции от анализа могат да се дефинират и в пространството от двувалентни тензори. Например,

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{T} &= \mathbf{I} + \mathbf{T} + \frac{1}{2!} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{3!} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \dots, \\ \sin \mathbf{T} &= \mathbf{T} - \frac{1}{3!} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \dots, \\ \ln(\mathbf{I} + \mathbf{T}) &= \mathbf{T} - \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + \frac{1}{3} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - \dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

и т. н.

Обръщаме внимание, че елементарните функции от типа на (5.4) наследяват някои от свойствата на скаларните си „родители“, но далеч не всички. Например можем да твърдим, че

$$\exp(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \exp \mathbf{T} \cdot \exp \mathbf{S}$$

единствено, ако \mathbf{T} и \mathbf{S} комутират, т. е. ако $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$.

Упражнение 5.1. Като използвате дефиницията (4.54) покажете, че

$$\exp \mathbf{K} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n), \quad \text{ако} \quad \mathbf{K} \in \mathcal{E}_n \otimes_a \mathcal{E}_n,$$

т. е. експонентата на кососиметричен тензор е ортогонално преобразование.

От дефиницията (5.3) и от (4.32) е ясно, че

$$(f(\mathbf{T}))^* = f(\mathbf{T}^*). \quad (5.5)$$

В случая на симетричен тензор \mathbf{T} функцията $f(\mathbf{T})$ може да се определи по-просто и по-общо, без да се изисква аналитичността на $f(x)$. За тази цел използваме представянето (4.49) на \mathbf{T} в диадния базис, породен от собствените вектори \mathbf{e}_i на \mathbf{T} . Забелязваме, че

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \left(\sum_i^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j^n \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_k^n \lambda_k^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \sum_k^n \lambda_k^3 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \quad \text{и т. н.}$$

Тук използвахме дефиницията (4.29) на полускаларното умножение и факта, че векторите \mathbf{e}_i образуват ортонормиран базис. Следователно

$$f(\mathbf{T}) = \sum_{k=1}^n \left(a_0 + a_1 \lambda_k + a_2 \lambda_k^2 + \dots \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k.$$

Това подсказва, че за симетричен тензор \mathbf{T} може да дефинираме $f(\mathbf{T})$ по следния начин:

$$f(\mathbf{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k, \quad (5.6)$$

като тук вече не е необходимо да предполагаме аналитичността на $f(x)$. Единственото ограничение е $f(x)$ да бъде дефинирана в интервала, в който лежат собствените стойности на разглежданите тензори.

5.2. Теорема на Хамилтън-Кейли. Нека отново \mathbf{T} е симетричен тензор и $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$ е характеристичният му полином (4.45). Разглеждаме функцията $f_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})$ — съгласно (5.6)

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) = \sum_{k=1}^n f_{\mathbf{T}}(\lambda_k) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

тъй като собствените стойности λ_k са корени на $f_{\mathbf{T}}(\lambda)$, вж. § 4.9. Следователно, всеки тензор \mathbf{T} анулира характеристичния си полином. В това именно се състои теоремата на Хамилтън-Кейли, доказана тук за простота само за симетрични тензори.

Упражнение 5.2. Покажете, че за симетричен тензор \mathbf{T} над тримерно пространство е в сила равенството

$$\det \mathbf{T} = \frac{1}{3} \left[\operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{T}) (\operatorname{tr} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) + \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \mathbf{T})^3 \right]. \quad (5.8)$$

В частност, ако \mathbf{T} е девиатор, $\operatorname{tr} \mathbf{T} = 0$, то

$$\det \mathbf{T} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}),$$

Упътване: Може, разбира се, да проверите (5.8), преминавайки към главните оси на тензора \mathbf{T} , когато матрицата му е диагонална, вж. (4.50). Другият по-нетривиален начин е да запишете теоремата на Хамилтън-Кейли в тримерния случай:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} - I_1 \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} + I_2 \mathbf{T} - I_3 \mathbf{I} = \mathbf{0},$$

да вземете следата от двете страни и да използвате формулата (4.52) за квадратичния инвариант I_2 .

5.3. „Корен“ от тензор. Нека собствените стойности на симетричния тензор \mathbf{T} са неотрицателни, $\lambda_k \geq 0$. Тогава можем да определим корен от тензора \mathbf{T} по следния начин

$$\sqrt{\mathbf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k. \quad (5.9)$$

Тензорът-корен $\sqrt{\mathbf{T}}$ има очевидното свойство

$$\sqrt{\mathbf{T}} \cdot \sqrt{\mathbf{T}} = \mathbf{T}, \quad (5.10)$$

което именно го прави естествено обобщение на понятието корен на реално (неотрицателно) число.

Да отбележим, че съществува прост критерий за проверка дали собствените числа на тензор \mathbf{T} са неотрицателни, без да е необходимо те да се изчисляват явно. За тази цел разглеждаме т. нар. *квадратична форма*, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$, на тензора \mathbf{T} . Тензорът се нарича *положително дефинитен*, ако

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_n, \quad (5.11)$$

и *строго положително дефинитен*, ако $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = 0$ само при $\mathbf{x} = 0$.

Ще покажем, че ако \mathbf{T} е положително дефинитен, то собствените му числа са неотрицателни. Но щом \mathbf{T} е симетричен, съществува ортонормиран базис от собствени вектори \mathbf{e}_i , съответстващ на собствените числа λ_i . Внасяме $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ в (5.11). Тогава

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \geq 0,$$

$i = 1, \dots, n$, т. е. собствените числа λ_i наистина са неотрицателни.

Лесно се проверява и обратното твърдение: ако $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, то \mathbf{T} е положително дефинитен:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0,$$

вж. (4.49).

Гореказаното ни позволява да заключим, че за положително дефинитните симетрични тензори \mathbf{T} (и само за тях) съществува техният корен $\sqrt{\mathbf{T}}$. Нещо повече, ако поискаме допълнително коренът $\sqrt{\mathbf{T}}$ да бъде също положително дефинитен, то той се определя *еднозначно*. С други думи, в класа на положително дефинитните и симетрични тензори \mathbf{T} съществува *единствен* тензор-корен, за който е в сила (5.10).

Упражнение 5.3. *Покажете, че тензорът е кососиметричен тогава и само тогава, когато квадратичната му форма се анулира тъждествено. (Това означава, че квадратичната форма на произволен тензор \mathbf{T} съвпада с тази на симетричната му част \mathbf{T}^s , вж. (4.17).)*

5.4. Изометрични тензори. Два тензора $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ се наричат *изометрични*, ако

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n, \quad (5.12)$$

т. е. ако скаларните произведения на образите на всеки два вектора от \mathcal{E}_n под действието и на \mathbf{A} , и на \mathbf{B} са едни и същи.

Очевидно, при $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ условието (5.12) се превръща в дефиницията (4.53) на ортогоналното преобразование. С други думи, тензорите, изометрични на единичния, са просто ортогоналните преобразования.

Да предположим, че \mathbf{B} е обратим и да изберем в (5.12)

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{v}, \quad (5.13)$$

където \mathbf{u}, \mathbf{v} са произволни вектори в \mathcal{E}_n . Тогава

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{E}_n. \quad (5.14)$$

Но това означава, че тензорът $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U}$ е ортогонален. Следователно, ако \mathbf{A} и \mathbf{B} са изометрични, то съществува $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, така че

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{B}. \quad (5.15)$$

Вместо (5.13) можем да изберем

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v},$$

за да се убедим този път, че тензорът $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}$ е ортогонален, т. е.

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{V} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}). \quad (5.16)$$

От (5.15) и (5.16) се вижда веднага, че ортогоналните тензори \mathbf{U} и \mathbf{V} са взаимно-обратни.

5.5. Полярно разлагане. Нека $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ е двувалентен тензор. Разглеждаме тензорите

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*, \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}. \quad (5.17)$$

И двата, очевидно, са симетрични. Нещо повече, те са и положително дефинитни, т. е. квадратичните им форми са неотрицателни, вж. § 5.3. Наистина

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}|^2 \geq 0,$$

и аналогично за квадратичната форма на тензора $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$.

Съгласно § 5.3 щом симетричните тензори (5.17) са положително дефинитни, то съществуват корените им

$$\mathbf{H}_1 = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}, \quad \mathbf{H}_2 = \sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}}, \quad (5.18)$$

които също са симетрични.

Теорема 5.1 (полярно разлагане). *Всеки тензор $\mathbf{A} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ може да се представи във вида*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}), \quad (5.19)$$

т. е. като суперпозиция на ортогонален и на положително дефинитен симетричен тензор. Тензорите в (5.19) се определят еднозначно от \mathbf{A} , като \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 са дадени в (5.18).

Доказателство. Показваме, че тензорите \mathbf{A} и \mathbf{H}_2 са изометрични, използвайки дефиницията (5.12):

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}} \cdot \mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}} \cdot \sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}} \cdot \mathbf{y} \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n. \end{aligned}$$

Съгласно показаното в § 5.4, вж. (5.15), съществува $\mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$ така че

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H}_2. \quad (5.20)$$

С това първото от представянията (5.19) е доказано.

Сега ще покажем единствеността на тензорните „множителни“ \mathbf{U} и \mathbf{H}_2 в (5.20). Да допуснем, че има и друго представяне от същия вид

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{U}} \cdot \overline{\mathbf{H}}_2, \quad (5.21)$$

където $\overline{\mathbf{U}} \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, а $\overline{\mathbf{H}}_2$ е симетричен и положително дефинитен тензор. Тогава

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \overline{\mathbf{H}}_2 \cdot \overline{\mathbf{U}}^* \cdot \overline{\mathbf{U}} \cdot \overline{\mathbf{H}}_2 = \overline{\mathbf{H}}_2 \cdot \overline{\mathbf{H}}_2.$$

Следователно, $\overline{\mathbf{H}}_2 = \sqrt{\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}}$. Но положително дефинитният корен на симетричен, също положително дефинитен тензор, се определя еднозначно, вж. края на § 5.3. На свой ред и ортогоналният „множител“

$$\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{H}_2^{-1}$$

също се определя еднозначно.

Аналогично се показва, че $\mathbf{H}_1 = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}$ е изометричен с \mathbf{A}^* и затова

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{V}^* \in \mathcal{O}(\mathcal{E}),$$

с еднозначно определени тензори \mathbf{V} и \mathbf{H}_1 . Оттук

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{V}. \quad (5.22)$$

Остана да покажем, че ортогоналните тензори \mathbf{U} и \mathbf{V} в (5.20) и (5.22), съответно, съвпадат, $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

За тази цел преписваме (5.22) във вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{V}), \quad (5.23)$$

вж. (4.54), и сравняваме (5.23) и (5.20). Но \mathbf{V} е ортогонален, а $\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{V}$ е симетричен и положително дефинитен. (Проверете!) Тъй като тензорите \mathbf{U} и \mathbf{H}_2 в представянето (5.20) се определят еднозначно от \mathbf{A} , то

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{U},$$

с което теоремата е доказана. \square

Упражнение 5.4. Полярното представяне (5.19) може да се докаже и без да се привлича понятието изометричност на тензори. Достатъчно е да се забележи, че тензорът $\mathbf{U} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_2^{-1}$ е ортогонален. Проверете!

В заключение на този параграф ще направим две забележки.

Първата е свързана с термина полярно разлагане, използван за формулата (5.19). Произходът му се корени в известното представяне $z = re^{i\varphi}$ на комплексното число z . При умножение с z в комплексната равнина \mathbb{C} , модулите на числата първо се умножават с r — това е хомотетия, представляваща чиста деформация (раздуване или свиване) на \mathbb{C} , което именно е прототипът на симетричния тензор \mathbf{H}_1 (или \mathbf{H}_2) в (5.19). На свой ред умножението с $e^{i\varphi}$ е ротация в \mathbb{C} , и това е прототипът на ортогоналния тензор \mathbf{U} в полярното представяне (5.19).

Втората забележка е свързана с важната интерпретация на полярното разлагане, която ще се появи по-нататък при изучаване на локалната деформация на тяло (§ 15.1). В този случай \mathbf{A} , както ще видим, е т. нар. тензор на дисторсията, определящ локално деформацията на частица от средата. В този контекст представянето (5.19) означава, че разглежданата деформация локално представлява суперпозиция на едно движение на частицата като абсолютно твърдо тяло (определено от тензора \mathbf{U}) и от „чистата“ деформация, описвана от тензорите \mathbf{H}_1 или \mathbf{H}_2 , при която вече се изменя взаимното разположение на точките в движещата се частица.

§ 6. Пример — тензор на инерцията на Ойлер

В този момент нека прекъснем формалното изложение на тензорната алгебра за да обсъдим по-подробно два класически примера на двува-

лентни тензори — тензорите на инерция на Ойлер (в този параграф) и тензора на напрежението на Коши (в следващия).

6.1. Тензор на инерцията. Разглеждаме движение на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка O . Нека

$$\mathbf{G}_O = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm, \quad (6.1)$$

е кинетичният момент (моментът на количеството движение) спрямо точката O ; тук $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ е радиус-векторът на точката M от тялото спрямо фиксиран полюс O , $dm = \rho dV$ е масата на елементарния обем dV , а ρ е плътността му.

Съгласно теоремата на Ойлер-Даламбер (§ 4.12) всяко движение на разглежданото тяло може да се представи като ротация около ос, минаваща естествено през O (това е т. нар. ос на крайното въртене). Представяме движението като безкрайна редица (суперпозиция) от безкрайно малки движения. Всяко такова движение на свой ред е безкрайно малка ротация около т. нар. *моментна ос на въртене*⁵, също минаваща през O (още един път използваме теоремата на Ойлер-Даламбер). Векторът на моментната ъглова скорост на безкрайно малките ротации означаваме с $\boldsymbol{\omega}$, а кинетичният момент — с \mathbf{G}_O^ω . Тъй като по време на движението посоката и големината на $\boldsymbol{\omega}$ се *менят*, нас ни интересува зависимостта на \mathbf{G}_O^ω от $\boldsymbol{\omega}$, т. е. векторната функция

$$\boldsymbol{\omega} \longrightarrow \mathbf{G}_O^\omega. \quad (6.2)$$

За пресмятане на \mathbf{G}_O^ω припомняме формулата на Ойлер

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.3)$$

която ни дава скоростта \mathbf{v} на произволна точка M от тялото при ротацията с вектор на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$.

Внасяме (6.3) в (6.1) и разкриваме двойното векторно произведение, използвайки добре познатата формула

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \omega r^2 - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}), \end{aligned}$$

вж. (9.36). Тогава

$$\mathbf{G}_O^\omega = \int_V (r^2 \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})) \, dm. \quad (6.4)$$

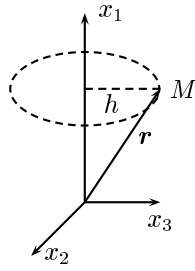
⁵ Да припомним, че геометричното място на тези оси образува конус с връх в точката O , наречен *аксоид на движението*.

Въвеждаме двувалентният тензор

$$\mathbf{J} = \int_V (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, dm, \quad (6.5)$$

наречен *тензор на инерцията*. Дефиницията (3.3) на диадата като линейно преобразование позволява тогава да препишем (6.4) във вида

$$\mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{J} \cdot \omega. \quad (6.6)$$



Фиг. 6.1

Следователно векторната функция (6.2) е *линейна*, а тензорът на инерцията на тяло е линейното преобразование, което преобразува даденият вектор на моментната ъглова скорост ω в кинетичния момент \mathbf{G}_O^ω на тялото, съответстващ на движението му с тази ъглова скорост.

Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ е ортонормиран базис в \mathcal{E}_3 , определящ декартовата система $Ox_1x_2x_3$. Компонентите на тензора \mathbf{J} в този базис, съгласно (6.5), са

$$\begin{aligned} J_{11} &= \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_1 = \int_V (r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1)^2) \, dm \\ &= \int_V (r^2 - x_1^2) \, dm = \int_V (x_2^2 + x_3^2) \, dm = \int_V h^2 \, dm, \\ J_{22} &= \int_V (x_3^2 + x_1^2) \, dm, \quad J_{33} = \int_V (x_1^2 + x_2^2) \, dm, \\ J_{ij} &= - \int_V x_i x_j \, dm, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Припомняме, че диагоналните елементи J_{11}, J_{22}, J_{33} на тензора \mathbf{J} са т. нар. *екваториални моменти на инерцията* (това са моментите на инерцията спрямо трите координатни оси $Ox_i, i = 1, 2, 3$). Интерпретацията им е проста: за да намерим J_{11} , например, трябва да „сумираме“ (т. е. да интегрираме) $h^2 \, dm$ по всички точки (елементарни обеми) на тялото, където $h = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ е разстоянието на точката M до оста Ox_1 , вж. фиг. 6.1.

Да отбележим за пълнота, че не само кинетичния момент, но и кинетичната енергия

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 \, dm \quad (6.8)$$

се изразява просто и удобно чрез тензора на инерцията. За да се убедим в това, да забележим първо, че⁶

$$v^2 = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 = r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2, \quad (6.9)$$

вж. (6.3). От друга страна квадратичната форма на тензора \mathbf{J} се записва като

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_V \left(r^2 \omega^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 \right) dm, \quad (6.10)$$

както се вижда от дефиницията (6.5) на \mathbf{J} . Използването на (6.9) в (6.10) и сравняването на резултата с (6.8) дава

$$T = \frac{1}{2} \int_V v^2 dm = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (6.11)$$

— кинетичната енергия на разглежданото тяло е половината от квадратичната форма на тензора на инерция. Оттук следва, че тензорът на инерция \mathbf{J} е не само симетричен, но и (строго) положително дефинитен, т. е. $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0$, тъй като кинетичната енергия е винаги положителна за движещо се тяло.

6.2. Главни инерчни моменти на тяло. Тензорът на инерцията, дефиниран в (6.5), е очевидно симетричен. Да означим следвайки историческа традиция още от времето на Ойлер собствените му стойности с A , B и C , и нека \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' е съответният им ортонормиран базис от собствени вектори. Тогава

$$\mathbf{J} = A \mathbf{i}' \mathbf{i}' + B \mathbf{j}' \mathbf{j}' + C \mathbf{k}' \mathbf{k}'. \quad (6.12)$$

В диадния базис, породен от собствените си вектори тензора \mathbf{J} , матрицата му е диагонална:

$$\|J_{ij}\| = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Собствените стойности A , B и C на тензора \mathbf{J} се наричат *главни инерчни моменти* на тялото. Традиционно те се избират така, че $A \geq$

⁶Използваната тук формула

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

е известна като *формула на Лагранж*. Тя следва по очевиден начин от дефинициите на скаларното и векторното произведение в тримерното пространство.

$B \geq C$. Освен това, главните моменти на инерция на тялото са винаги положителни $A \geq B \geq C > 0$, щом тензорът \mathbf{J} е положително дефинитен (вж. § 6.1). Осите Ox_1' , Ox_2' , Ox_3' определени, съответно, от собствените вектори \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' на \mathbf{J} се наричат *главни оси на инерция*.

6.3. Динамични уравнения на Ойлер. Въвеждането на тензора на инерцията и на главните му оси са първият и централен момент в извода на знаменитите Ойлерови уравнения на движение на абсолютно твърдо тяло с една неподвижна точка. За пълнота ще припомним основните идеи на този извод.

Нека p , q и r са компонентите на $\boldsymbol{\omega}$ в системата от главни оси на инерция, т. е.

$$\boldsymbol{\omega} = p\mathbf{i}' + q\mathbf{j}' + r\mathbf{k}'. \quad (6.14)$$

От (6.12) следва, че

$$\mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = Ap\mathbf{i}' + Bq\mathbf{j}' + Cr\mathbf{k}'. \quad (6.15)$$

Прилагаме „теоремата“ за кинетичния момент

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (6.16)$$

вж. § 20.2, където $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ е главният момент на външните сили спрямо точката O . Разглеждаме подвижната координатна система $Ox_1'x_2'x_3'$ на главни оси на инерция, която се движи „залепена“ за тялото. Внасяме (6.15) в (6.16):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega &= A \frac{dp}{dt} \mathbf{i}' + B \frac{dq}{dt} \mathbf{j}' + C \frac{dr}{dt} \mathbf{k}' \\ &+ \underbrace{Ap \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + Bq \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + Cr \frac{d\mathbf{k}'}{dt}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Но

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$$

— използваме формулата на Ойлер (6.3), като забелязваме, че ортите \mathbf{i}' , \mathbf{j}' и \mathbf{k}' са неподвижно свързани с тялото и поради това си движат със същата (като тази на тялото) ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$ във всеки момент от време. Следователно, подчертаните членове в (6.17) се преобразуват като

$$\boldsymbol{\omega} \times (Ap\mathbf{i}' + Bq\mathbf{j}' + Cr\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_O^\omega,$$

вж. (6.15). Заедно с (6.14) и (6.15), последното съотношение позволява да опростим (6.17):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}_O^\omega = A \frac{dp}{dt} \mathbf{i}' + B \frac{dq}{dt} \mathbf{j}' + C \frac{dr}{dt} \mathbf{k}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G}_O^\omega = \mathbf{M}_O^{\text{ext}},$$

или

$$A \frac{dp}{dt} \mathbf{i}' + B \frac{dq}{dt} \mathbf{j}' + C \frac{dr}{dt} \mathbf{k}' + \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}.$$

Проектираме двете части на това равенство върху осите на подвижната система, т. е. по ортите \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' на главните оси на инерция:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr &= M_{1'}^{\text{ext}}, \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= M_{2'}^{\text{ext}}, \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)pq &= M_{3'}^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

където $M_{i'}^{\text{ext}}$ са проекциите на главния момент на външните сили върху съответните главни оси на инерция на тялото. Съотношенията (6.18) представляват класическите динамични уравнения на Ойлер.

6.4. Елипсоид на инерцията. За простота да разгледаме първо вектор \mathbf{a} . Нека отново O е фиксиран полюс в пространството и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ е радиус-векторът на точка M спрямо с O .

Векторното уравнение

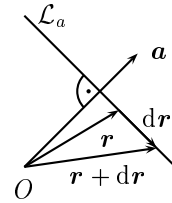
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (6.19)$$

определя, очевидно, равнина \mathcal{L}_a . Тя е перпендикулярна на вектора \mathbf{a} и е на разстояние $1/a$ от началото, $a = |\mathbf{a}|$. Проверката на тези факти е елементарна, като основната идея е илюстрирана геометрично на фиг. 6.2. (Как?)

В декартова координатна система уравнението (6.19) на равнината \mathcal{L}_a има вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1.$$

Следователно, дължината на отсечката, „отрязана“ от \mathcal{L}_a върху координатната ос Ox_i е $1/a_i$. Това означава, че равнината \mathcal{L}_a определя еднозначно вектора \mathbf{a} : за всяка декартова система реципрочните отрязъци по



Фиг. 6.2

координатните оси, „отсечени“ от \mathcal{L}_a , задават съответните координати на \mathbf{a} в тази система.

В случая на симетричен двувалентен тензор \mathbf{J} е естествено да се разгледа квадратичната му форма $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}$ вместо линейната форма $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$. Тогава аналогът на равнината \mathcal{L}_a , породена от вектора \mathbf{a} , е повърхнината \mathcal{L}_J , зададена с уравнението

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (6.20)$$

Разсъжденията тук и по-нататък ще проведем за нагледност върху примера на тензора на инерцията \mathbf{J} , макар че на негово място може да стои всеки симетричен и положително дефинитен тензор \mathbf{T} .

В произволна декартова система $Ox_1x_2x_3$ уравнението (6.20) има вида

$$\sum_{i,j=1}^3 J_{ij} x_i x_j = 1,$$

или

$$\begin{aligned} J_{11}x_1^2 + J_{22}x_2^2 + J_{33}x_3^2 \\ + 2J_{12}x_1x_2 + 2J_{23}x_2x_3 + 2J_{31}x_3x_1 = 1, \end{aligned} \quad (6.21)$$

което определя повърхнина от втори ред в тримерното пространство. Спрямо главните оси на инерция уравнението (6.21) се „канонизира“

$$Ax_1'^2 + Bx_2'^2 + Cx_3'^2 = 1. \quad (6.22)$$

Това очевидно е уравнението на елипсоид с полуоси

$$a = 1/\sqrt{A}, \quad b = 1/\sqrt{B}, \quad c = 1/\sqrt{C}, \quad (6.23)$$

наречен *елипсоид на инерцията*. (За произволен положително дефинитен и симетричен тензор \mathbf{T} повърхнината $\mathbf{r} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} = 1$ е т. нар. *тензорен елипсоид*.)

Задаването на елипсоида на инерция \mathcal{L}_J *еднозначно* определя тензора \mathbf{J} . Именно чрез посоките на осите си \mathcal{L}_J задава собствените вектори, а чрез големините на полуосите си определя собствените стойности, вж. (6.23). По такъв начин множеството от симетрични и положително дефинитни тензори над \mathcal{E}_3 се отъждествява с множеството от всевъзможни елипсоиди с център O , като на всеки такъв тензор се съпостави тензорният му елипсоид:

$$\mathbf{J} \Leftrightarrow \mathcal{L}_J. \quad (6.24)$$

Съответствието (6.24) е взаимно-еднозначно.

Ако $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I}$, $\lambda > 0$, то елипсоидът \mathcal{L}_J на инерция се превръща в сферата $r^2 = 1/\lambda$. Това обяснява терминът сферичен тензор, въведен в § 4.1 за тензорите, пропорционални на единичния.

От уравнението (6.21) се вижда, че отсечката $|OX_1|$, „отрязана“ от елипсоида \mathcal{L}_J върху координатната ос Ox_1 е

$$|OX_1| = 1/\sqrt{J_{11}}. \quad (6.25)$$

Това ни позволява да онагледим графично елипсоида на инерция за дадено тяло по следния начин. Нека Ox_1 е произволна ос с начало в неподвижната точка O . Пресмятаме (екваториалния) момент на инерция J_{11} спрямо оста Ox_1 , съгласно (6.7). По посока на Ox_1 построяваме отсечката $|OX_1|$ с дължина $|OX_1| = 1/\sqrt{J_{11}}$. Тогава геометричното място на краищата на тези отсечки е елипсоидът на инерция, вж. (6.25).

Упражнение 6.1. Точката P лежи върху елипсоида на инерция \mathcal{L}_J , $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP}$. Нека $\mathbf{r}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1$, вж. фиг. 6.3. Покажете:

а) \mathbf{r}_2 е перпендикулярно на допирателната равнина \mathcal{T}_P към \mathcal{L}_J , прекарана в точката P ;

б) ако $|ON|$ е разстоянието O до допирателната равнина \mathcal{T}_P , то

$$|\mathbf{r}_2| = |\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1| = 1/|ON|. \quad (6.26)$$

Упътване. Разглеждаме, освен точката \mathbf{r}_P , безкрайно-близките ѝ точки $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1$, също принадлежащи на елипсоида \mathcal{L}_J :

$$(\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{J} \cdot (\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1) = 1.$$

Разкриваме скобите в лявата страна, пренебрегвайки безкрайно малките от по-висок ред спрямо $|d\mathbf{r}_1|$

$$d\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1) = d\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1, \quad (6.27)$$

тъй като $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$ и тензорът \mathbf{J} е симетричен. Но векторите $d\mathbf{r}_1$ лежат върху допирателната равнина \mathcal{T}_P към \mathcal{L}_J , минаваща през точката P . Поради това $\mathbf{r}_2 \perp \mathcal{T}_P$, вж. (6.27).

За доказателството на б) преписваме равенството $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$ във вида $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 1$ или

$$|\mathbf{r}_2| |\mathbf{r}_1| \cos \alpha = |\mathbf{r}_2| |ON| = 1,$$

тъй като $|\mathbf{r}_1| \cos \alpha = |ON|$ (α е ъгълът между \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , вж. фиг. 6.3).

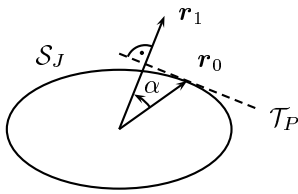
Упражнение 6.2. В какво се преобразува сферата $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$ под действието на (обратимия) тензор \mathbf{T} ?

Упътване. Нека $\mathbf{r}_1 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}$. Тогава $\mathbf{r} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1$ и

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{T}^{*-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{r}_1 = 1.$$

Но това е тензорният елипсоид за тензора $\mathbf{T}^{*-1} \cdot \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^*)^{-1}$. (Този тензор, очевидно, е симетричен и положително дефинитен, вж. § 5.3).

В заключение на този параграф ще отбележим, че с помощта на елипсоида на инерция може, следвайки Поансо, да се онагледят и интерпретира по изящен геометричен начин движението на тяло с една неподвижна точка. Подробности могат да се намерят в курсовете по класическа механика.



Фиг. 6.3

Упражнение 6.3. Нека векторът $\boldsymbol{\omega}$ на моментната ъглова скорост „пробожда“ елипсоида на инерция в точката Ω . Покажете, че кинетичната енергия на тялото е

$$T = \frac{\omega^2}{2|\Omega|^2}. \quad (6.28)$$

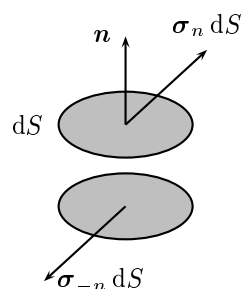
Упътване. Припомняме формулата $T = \frac{1}{2} J_{11} \omega^2$ за кинетичната енергия на тяло, въртящо се с ъглова скорост ω около оста Ox_1 , J_{11} е моментът на инерция на тялото спрямо същата ос. Но в случая $J_{11} = 1/|\Omega|^2$, вж. (6.25).

§ 7. Пример — тензор на напрежението на Коши

7.1. Тензор на напрежението. Под действието на външните сили телата се деформират — променя се формата им и взаимното разположение на частиците. Това е свързано с появата на вътрешни напрежения в тялото, за изследването на които прилагаме метода на мислените сечения. Този метод се появява в решението (1691 г.) на Йоан Бернули на класическата задача, поставена от Галилей: да се определи равновесната форма на тежка (неразтеглива) верига, закачена неподвижно в двата си края. Именно, Бернули разрязва мислено веригата в дадена точка;

за да останат двете парчета в равновесие след разрязването, към двата края на разреза следва да се приложат равни и срещуположно насочени сили. Това са именно *вътрешните напрежения*, които се появяват като резултат на външните сили, действащи върху веригата. Тази идея, комбинирана с добре познатите уравнения на статиката позволява лесно да се намери уравнението на „верижката“.

В случая на деформируемо тяло в тримерното пространство обаче сеченията в дадена точка могат да се извършват по площадки с различна ориентация. Всяка площадка с център в дадена точка M характеризираме с единичния вектор на нормалата \mathbf{n} , вж. фиг. 7.1; предполагаме, че тя е безкрайно малка с лице dS и нормала \mathbf{n} . Ако разрежем тялото по тази площадка и отделим двете части, то вътрешното усилие, което трябва да се приложи към нея за да остане тялото в равновесие и след разрязването е $\boldsymbol{\sigma}_n dS$. На другия бряг на разреза трябва очевидно да се приложи силата $-\boldsymbol{\sigma}_n dS$, фиг. 7.1.



Фиг. 7.1. Двата „бряга“ на разреза

Следователно за да характеризираме напрегнатото състояние в точка на деформируемо тяло следва да знаем векторната функция

$$\mathbf{n} \longrightarrow \boldsymbol{\sigma}_n, \quad \forall \mathbf{n} \in \mathcal{E}_3, \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (7.1)$$

Очевидно е впрочем, че функцията (7.1) притежава свойството

$$\boldsymbol{\sigma}_{-\mathbf{n}} = -\boldsymbol{\sigma}_n. \quad (7.2)$$

Оказва се, че функцията (7.1) е линейна и поради това се задава с помощта на един двувалентен тензор. Този важен факт е установен от Коши, който използва за доказателството си следното класическо разсъждение.

Нека $Mx_1x_2x_3$ е декартова система с център в точката M , с единични вектори на осите \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Изрязваме тетраедъра, показан на фиг. 7.2, и го свиваме мислено в точката M , без да променяме формата му. Така полученият безкрайно малък тетраедър се нарича *тетраедър на Коши*.

Записваме вторият закон на Нютон за този тетраедър:

$$\mathbf{a} \, dm = \mathbf{S} + \mathbf{F}. \quad (7.3)$$

(Предвид това, че той е безкрайно малък, може да го третираме като материална точка.) В (7.3), $dm = \rho \, dV$, ρ е плътността на средата в точката M , dV е обемът на тетраедъра, \mathbf{a} както обикновено е ускорението, а \mathbf{F} е векторът на масовите сили

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \, dm = \rho \mathbf{f} \, dV, \quad (7.4)$$

където \mathbf{f} е плътността им. На свой ред \mathbf{S} е главният вектор на вътрешните напрежения, които се появяват върху четирите стени на тетраедъра като следствие от изрязването му от тялото:

$$\mathbf{S} = \sigma_{-e_1} \, dS_1 + \sigma_{-e_2} \, dS_2 + \sigma_{-e_3} \, dS_3 + \sigma_n \, dS. \quad (7.5)$$

Тук dS_k е лицето на стената с нормала \mathbf{e}_k , а \mathbf{n} нормалата към наклонената стена.

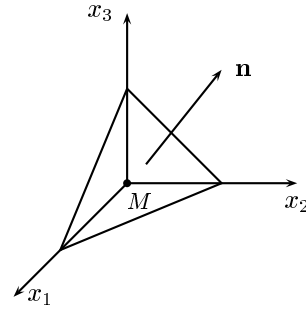
Забелязваме преди всичко, че \mathbf{S} е безкрайно малка от ред a^2 , където a е характерният линейен размер на тетраедъра, докато dm и \mathbf{F} са безкрайно малки от ред a^3 (\mathbf{S} е пропорционално на повърхнината, а dm и \mathbf{F} — на обема на тетраедъра). Следователно dm и \mathbf{F} могат да се пренебрегнат при свиването на тетраедъра в точка по сравнение с \mathbf{S} . Уравнението на Нютон (7.3) тогава се свежда просто до анулирането на главния вектор на вътрешните напрежения \mathbf{S} , записан в (7.5), т. е. $\mathbf{S} = 0$.

С използването на (7.2), преписваме последното уравнение във вида

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{dS_k}{dS}, \quad \sigma_{-e_k} = -\sigma_k, \quad \sigma_k = \sigma_{e_k}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.6)$$

Но лицето dS_k е проекция на лицето dS на наклонената стена върху координатната равнина с нормала \mathbf{e}_k . Поради това

$$\frac{dS_k}{dS} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_k, \mathbf{n}}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k$$



Фиг. 7.2. Тетраедър на Коши

и (7.6) може да се напише като

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \boldsymbol{\sigma}_k \right). \quad (7.7)$$

Въвеждаме двувалентният тензор

$$\mathbf{T}_\sigma = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \boldsymbol{\sigma}_k. \quad (7.8)$$

Дефиницията на диадата (3.3) тогава ни позволява да запишем (7.7) във вида

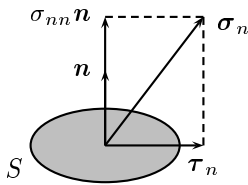
$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\sigma. \quad (7.9)$$

Формулата (7.9) се нарича *формула на Коши*, а тензорът \mathbf{T}_σ , дефиниран в (7.8) — *тензор на напрежението на Коши*. От (7.9) се вижда, че векторната функция (7.1) наистина е линейна и поради това се характеризира с двувалентния тензор на Коши \mathbf{T}_σ .

7.2. Локални и нелокални среди. Обърнете внимание, че в § 7.1, при въвеждането на тензора на напрежението, е направено едно много силно и неочевидно предположение. Именно, прието е неявно, че взаимодействието между двата бряга на разреза S има *локален* характер в смисъл, че то може да се представи само с помощта на повърхнинни сили, разпределени по самия разрез. По принцип обаче взаимодействието на двете разрязани части може да породи и обемни сили, когато материалните точки от вътрешността на едната част взаимодействат с точки от вътрешността на другата. Това са т. нар. *нелокални взаимодействия*. В класическата механика на непрекъснатите среди те се пренебрегват изцяло като се предполага, че взаимодействието се осъществява от сили с „нулев радиус“ на действие, действащи само по повърхнината на разреза S .

В редица случаи на реални среди с по-сложна вътрешна структура се оказва разумно да се предположи, че силите на взаимодействие, макар и локални, не са достатъчни за пълното описание на вътрешните усилия. Налага се въвеждането и на вътрешни моменти, също съсредоточени по повърхнината S . Това води до появата, освен на тензора \mathbf{T}_σ , и на т. нар. *тензор на моментните напрежения* \mathbf{T}_μ . Неговото въвеждане е отпразната точка при построяването на *моментните теории* на деформирането и течението на непрекъснати среди. (Най-известната от тях е теорията на Косера, наречена още моментна теория на еластичността.)

Подобни теории тук няма да се разглеждат. Ще споменем само, че те представляват примамлив избор при моделирането на механичното поведение на тела с по-сложен строеж, например, гранулирани материали (по-конкретно пясъка) или течни суспензии, в които множество твърди частици се движат във флуид. Елементарният обем в такива случаи съдържа гранули (песъчинки) или твърди частици от суспензията, които по време на деформирането и течението на средата не само се преместват, но и се завъртат (*независимо* от преместването си). Това именно завъртане може да породи вътрешните моменти.



Фиг. 7.3

7.3. Нормални и тангенциални напрежения. Да разложим вектора на напрежението σ_n във вида

$$\sigma_n = \sigma_{nn}\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n \perp \mathbf{n}, \quad (7.10)$$

т.е. на компоненти по нормалата \mathbf{n} и перпендикулярно на нея, вж. фиг. 7.3. Компонентата $\boldsymbol{\tau}_n$ в равнината на сечението S се нарича *тангенциално* (или *срязващо*), а $\sigma_{nn}\mathbf{n}$

— *нормално* напрежение. Нормалното напрежение на свой ред е *опън* или *натиск*, в зависимост от това дали σ_{nn} е, съответно, положително или отрицателно.

Ако $\boldsymbol{\tau}_n = 0$, то площадката S се нарича *главна* — върху нея действат само нормални напрежения. Ако $\sigma_{nn} = 0$, то напрегнатото състояние е т. нар. *чисто срязване* — действат единствено тангенциални напрежения, които се стремят да „приплъзнат“ единия бряг на разреза спрямо другия.

Да припомним, че всеки тензор в \mathcal{E}_3 има поне един собствен вектор \mathbf{n} , за който $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ е колинеарно с \mathbf{n} , вж. § 4.9. Приложен към тензора на напрежението \mathbf{T}_σ , този факт означава, че каквото и да е напрегнатото състояние в точка на тялото, винаги съществува поне една главна площадка с нормала \mathbf{n} , за която $\mathbf{n} \parallel \sigma_n$, $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_\sigma$. Върху тази площадка, очевидно, не действат срязващи напрежения, а само нормални (опънни или натискови, в зависимост от знака на σ_{nn}).

7.4. Симетричност на тензора на напрежението — елементарен извод. Симетричността на тензора е сред централните факти в класическата механика на непрекъснатите среди.⁷ Тя е следствие на ед-

⁷Класическа, доколкото навсякъде в този курс постулираме локалния характер на вътрешните напрежения и отсъствие на вътрешни (концентрирани) моменти вж.

на от основните аксиоми на Ойлер за движението на материален обем, която ще обсъдим по-подробно в § 20.4.

Симетричността на \mathbf{T}_σ може да се демонстрира и с помощта на прости и нагледни механични съображения, които сега ще изложим. Това ще ни даде и кратък „отдых“ от диадите преди да преминем към полиадния формализъм, свързан с тензорите от произволна вече валентност.

За простота и по-голяма нагледност да разгледаме равнинния случай, като си представим тънка пластина, която се деформира от сили, лежащи в нейната равнина. Да отрежем от пластината елементарно правоъгълно парче с център в точката M , с размери dx_1 и dx_2 по декартовите оси Mx_1 и Mx_2 , съответно, вж. фиг. 7.4.

Върху разглеждания елемент действат следните сили:

- 1) силата на инерцията на Даламбер

$$\mathbf{J} = -\mathbf{a} dm = -\mathbf{a} \rho dS, \quad (7.11)$$

където \mathbf{a} е ускорението на центъра M , $dm = \rho dS$ е масата на елемента, ρ е плътността му, а $dS = dx_1 dx_2$ е лицето;

- 2) Масовите (обемни) сили,

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{f} dS, \quad (7.12)$$

където \mathbf{f} е плътността им (в случая силата, действаща върху елемента от пластината с лице dS ;

- 3) Силите на вътрешните напрежения $\sigma_1 dx_2$ и $\sigma_2 dx_1$ върху страните на правоъгълника. Разлагаме тези напрежения на техните нормални и тангенциални компоненти

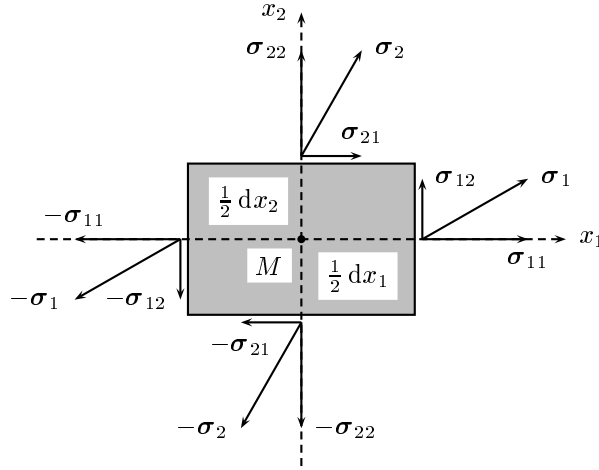
$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22} + \sigma_{21}, \quad (7.13)$$

както е показано на фиг. 7.4.

Съгласно принципа на Даламбер разглежданият елемент на средата е в равновесие под действието на силата на инерция и на приложените към него сили, вж. (7.12) и (7.13). Това означава, че главният вектор и главният момент на системата се анулират спрямо произволен полюс. (Анулирането на главния вектор на подобна система беше използвано по-горе при разглеждането на тетраедъра на Коши, вж. § 7.1 и (7.3).)

За да покажем симетричността на тензора \mathbf{T}_σ е достатъчно да използваме анулирането само на главния момент. За полюс е естествено да

§ 7.2. Вътрешните моменти водят, в частност, до несиметричност на тензора на напрежение, както ще стане ясно от разсъжденията по-долу.



Фиг. 7.4. Равновесие на елементарен правоъгълник от пластината

изберем центъра на елемента M . Спрямо M моментите и на силата на инерция, и на масовите сили очевидно се анулират. Анулират се и моментите на нормалните напрежения σ_1 и σ_2 (директрисите им минават през M). Остават само моментите на тангенциалните напрежения:

$$+\sigma_{12}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \cdot \frac{1}{2}dx_1 + \sigma_{12}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \cdot \frac{1}{2}dx_1 \quad (7.14)$$

$$-\sigma_{21}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \cdot \frac{1}{2}dx_2 - \sigma_{21}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \cdot \frac{1}{2}dx_2 = 0;$$

тук отчитаме, че напреженията σ_{12} и σ_{21} се пресмятат върху различните страни на елемента, върху които съответните координати се различават с dx_1 или dx_2 . Разлагаме в (7.14) функциите σ_{12} и σ_{21} в ред на Тейлър в околността на точката $M(x_1, x_2)$. С точност до безкрайно малки от ред $\mathcal{O}(dx_1 dx_2)$ тогава намираме $-2\sigma_{12} + 2\sigma_{21} = 0$ или

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad (7.15)$$

което именно и означава, че тензорът на напрежението в разглеждания случай е симетричен.

Аналогично е разсъждението в тримерния случай — там следва да се разгледа елементарен паралелепипед с център в дадената точка и със страни dx_1 , dx_2 и dx_3 . Горните разсъждения се повтарят тогава практически дословно. (Как?)

Обърнете внимание, че тангенциалните напрежения върху две съседни страни с общ връх не само са равни по големина, вж. (7.15), но и винаги са насочени или „едно към друго“ или „едно от друго“ (по-точно, или и двете към общия връх или и двете в посоки обратни на тези към общия връх). Това е т. нар. *правило* (или *закон*) за *взаимността* на тангенциалните напрежения.

Щом тензорът \mathbf{T}_σ е симетричен той притежава три взаимно перпендикулярни (единични) собствени вектора \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 , съответстващи на собствените стойности σ_1 , σ_2 и σ_3 . В диадния базис от собствени вектори

$$\mathbf{T}_\sigma = \sigma_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad (7.16)$$

а матрицата му е диагонална. Собствените стойности σ_1 , σ_2 и σ_3 се наричат *главни напрежения*. Прието е те да се номерират така, че $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Площадките, перпендикулярни на собствените вектори, се наричат *площадки на главните напрежения* или *главни площадки*. Следователно произволно напрегнато състояние в точка но деформируема среда може да се реализира като суперпозиция на три чисто опънни (или натискови) напрежения в три взаимно перпендикулярни направления.

7.5. Уравнение на движението на непрекъснатата среда — елементарен извод. Разглеждането на елементарния правоъгълник в § 7.4 позволява да изведем, в частния случай на декартова система, още едно от основните уравнения на механиката на непрекъснатите среди — именно уравнението на движението. Това ще послужи като илюстрация и подготовка за извода в общия случай на това основно уравнение, който ще отложим за § 19.4.

В § 7.4 анулирането на главния момент на системата от сили (7.11) — (7.13), действащи върху елементарния правоъгълник, вж. фиг. 7.4, ни позволи да се убедим в симетричността на тензора на напрежението. Но тази система е в равновесие и затова главният ѝ вектор също трябва да се анулира. Оттук именно и следва споменатото уравнение на движение на средата.

Проектираме главният вектор на системата (7.11) – (7.13) върху осите Mx_1 и Mx_2 :

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 - \sigma_{11}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \\ & + \sigma_{12}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 - \sigma_{12}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \\ & + \rho f_1 dx_1 dx_2 - \rho a_1 dx_1 dx_2 = 0, \\ & \sigma_{12}(x_1 + \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 - \sigma_{12}(x_1 - \frac{1}{2}dx_1, x_2) dx_2 \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{22}(x_1, x_2 + \frac{1}{2}dx_2) dx_1 - \sigma_{22}(x_1, x_2 - \frac{1}{2}dx_2) dx_1 \\
& + \rho F_2 dx_1 dx_2 - \rho a_2 dx_1 dx_2 = 0,
\end{aligned}$$

като използваме симетричността на тензора на напрежението, вж. (7.15). Отново е взето предвид, че напреженията σ_{12} и σ_{21} се пресмятат върху различните страни на елемента, върху които съответните координати се различават с dx_1 или dx_2 . Разлагаме в (7.17) функциите σ_{12} и σ_{21} в ред на Тейлър в околността на точката $M(x_1, x_2)$. С точност до безкрайно малки от ред $o(dx_1 dx_2)$ тогава намираме

$$\begin{aligned}
\rho a_1 &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho f_1, \\
\rho a_2 &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Това са уравненията на движението на непрекъснатата среда (в равнинния случай). Видът им в тримерния случай е аналогичен:

$$\rho a_k = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3} + \rho f_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{7.19}$$

Да въведем вектора Φ , чийто компоненти в дадената декартова система са

$$\Phi_k = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{7.20}$$

Както ще видим по-нататък (§.), векторът Φ е т. нар. *дивергенция* на полето на тензора на напрежението. С помощта на Φ уравнението (7.19) се записва безкоординатно като

$$\rho \mathbf{a} = \Phi + \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{f}. \tag{7.21}$$

Съгласно втория закон на Нютон произведението на масата и ускорението на материална частица от средата е равно на действащата върху нея сила. Ако частицата е абсолютно твърда, то единствената сила е масовата, т. е. \mathbf{F} , и законът на Нютон ще се запише като

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{7.22}$$

Сравнението между (7.21) и (7.22) показва, че деформируемостта на частицата, пораждаща вътрешните напрежения, се проявява като една допълнителна сила Φ — дивергенцията на тензора на напрежението. В по-общ вид уравнението на движението (7.21) ще бъде изведено в § 19.4.

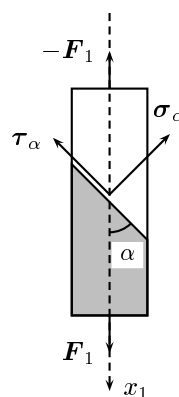
7.6. Напрежения на наклонените площадки при едноосен и двуосен опън. В заключение на този параграф нека разгледаме някои най-прости примери, свързани с напрегнатото състояние на телата. Това са по-същество упражнения, чиято цел от една страна е да илюстрираме някои от тензорните разглеждания на § 3 и § 4, а от друга да дадем по-ясна и пълна представа за тензора на напрежението — едно от основните понятия на механиката на непрекъснатите среди.

Ще започнем с разглеждането на най-простото напрегнато състояние — т. нар. *едноосен опън*. Правоъгълник, изрязан от тънка пластина, се разтяга от силите F_1 и $-F_1$, с директриса оста x_1 , вж. фиг. 7.5. (За определеност предполагаме, че $F_1 > 0$, т.е. F_1 и x_1 имат еднаква посока, и наистина имаме опън. Ако $F_1 < 0$, т.е. F_1 и x_1 са с различни посоки, то ще реализира едноосен натиск.) Търсим големината на нормалното, σ_α , и тангенциалното, τ_α , напрежения, които действат на сеченията наклонени под ъгъл α спрямо x_1 , т.е. спрямо опънната сила. (Говорим за опънна сила само за определеност предполагайки, че $\sigma_1 > 0$. При $\sigma_1 < 0$ силата ще бъде натискова, но това по никакъв начин няма да се отрази на разсъжденията.)

Нека L е ширината на правоъгълника. Опънното напрежение тогава има вида⁸

$$\sigma_1 = F_1/L. \quad (7.23)$$

Разрязваме мислено ивицата под ъгъл α . Върху наклоненото сечение прилагаме търсените нормално, σ_α , и тангенциалното, τ_α , напрежения, вж. фиг. 7.5. Под действието на означените сили трапецът на същата



Фиг. 7.5. Едноосен опън

⁸Ако разглеждаме по-реалистичния пример — цилиндричен прът с напречно сечение S под действието на осовата сила F_1 , то напрежението е $\sigma_1 = F_1/S$. (Припомняме, че напрежението е плътността на повърхнинните сили, т.е. силата действаща на единица лице от повърхнината. В равнинния случай това е силата действаща на единица дължина от пластината.)

фигура е в равновесие. Записваме условието за равновесие

$$L_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\alpha + L_\alpha \boldsymbol{\tau}_\alpha + \mathbf{F}_1 = 0 \quad (7.24)$$

— анулирането на главния вектор; тук $L_\alpha = L / \sin \alpha$ е дължината на наклоненото сечение. (Главният момент се анулира автоматично. Защо?) Проектираме (7.24) върху оста x_1 и перпендикулярно на нея, използвайки (7.23):

$$\begin{aligned} \sigma_1 L - L_\alpha \tau_\alpha \cos \alpha - L_\alpha \sigma_\alpha \sin \alpha &= 0, \\ -L_\alpha \tau_\alpha \sin \alpha + L_\alpha \sigma_\alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

Оттук

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \sin^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Видно е, че при едноосен опън по оста x_1 се появяват и тангенциални напрежения върху наклонените площадки. Максималната им големина е

$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1| \quad (7.26)$$

и тя се достига при $\alpha = \pi/4$.

Да разгледаме двуосен опън: към правоъгълника със страни L_1 и L_2 са приложени съответно опънните сили F_1 и F_2 . Напрегнатото състояние в случая е суперпозиция на два едноосни опъна. Върху сечение наклонено под ъгъл спрямо оста x_1 тогава ще действат напреженията

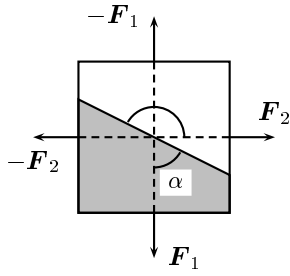
$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \tau_\alpha &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.27)$$

(Щом разглежданото сечение сключва ъгъл α с оста x_1 , то сключва ъгъл $\pi/2 + \alpha$ с оста x_2 , т. е. със силата F_2 .) Максималната големина на тангенциалното напрежение в случая е

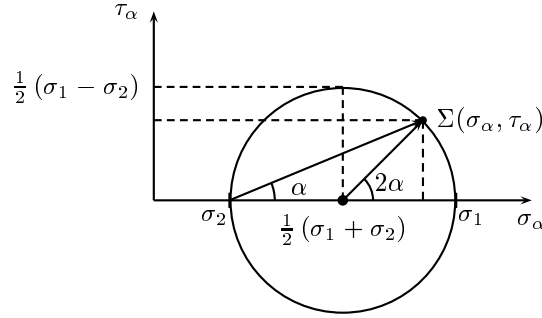
$$\tau_\alpha^{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| \quad (7.28)$$

и тя отново се достига при $\alpha = \pi/4$.

Ако $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, то $\sigma_\alpha \equiv \sigma$, $\tau_\alpha \equiv 0$ за всеки ъгъл α , вж. (7.27). Но това е напълно естествено, защото в случая тензорът на напрежението



Фиг. 7.6. Двуосен опън



Фиг. 7.7. Диаграма на Мор

е сферичен, $\mathbf{T}_\sigma = \sigma \mathbf{I}$, и матрицата му е диагонална във всеки ортонормиран базис. Нормалното напрежение е едно и също върху всички площадки в тялото, а тангенциални напрежения няма.

7.7. Диаграма на Мор. Формулите (7.27) допускат проста и нагледна геометрична интерпретация. Да ги напишем във вида:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha,\end{aligned}\quad (7.29)$$

като предполагаме за определеност, че $\sigma_1 > \sigma_2$. (Използвахме тъждеството $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.) От (7.27) следва

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\right)^2. \quad (7.30)$$

Уравнението (7.30) определя очевидно окръжност в равнината $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, параметрично зададена в (7.29). Тя се нарича *окръжност на Мор (Mohr)*. Тази окръжност е показана на фиг. 7.7 — центърът ѝ е в точката $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ на оста α_α , а радиусът ѝ е $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$.

За да намерим нормалното и тангенциалното напрежения на площадката, наклонена под ъгъл α (спрямо по-голямото от главните направления, съответстващо на σ_1), прекарваме радиус в окръжността на Мор под същия ъгъл α спрямо оста σ , вж. фиг. 7.7. Пресечната му точка Σ с тази окръжност има като координати търсените напрежения σ_α и τ_α .

7.8. Определяне на главните площадки на напрежението.

Нека е зададена, отново в равнинния случай за простота и нагледност, матрицата

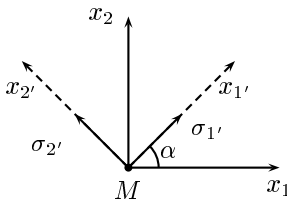
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

на тензора на напрежението в точката M спрямо декартовата система Mx_1x_2 . Главните напрежения, σ_1 и σ_2 , определяме от характеристичното уравнение на матрицата (7.31):

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0,$$

т. е.

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right). \quad (7.32)$$



Фиг. 7.8

Нека главните оси са завъртяни под (неизвестния) ъгъл α спрямо дадената система Mx_1x_2 , вж. фиг. 7.8. Съгласно (7.27)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, \\ \sigma_{22} &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \sigma_{12} &= (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Тук например σ_{11} е нормалното напрежение върху площадката Mx_2 , която е наклонена под ъгъл $\pi/2 - \alpha$ спрямо оста $Mx_{1'}$ на главното напрежение σ_1 , ср. фиг. 7.6 и фиг. 7.8.

Съотношенията (7.33) представляват система от три уравнения спрямо трите неизвестни σ_1 , σ_2 и α (да напомним, че σ_{11} , σ_{12} и σ_{22} са зададени). Но главните напрежения σ_1 и σ_2 вече са известни от решението на характеристичното уравнение, вж. (7.32). От последното уравнение на (7.33) имаме

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2},$$

т. е.

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad (7.34)$$

с което положението на главните оси е определено.

В заключение на този пункт да разгледаме за илюстрация матрицата на напреженията

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

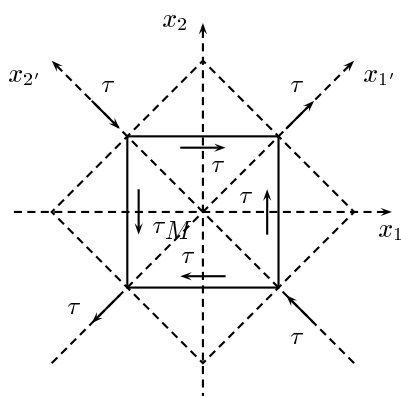
— това е т. нар. *чисто срязване*, когато по две взаимноперпендикулярни оси Mx_1 и Mx_2 действат само срязващи напрежения, вж. фиг. 7.9. Търсят се главните площадки на напрежението.

Характеристичното уравнение в случая е

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \tau \\ \tau & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau^2 = 0,$$

и главните напрежения очевидно са

$$\sigma_{1,2} = \pm\tau. \quad (7.36)$$



Фиг. 7.9. Чисто срязване

Ъгълът α определящ положението на главните оси търсим от (7.34):

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} = \pi/4,$$

вж. (7.36). Следователно, чисто срязване (7.35) е еквивалентно на чист опън и чист натиск по две взаимноперпендикулярни оси $Mx_{1'}$ и $Mx_{2'}$, наклонени под ъгъл $\pi/4$ спрямо изходните оси Mx_1 и Mx_2 на срязването (7.35). При това, големините и на опъна, и на натиска, съвпадат с големината τ на срязващото напрежение, вж. отново фиг. 7.9.

§ 8. Поливалентни тензори

8.1. Безкоординатна дефиниция на поливалентен тензор.

Поливалентните тензори се въвеждат по начин, напълно аналогичен на двувалентните (§ 3): грубо казано, трябва просто да се замени „дву“ с „поли“, „диада“ с „полиада“, „билинейно“ с „полилинейно“ и т. н. Единствената „неприятност“ е усложняването на съответните формули, но смисълът и логиката зад тях остават непроменени.

За да се убедим в това, ще започнем отново с формалната дефиниция, обобщаваща по очевиден начин дефиниция 3.1 на пространството от двувалентни тензори.

Дефиниция 8.1. Нека p е цяло, $p \geq 2$, и \mathcal{E}_n е векторно пространство с размерност n , $\dim \mathcal{E}_n = n$. Пространството от p -валентни тензори

$$\underbrace{\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_n}_p = \otimes_p \mathcal{E}_n$$

е векторно пространство със следните свойства:

- 1) $\dim \otimes_p \mathcal{E}_n = n^p$;
- 2) Съществува изображение

$$\underbrace{\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_p \longrightarrow \otimes_p \mathcal{E}_n,$$

което съпоставя на всеки p вектора $\overset{(1)}{\mathbf{a}}, \overset{(2)}{\mathbf{a}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{a}}$ тяхното полиадно (или тензорно) произведение

$$\overset{(1)}{\mathbf{a}}, \overset{(2)}{\mathbf{a}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{a}} \longrightarrow \overset{(1)}{\mathbf{a}} \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}}.$$

Това изображение е полилинейно, т. е. линейно по всеки от аргументите си например

$$\begin{aligned} (\lambda \overset{(1)}{\mathbf{b}} + \mu \overset{(1)}{\mathbf{c}}) \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}} &= \lambda \overset{(1)}{\mathbf{b}} \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}} \\ &+ \mu \overset{(1)}{\mathbf{c}} \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{K}, \quad \overset{(1)}{\mathbf{b}}, \overset{(1)}{\mathbf{c}} \in \mathcal{E}_n. \end{aligned}$$

Елементите $\overset{(1)}{\mathbf{a}} \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$ се наричат полиади;

3) Пространството $\otimes_p \mathcal{E}_n$ се поражда от полиадите в смисъл, че произволен негов елемент може да се представи като линейна комбинация на полиади.

Както и в случая на двувалентни тензори, дефиниция 8.1 определя пространството $\otimes_p \mathcal{E}_n$ „еднозначно“ — с точност до един естествен изоморфизъм (линейно и взаимно еднозначно съответствие), независещ от избора на базиса в \mathcal{E}_n , а само от конкретната интерпретация на полиадното умножение. Съответното разсъждение повтаря дословно това от § 3.1, където се разглеждаше пространството от двувалентни тензори.

Видно е, че горната дефиниция е наистина аналогична на Дефиниция 3.1, с която се въведе пространството от двувалентни тензори. (Нещо повече, при $p = 2$ тя съвпада с нея.) Дефиницията 8.1 отново

звучи твърде абстрактно на пръв поглед. Зад нея стои обаче нещо просто: именно фактът, че пространството от p -валентни тензори не е нищо друго освен съвкупността от полилинейни (по-точно, p -линейни) форми над \mathcal{E}_n .

Да напомним, че в двувалентния случай тензорите $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ можеха да се интерпретират не само като билинейни форми над \mathcal{E}_n , но и като линейни преобразования на \mathcal{E}_n (§ 3.2). В поливалентния случай подобна интерпретация също е възможна, но тя вече *не е единствена*. Както ще видим по-нататък (§ 8.6), пространството от p -валентни тензори може да се отъждестви с това на линейните преобразования $\otimes_r \mathcal{E}_n \longrightarrow \otimes_s \mathcal{E}_n$ за всички целочислени двойки r, s , $r, s \geq 1$, такива че $r + s = p$. (При $p = 2$ има само една такава двойка $r = s = 1$.) В частния случай на тривалентни тензори тази интерпретация е предмет на обсъждане в упражнения 8.2 и 8.3 (§ 8.3).

8.2. Поливалентните тензори като полилинейни форми над \mathcal{E}_n . Нека \mathbf{T} е *полилинейна* (по-точно, *p -линейна*) форма над \mathcal{E}_n , т. е. изображение

$$\mathbf{T} : \underbrace{\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_p \longrightarrow \mathfrak{K},$$

което на всеки p вектора $\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_n$ съпоставя числото

$$\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right),$$

зависещо линейно от всеки един от аргументите $\overset{(k)}{\mathbf{x}}$, $k = 1, 2, \dots, p$.

В този пункт ще покажем, че съвкупността от p -валентни тензори $\otimes_p \mathcal{E}_n$ може да се интерпретира като пространството от p -линейни форми над \mathcal{E}_n . За тази цел първо дефинираме полиадите като p -линейни форми по следния начин

$$\begin{aligned} & \left(\overset{(1)}{\mathbf{a}} \otimes \overset{(2)}{\mathbf{a}} \otimes \cdots \otimes \overset{(p)}{\mathbf{a}} \right) \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \left(\overset{(1)}{\mathbf{a}} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}} \right) \left(\overset{(2)}{\mathbf{a}} \cdot \overset{(2)}{\mathbf{x}} \right) \cdots \left(\overset{(p)}{\mathbf{a}} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right), \quad \forall \overset{(k)}{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_n, \end{aligned} \quad (8.1)$$

$k = 1, 2, \dots, p$.

Нека $\{\mathbf{a}_i\}$ е базис в \mathcal{E}_n , а \mathbf{T} е произволна p -линейна форма. За всеки p вектора $\overset{(k)}{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}_n$ имаме

$$\overset{(k)}{\mathbf{x}} = x_{i_k} \mathbf{a}^{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

и затова

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) &= \mathbf{T} \left(x_{i_1} \mathbf{a}^{i_1}, x_{i_2} \mathbf{a}^{i_2}, \dots, x_{i_p} \mathbf{a}^{i_p} \right) \\
&= \mathbf{T} \left(\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p} \right) \left(\mathbf{a}_{i_1} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}} \right) \left(\mathbf{a}_{i_2} \cdot \overset{(2)}{\mathbf{x}} \right) \cdots \left(\mathbf{a}_{i_p} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) \\
&= \left(t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_p} \right) \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right),
\end{aligned} \tag{8.2}$$

където

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{T} \left(\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p} \right), \quad i_1, i_2, \dots, i_p = 1, \dots, n. \tag{8.3}$$

В (8.2) използвахме полилинейността на \mathbf{T} , формулата (2.7) и дефиницията (8.1) на полиадата като p -линейна форма. Следователно

$$\mathbf{T} = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_p}. \tag{8.4}$$

Но това означава, че произволна p -линейна форма се представя като линейна комбинация на елементите на полиадния базис

$$\mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_p}.$$

(Линейната независимост на $\mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_p}$ се установява съвсем просто — проверете!) На свой ред полилинейната форма, определяща тензора \mathbf{T} , се записва във вида

$$\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \overset{(2)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) = t^{i_1 i_2 \dots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p}, \tag{8.5}$$

както се вижда от (8.2).

8.3. Координатна дефиниция на p -валентен тензор. Контравариантни и ковариантни компоненти. Както и в при разглеждането на векторите в §§ 2.7 и 2.8, да разгледаме, освен базиса $\{\mathbf{a}_i\}$, и друг („нов“) базис $\{\mathbf{a}_{i'}\}$ в \mathcal{E}_n . Базисите се преобразуват отново по закона (2.15).

Тензорът \mathbf{T} може да разложи и по стария $\mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_p}$, и по новия полиаден базис $\mathbf{a}_{i_{1'}} \otimes \mathbf{a}_{i_{2'}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_{p'}}$

$$\mathbf{T} = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \cdots \mathbf{a}_{i_p} = t^{i_{1'} i_{2'} \dots i_{p'}} \mathbf{a}_{i_{1'}} \mathbf{a}_{i_{2'}} \cdots \mathbf{a}_{i_{p'}}.$$

(Както и при записа на двувалентните тензори, ще изпускаме вече за краткост знака ‘ \otimes ’ за тензорното произведение при записа на полиадите.) Връзката между компонентите $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ и $t^{i_1' i_2' \dots i_p'}$ следва от (3.10) и (8.3):

$$\begin{aligned} t^{i_1' i_2' \dots i_p'} &= \mathbf{T} \left(\mathbf{a}^{i_1'}, \mathbf{a}^{i_2'}, \dots, \mathbf{a}^{i_p'} \right) \\ &= \mathbf{T} \left(A_{i_1}^{i_1'} \mathbf{a}^{i_1}, A_{i_2}^{i_2'} \mathbf{a}^{i_2}, \dots, A_{i_p}^{i_p'} \mathbf{a}^{i_p} \right) \\ &= A_{i_1}^{i_1'} A_{i_2}^{i_2'} \dots A_{i_p}^{i_p'} \mathbf{T} \left(\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p} \right), \end{aligned}$$

т. е.

$$t^{i_1' i_2' \dots i_p'} = A_{i_1}^{i_1'} A_{i_2}^{i_2'} \dots A_{i_p}^{i_p'} t^{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (8.6)$$

Това и тензорният закон за преобразуване на компонентите на p -валентния тензор $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$. Той позволява да дефинираме координатно тензора по следния начин (забележете — напълно аналогичен както на на координатната дефиниция 2.1 на вектора, така и на координатната дефиниция 3.1 на двувалентния тензор!).

Дефиниция 8.2. Тензорът от валентност p е наредена двойка

$$\left\{ \mathbf{a}_i, t^{i_1 i_2 \dots i_p} \right\},$$

състояща се от базис $\{\mathbf{a}_i\}$ и числата $\{t^{i_1 i_2 \dots i_p}\}$, наречени (контравариантни) компоненти на тензора в този базис. При смяна на базиса по закона (2.15), компонентите $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ се сменят по тензорния закон (8.6).

Забелязваме, че компонентите $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ се преобразуват с помощта на матрицата $\|A_i^{i'}\|$, обратна на тази, преобразуваща базиса. Поради това компонентите $t^{i_1 i_2 \dots i_p}$ се наричат *контравариантни*, аналогично на съответните компоненти на вектора (§ 2.8) и на двувалентния тензор (§ 3.5).

Координатната дефиниция на p -валентния тензор може да се онагледява графично по същия начин както и тези за вектор (§ 2.8) и за двувалентен тензор (§ 3.5). Именно

$$\mathbf{T} = t \underset{\circlearrowleft}{i_1} \underset{\circlearrowleft}{i_2} \dots \underset{\circlearrowleft}{i_p} \mathbf{a} \underset{\circlearrowright}{i_1} \mathbf{a} \underset{\circlearrowright}{i_2} \dots \mathbf{a} \underset{\circlearrowright}{i_p}. \quad (8.7)$$

Напомниме (вж. края на § 2.8), че знакът \circlearrowleft говори за „завъртане“ с помощта на матрицата $A = \|A_i^{i'}\|$, а знакът \circlearrowright — за обратното „завъртане“ с помощта на матрицата $A^{-1} = \|A_i^{i'}\|$, вж. (2.15). Интерпретацията на (8.7) повтаря дословно тази на (2.20) и (3.22) и затова тук ще я пропуснем.

Ясно е също, че полиаден базис може да се образува и с привличането на векторите \mathbf{a}^i от дуалния базис. Например, можем да разгледаме, вместо (8.4), представянето на тензора \mathbf{T} във вида

$$\mathbf{T} = t_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}^{i_1} \otimes \mathbf{a}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{i_p},$$

с помощта на чисто ковариантните му компоненти $t_{i_1 i_2 \dots i_p}$. При това

$$t_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{T}(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_p}), \quad i_1, i_2, \dots, i_p = 1, \dots, n,$$

вж. (8.3). При смяна на базиса те се преобразуват по закона

$$t_{i_1' i_2' \dots i_p'} = A_{i_1'}^{i_1} A_{i_2'}^{i_2} \dots A_{i_p'}^{i_p} t_{i_1 i_2 \dots i_p},$$

т. е. „ковариантно“ — с помощта на същата матрица $\|A_{i'}^i\|$, която сменя базиса, вж. (2.15).

Аналогично може да се използват и координатни представяния на \mathbf{T} с помощта на смесените компоненти (r -пъти контравариантни и $(p-r)$ -пъти ковариантни):

$$\mathbf{T} = t_{i_{r+1} \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_r} \mathbf{a}_{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{i_r} \otimes \mathbf{a}^{i_{r+1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{i_p}. \quad (8.8)$$

В случая

$$t_{i_{r+1} \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_r} = \mathbf{T}(\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_r}, \mathbf{a}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_p}). \quad (8.9)$$

Упражнение 8.1. Напишете закона за преобразуването на смесените компоненти $t_{i_{r+1} \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ на p -валентния тензор \mathbf{T} при смяна на базиса.

Пример 8.1. Поучително е да „проиграете“ изложената схема в случая $p = 3$, т. е. да разгледате подробно въвеждането и интерпретацията на тривалентните тензори. Тук полиадите са *триади*, които се интерпретират като *трилинейни форми* над \mathcal{E}_n :

$$(\mathbf{abc})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{z}). \quad (8.10)$$

Координатното представяне (8.4) в случая има вида:

$$\mathbf{T} = t^{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \quad (8.11)$$

— това е разлагане по *триадния базис* $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k$ и т. н.

Упражнение 8.2. Триадата abc може да се интерпретира и като линейно преобразование от $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ в \mathcal{E}_n . За тази цел върху диадите тя се дефинира, например, така

$$abc : xy \longrightarrow a(b \cdot x)(c \cdot y) \in \mathcal{E}_n, \quad \forall x, y \in \mathcal{E}_n, \quad (8.12)$$

а след това се „разпространява“ по естествен начин върху цялото $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ (тъй като произволен тривалентен тензор е линейна комбинация на триади). Покажете, че при тази интерпретация на триадите пространството от тривалентни тензори се отъждествява с пространството от всички линейни преобразования на $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ в \mathcal{E}_n .

Упражнение 8.3. Аналогично на упражнение 8.2 покажете, че пространството от тривалентни тензори може да се отъждестви също и с пространството от всички линейни преобразования на \mathcal{E}_n в $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. (Съобразете първо как следва да се дефинира триадата при тази интерпретация.)

Да споменем в заключение на този пункт, че „жонглирането“ с индекси, обсъдено за вектори в § 2.5 и за двувалентни тензори в § 3.6, се обобщава по очевиден начин и в поливалентния случай.

Например, от (8.3) и (2.11) имаме

$$\begin{aligned} t^{i_1 i_2 \dots i_p} &= \mathbf{T}(\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p}) \\ &= \mathbf{T}(g^{i_1 j_1} \mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p}) = g^{i_1 j_1} \mathbf{T}(\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_p}), \end{aligned}$$

т. е.

$$t^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} t_{j_1}^{i_2 \dots i_p}. \quad (8.13)$$

вж. (8.9). Обобщенията са очевидни. Ясно е, че както и в двувалентния случай (§ 3.6), g^{ij} и g_{ij} позволяват да „подхвърляме“ индексите от „долу“ „горе“ и обратно. Всяко „подхвърляне“ се „заплаща“ с появата на една от матриците на метрическите коефициенти, ср. (8.13) и (3.23).

Упражнение 8.4. Напишете връзката между чисто ковариантните и чисто контравариантните компоненти на p -валентен тензор⁹.

8.4. Тензори над \mathcal{E}_n . Да разгледаме „стълбичката“ от всички тензорни „степенни“ на пространството \mathcal{E}_n :

$$\mathfrak{R}, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \dots, \otimes_p \mathcal{E}_n, \dots \quad (8.14)$$

⁹Целта на това упражнение е да се „насладите“ какви сложни на пръв поглед (макар и с много малко съдържание сами по себе си) многоиндексни формули вече можете да пишете.

Числата (реалната права \mathfrak{R}) тук се интерпретират като тензори от нулева, а векторите естествено като тензори от първа валентност. При тази интерпретация можем да запишем обединението на тензорните „степенни“ (8.14) във вида

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}_n) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \otimes^p \mathcal{E}_n. \quad (8.15)$$

Елементите от $\mathcal{T}(\mathcal{E}_n)$ се наричат (евклидови) тензори.

8.5. „Инвариантни“ тензорни операции. Това са операциите над тензорите, които не зависят от избора на координатната система. Те са четири.

1) *Съставяне на линейни комбинации.* Подчертаваме, че тази операция е смислена, ако в нея участват тензори от една и съща валентност. (Ясно е, че не може да се състави, например, сума от вектор и от двувалентен тензор.)

2) *Съставяне на изомери.* Нека $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$ и (8.4) е полиадното му разлагане. Нека $\sigma \in \mathcal{S}_p$ е елемент на симетричната група \mathcal{S}_p , т. е. пермутация

$$\{1, 2, \dots, p\} \xrightarrow{\sigma} \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)\}.$$

Дефинираме тензора

$$\mathbf{T}^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_{\sigma(1)}} \mathbf{a}_{i_{\sigma(2)}} \cdots \mathbf{a}_{i_{\sigma(p)}}, \quad (8.16)$$

който се нарича σ -изомер (или просто *изомер*) на \mathbf{T} .

Упражнение 8.5. Покажете, че съставянето на изомери, макар и дефинирано в (8.16) координатно (чрез съответното полиадно разлагане на \mathbf{T}), е инвариантна тензорна операция.

Да преименуваме в (8.16) немите индекси $\sigma(k)$ на k , $k = 1, 2, \dots, p$, т. е. да привлечем обратната пермутация $\eta = \sigma^{-1}$:

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p)\} \xrightarrow{\sigma^{-1}} \{1, 2, \dots, p\}.$$

В резултат на това „прекръстване“ изомерът (8.16) се записва във вида

$$\mathbf{T}^\sigma = t^{i_{\eta(1)} i_{\eta(2)} \dots i_{\eta(p)}} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \cdots \mathbf{a}_{i_p}. \quad (8.17)$$

Това означава, че изомерът може да се дефинира и чрез съответната пермутация на индексите на неговите компоненти.

За двувалентен тензор \mathbf{T} единствената нетривиална пермутация е $\sigma : \{1, 2\} \rightarrow \{2, 1\}$. Тя поражда и единствения нетривиален изомер на \mathbf{T} — транспонирания тензор \mathbf{T}^* , вж. § 4.3. (В случая $\sigma = \sigma^{-1}$ и при дефиницията на \mathbf{T}^* е без значение дали пермутираме векторите на диадния базис или индексите на компонентите.)

Аналогът на симетричния двувалентен тензор в p -валентния случай е т. нар. *напълно симетричен тензор*, за който

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_p.$$

На свой ред, аналогът на симетричната част \mathbf{T}^s на двувалентния тензор \mathbf{T} , вж. (4.17), е *симетризираният тензор*

$$\mathbf{T}^{\text{sym}} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \mathbf{T}^\sigma, \quad \mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n.$$

(Напомниме, че броят на всички пермутации на p елемента е $p!$.)

3) *Тензорно произведение на тензори*. Нека $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{S} \in \otimes_q \mathcal{E}_n$ са два тензора над \mathcal{E}_n като

$$\mathbf{T} = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \dots \mathbf{a}_{i_p}, \quad \mathbf{S} = s^{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \dots \mathbf{a}_{j_q},$$

в даден полиаден базис. Въвеждаме *тензорното произведение* на \mathbf{T} и \mathbf{S} с равенството

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes \mathbf{S} &= \left(t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \dots \mathbf{a}_{i_p} \right) \otimes s^{j_1 j_2 \dots j_q} \mathbf{a}_{j_1} \mathbf{a}_{j_2} \dots \mathbf{a}_{j_q} \\ &= \left(t^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \dots \mathbf{a}_{i_p} \right) \otimes \left(s^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+q}} \mathbf{a}_{i_{p+1}} \mathbf{a}_{i_{p+2}} \dots \mathbf{a}_{i_{p+q}} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} t^{i_1 i_2 \dots i_p} s^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+q}} \mathbf{a}_{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \dots \mathbf{a}_{i_p} \mathbf{a}_{i_{p+1}} \mathbf{a}_{i_{p+2}} \dots \mathbf{a}_{i_{p+q}}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

(„Прекръстихме“ попятно немите индекси j_1 до j_q на i_{p+1} до i_{p+q} съответно.)

Очевидно $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S} \in \otimes_{p+q} \mathcal{E}_n$, т. е. при тензорното умножение валентностите на множителите се сумират.

Упражнение 8.6. Покажете, че тензорното произведение, макар и дефинирано в (8.18) координатно (чрез съответните полиадни разлагания на тензорните множители \mathbf{T} и \mathbf{S}), е инвариантна тензорна операция.

В частния случай $p = q = 1$ тензорното произведение на два вектора

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \left(x^i \mathbf{a}_i \right) \otimes \left(y^j \mathbf{a}_j \right) = x^i y^j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$$

е диадното им произведение. Проверката е почти тавтологична:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} &= (x^i y^j \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j) \cdot (u_k \mathbf{a}^k) \\ &= (x^i \mathbf{a}_i) (y^j u_k \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^k) = \mathbf{x} (y^\alpha u_\alpha) = \mathbf{x} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}), \end{aligned}$$

$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{E}_n$, вж. (3.3) и (2.3). Това ни позволява да заключим, че един път дефинирано за вектори, диадното произведение се разпространява по естествен начин, вж. (8.18), и за тензори от произволна валентност (доколкото всеки тензор е линейна комбинация на полиади).

4) *Контракция на тензори.* Нека $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$ и

$$\mathbf{T} = t_{i_1}^{i_2 i_2 \dots i_p} \mathbf{a}^{i_1} \mathbf{a}_{i_2} \mathbf{a}_{i_3} \cdots \mathbf{a}_{i_p}. \quad (8.19)$$

Както и в двувалентния случай (§ 4.4) да заменим тензорното произведение със скаларно в подчертаната двойка полиадни множители:

$$\mathbf{a}^{i_1} \otimes \mathbf{a}_{i_2} \rightarrow \mathbf{a}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{i_2},$$

ср. с (4.18). Тогава

$$\begin{aligned} &t_{i_1}^{i_2 i_2 \dots i_p} (\mathbf{a}^{i_1} \cdot \mathbf{a}_{i_2}) \mathbf{a}_{i_3} \cdots \mathbf{a}_{i_p} \\ &= t_{i_1}^{i_2 i_2 \dots i_p} \delta_{i_2}^{i_1} \mathbf{a}_{i_3} \cdots \mathbf{a}_{i_p} = t_\alpha^{\alpha i_3 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_3} \cdots \mathbf{a}_{i_p} \in \otimes_{p-2} \mathcal{E}_n. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Проведената току-що операция, при която заменихме тензорното произведение със скаларно в една двойка полиадни множители, се нарича *контракция*. В резултат валентността на тензора се намалява с две. Ако тензорът \mathbf{T} е двувалентен, то контракцията поражда скалара $\text{tr } \mathbf{T}$ — следата на \mathbf{T} , вж. § 4.4.

Както и при пресмятането на следата, операцията (8.20) при координатно представяне съответства на следното: в съвкупността от компонентите $t_{i_1}^{i_2 i_2 \dots i_p}$ на тензора \mathbf{T} вземаме един горен и един долен индекс равни, $i_1 = i_2 = \alpha$, и сумираме по вече повтарящия се индекс α . В случая обаче, когато контракцията се извършва, грубо казано, по два долни или по два горни индекса, в резултата се появяват метрическите коефициенти g_{ij} или g^{ij} . За да илюстрираме това, да извършим още една контракция в тензора (8.20), например, по индексите i_3 и i_4 :

$$t_\alpha^{\alpha i_3 i_4 \dots i_p} (\mathbf{a}_{i_3} \cdot \mathbf{a}_{i_4}) \mathbf{a}_{i_5} \cdots \mathbf{a}_{i_p} = g_{\beta\gamma} t_\alpha^{\alpha\beta\gamma i_5 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_5} \cdots \mathbf{a}_{i_p} \in \otimes_{p-4} \mathcal{E}_n,$$

с което валентността на тензора се намалява с още две. Ясно е, че в p -валентния тензор може да се извършват няколко контракции. (Колко?) Само за двувалентния тензор контракцията е единствена и резултатът ѝ представлява неговата следа (§ 4.4).

8.6. Четиривалентните тензори като линейни преобразования в пространството от двувалентни тензори. Ще започнем с един по-прост пример. Нека $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$. Съставяме тензорното им произведение

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{x} = (t^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j) \otimes (x_k \mathbf{a}^k) = t^{ij} x_k \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}^k,$$

вж. (8.18), и правим контракция в него по последната двойка индекси

$$\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = t^{ij} x_k \mathbf{a}_i (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}^k) = (t^{i\alpha} x_\alpha) \mathbf{a}_i. \quad (8.21)$$

(Формално, полагаме $j = k = \alpha$ и сумираме по α .) Така намереният вектор \mathbf{y} е образът на \mathbf{x} под действието на двувалентния тензор \mathbf{T} , вж. § 3.2 и (3.8). Това именно съвпадение и оправдава използването на знака ‘.’ за контракцията, осъществена в (8.21) спрямо тензора $\mathbf{T} \otimes \mathbf{x}$.

Да проведем сега същите по дух разсъждения, но като се „вдигнем“ малко по-нагоре по тензорната „стълбичка“ (8.14).

Нека $\mathbf{H} \in \underset{4}{\otimes} \mathcal{E}_n$ и $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$. Съставяме тензорното им произведение

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \otimes \mathbf{T} &= (H^{ijkl} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l) \otimes (t_{pq} \mathbf{a}^p \mathbf{a}^q) \\ &= H^{ijkl} t_{pq} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \mathbf{a}^p \mathbf{a}^q \in \underset{6}{\otimes} \mathcal{E}_n, \end{aligned}$$

вж. (8.18), и правим контракция в него в подчертаната двойка полиадни множители

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{T} = H^{ijk\alpha} t_{\alpha q} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}^q \in \underset{4}{\otimes} \mathcal{E}_n. \quad (8.22)$$

като отново използваме знака ‘.’ за контракцията. (Както вече подчертахме в § 8.5, в поливалентния случай контракциите, които могат да се извършат, са повече от една и затова винаги трябва да е ясно от текста (или от контекста) коя именно се има предвид. Точката ‘.’, използвана в (8.21) и (8.22) както и навсякъде по-нататък, говори, че контракцията е спрямо последния индекс на първия тензор и първия индекс на втория.)

В тензора (8.22) да извършим още една контракция в подчертаната двойка полиадни множители, което води до появата на още една „точка“

в съответното означение¹⁰:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} : \mathbf{T} = H^{ij\beta\alpha} t_{\alpha\beta} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n, \quad (8.23)$$

т. е. компонентите на тензора \mathbf{S} са

$$s^{ij} = H^{ij\beta\alpha} t_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{S} = s^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j. \quad (8.24)$$

Формулите (8.23) и (8.24) показват, че всеки четиривалентен тензор \mathbf{H} дефинира чрез контракция по две двойки индекси линейно преобразование в пространството от двувалентни тензори:

$$\mathbf{H} : \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{H} : \mathbf{T}, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n.$$

Подчертаваме, че тази интерпретация е важна за механиката на непрекъснатите среди. Причината е в спецификата на въвеждането на класическите модели на еластично тяло и на вискозна течност. В тези модели се предполага, че тензорът на напрежението линейна функция, съответно, на тензора на деформацията или на тензора на скоростта на деформацията, вж. § § 24, 25.

Упражнение 8.7. Покажете, че всяко линейно преобразование на пространството от двувалентни тензори може да се запише във вида (8.23), т. е. може да се отъждестви с четиривалентен тензор. Как следва да се интерпретира тогава тетрадата (полиадното произведение на четири вектора) \mathbf{abcd} ? (Сравнете с упражнения 8.2 и 8.3 и формулата (8.12).)

Упражнение 8.8. Проверете, че полускаларното произведение на два двувалентни тензора \mathbf{T} и \mathbf{S} , дефинирано в (4.29) (§ 4.6), е контракцията по една двойка индекси на тензорното им произведение $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$. (Този факт обяснява защо използваме един и същ символ ‘ \cdot ’ и за контракция и за полускаларно произведение, ср. с формулите (8.21), (8.22) и (4.29), които се отнасят за тривалентни тензори и интерпретацията им като линейни преобразования на съответните векторни пространства.)

Упражнение 8.9. Нека \mathbf{T} и \mathbf{S} са двувалентни тензори. Проверете, че

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \text{tr} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^*).$$

8.7. Алтерниращ тензор. Въвеждаме т. нар. алтерниращ символ (или символ на Леви-Чевита). Това е тривалентният тензор \mathbf{E} над \mathcal{E}_3 ,

¹⁰Понякога се използва и означението $\mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{T}$.

чийто компоненти (в ортонормиран базис) се дефинират така

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} \pm 1, & \text{ако } i \neq j \neq k \neq i, \\ 0, & \text{в противния случай,} \end{cases} \quad (8.25)$$

като $\varepsilon_{ijk} = +1$, ако (i, j, k) е четна пермутация на $(1, 2, 3)$ и -1 , ако е нечетна.

Алтернираният тензор \mathbf{E} има редица интересни и полезни свойства, които го правят удобен инструмент в много случаи. Това е, преди всичко, тясната му връзка с векторното произведение на векторите в \mathcal{E}_3 . (Подчертаваме, че навсякъде в този пункт работим в тримерно пространство.)

При зададени вектори \mathbf{a} и \mathbf{b} да въведем вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{E} : (\mathbf{ba}), \quad (8.26)$$

чийто компоненти в декартова координатна система $x_1 x_2 x_3$ са

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} b_k a_j \quad \left(\sum_{j,k} \right). \quad (8.27)$$

(Двоеточieto да напомним означава контракция по две двойки индекси, вж. § 8.6.) Например,

$$\omega_1 = \varepsilon_{123} b_3 a_2 + \varepsilon_{132} b_2 a_3 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

и аналогично за ω_2 и ω_3 с циклична смяна на индексите $(1, 2, 3)$. (Фиксирайки $i = 1$, само $\varepsilon_{123} = 1$ и $\varepsilon_{132} = -1$ са ненулеви, съгласно (8.25)). Но така намерените ω_1 , ω_2 и ω_3 са декартовите компоненти на векторното произведение, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, което се пресмята в случая, да напомним, с помощта на детерминантата

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тук \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 са ортите на координатните оси на използваната декартова система. Следователно

$$\mathbf{E} : (\mathbf{ba}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (8.28)$$

— векторното произведение на векторите \mathbf{a} и \mathbf{b} съвпада с (двойната) контракция на алтернирания тензор \mathbf{E} с диадата \mathbf{ba} .

Формулата (8.28) позволява да пресметнем трилинейната форма $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ на алтерниращия тензор, както и да я интерпретираме геометрично по начин, прост и важен за по-нататъшния анализ. За целта забелязваме, че в декартова система тази форма има вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k z_k = -(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} \quad \left(\sum_{i,j,k} \right)$$

вж. (8.5) и (8.28), или

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} \quad (8.29)$$

— тук $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ е ориентираният обем на паралелепипеда, построен върху векторите \mathbf{x} , \mathbf{y} и \mathbf{z} .

Да разгледаме по-общата контракция на \mathbf{E} с произволен двувалентен тензор. Ако \mathbf{T} е симетричен, то $\mathbf{E} : \mathbf{T} = 0$. (Проверете!). Поради това това можем да предположим, че \mathbf{T} е антисиметричен, $\mathbf{T} = \mathbf{\Omega} \in \mathcal{E}_3 \otimes_a \mathcal{E}_3$.

По дадения тензор $\mathbf{\Omega}$ да построим вектора

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{\Omega}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{\Omega}. \quad (8.30)$$

Това очевидно поражда линейното преобразование

$$\mathbf{\Omega} \longrightarrow \boldsymbol{\omega}, \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} \quad \left(\sum_{k,j} \right), \quad (8.31)$$

от пространството на двувалентните антисиметрични тензори $\mathcal{E}_3 \otimes_a \mathcal{E}_3$ в \mathcal{E}_3 . Спрямо декартовите компоненти Ω_{ij} на $\mathbf{\Omega}$ и ω_i на $\boldsymbol{\omega}$ то се записва във вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} \\ \Omega_{12} \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

(Диagonalните компоненти Ω_{kk} , $k = 1, 2, 3$, на тензора $\mathbf{\Omega}$ се анулират предвид неговата кососиметричност.) Оттук се вижда, че преобразованието (8.31) е не само линейно, но и взаимно еднозначно. (Ако $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{E} : \mathbf{\Omega} = 0$, то $\Omega_{ij} = 0$, $\forall i, j$, вж. (8.32).) Впрочем съществуването на линейно и взаимно-еднозначно съответствие между \mathcal{E}_3 и пространството от двувалентни антисиметрични тензори не трябва да ни учудва, тъй като в тримерния (и само в тримерния) случай тези пространства имат еднаква размерност. (Този факт беше специално отбелязан в § 4.3.) По-съществено е, че споменатото съответствие се дава в инвариантната и удобна тензорна форма (8.30) чрез контракция с алтерниращия тензор \mathbf{E} .

За произволна двойка вектори $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{E}_3$ да съставим тензора

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{ba} - \mathbf{ab}) . \quad (8.33)$$

Той очевидно е антисиметричен. Пресмятаме векторът $\boldsymbol{\omega}$, който му съответства при преобразованието (8.30)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{E} : \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} : (\mathbf{ba}) - \mathbf{E} : (\mathbf{ab})) = \mathbf{E} : (\mathbf{ba}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} ,$$

т. е. резултатът е векторното произведение на \mathbf{a} и \mathbf{b} , съгласно (8.28). Това означава, че операцията (8.30) се свежда в тримерното пространство до векторното умножение, ако антисиметричният тензор $\mathbf{\Omega}$ има специалния вид (8.33).

Лесно е да си забележи, че преобразованието обратно на (8.31) също се задава чрез подходяща контракция с алтерниращия тензор \mathbf{E} . Наистина да съпоставим на всеки вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3$ антисиметричният тензор $\mathbf{\Omega} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3 \otimes_a \mathcal{E}_3$

$$\boldsymbol{\omega} \longrightarrow \mathbf{\Omega} , \quad \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (\sum_k) . \quad (8.34)$$

В декартова координатна система съответствието (8.34) има вида

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (8.35)$$

От координатните изрази (8.32) и (8.35) става ясно, че преобразованието (8.30) и (8.34) са взаимно обратни

$$-\frac{1}{2}\mathbf{E} : (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} , \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{E}_3 ,$$

т. е.

$$\mathbf{E} : \mathbf{E} = -2\mathbf{I} , \quad (8.36)$$

или, в декартова система,

$$\varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha j} = \varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{j\beta\alpha} = -2\delta_{ij} \quad (\sum_{\alpha,\beta}) . \quad (8.37)$$

Както ще видим в следващия параграф (§ 9.8), формулите (8.36), (8.37) са следствие от „богатата“ симетрия на алтерниращия тензор, по точно на неговата *изотропност*. Тази симетрия ще ни позволи да изведем в § 9.8 и някои по-обща съотношения от типа на (8.37).

§ 9. Група на симетрия на тензор. Изотропни тензори

9.1. Група на симетрия на тензор. Нека $U \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n)$ и $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$, като

$$\mathbf{T} = t^{i_1 \dots i_p} \mathbf{a}_{i_1} \dots \mathbf{a}_{i_p}$$

в даден полиаден базис. Разглеждаме тензора

$$U^p(\mathbf{T}) = t^{i_1 \dots i_p} (U \cdot \mathbf{a}_{i_1}) \dots (U \cdot \mathbf{a}_{i_p}) \quad (9.1)$$

— това е тензор със същите компоненти като \mathbf{T} но в полиадния базис, породен от векторите $U \cdot \mathbf{a}_i$, които са „завъртяни“ с помощта на ортогоналното преобразование U .

Операцията

$$\mathbf{T} \longrightarrow U^p(\mathbf{T}) \quad (9.2)$$

е линейно преобразование в пространството от p -валентни тензори, което се нарича *подобие*. Причината е, че при $p = 2$ това е добре познатото от линейната алгебра подобие на матрици. Наистина

$$\begin{aligned} U^2(\mathbf{T}) &= t^{ij} (U \cdot \mathbf{a}_i)(U \cdot \mathbf{a}_j) = t^{ij} (U \cdot \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_j \cdot U^*) \\ &= U \cdot \left(t^{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \right) \cdot U^* = U \cdot \mathbf{T} \cdot U^* = U \cdot \mathbf{T} \cdot U^{-1}. \end{aligned}$$

За даден тензор $\mathbf{T} \in \otimes_p \mathcal{E}_n$ въвеждаме съвкупността от ортогонални преобразования

$$G_{\mathbf{T}} = \left\{ U \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_n) \mid U^p(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \right\} \quad (9.3)$$

— това е очевидно група (тъй като винаги единичният тензор $\mathbf{I} \in G_{\mathbf{T}}$, а също, ако $U, V \in G_{\mathbf{T}}$, то и $U \cdot V \in G_{\mathbf{T}}$; проверете!). $G_{\mathbf{T}}$ се нарича *група на симетрия* на тензора \mathbf{T} . Ако имаме два базиса, които се получават един от друг с помощта на ортогоналното преобразование $U \in G_{\mathbf{T}}$, то тензорът \mathbf{T} има *едни и същи* компоненти и в двата базиса.

Нека $\mathbf{T} \in \otimes_{2k} \mathcal{E}_n$ е тензор от четна валентност. Да разгледаме инверсията $-\mathbf{I} : \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. Очевидно

$$\begin{aligned} (-\mathbf{I})^{2k}(\mathbf{T}) &= t^{i_1 \dots i_{2k}} (-\mathbf{a}_{i_1}) \dots (-\mathbf{a}_{i_{2k}}) \\ &= t^{i_1 \dots i_{2k}} \mathbf{a}_{i_1} \dots \mathbf{a}_{i_{2k}} = \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Това означава, че инверсията *винаги* е елемент на симетрия на тензор от четна валентност:

$$-\mathbf{I} \in G_{\mathbf{T}}, \quad \forall \mathbf{T} \in \otimes_{2k} \mathcal{E}_n. \quad (9.5)$$

Нека сега $\mathbf{T} \in \otimes_{2k+1} \mathcal{E}_n$ е тензор от нечетна валентност. Аналогично на (9.4) имаме

$$\begin{aligned} (-\mathbf{I})^{2k+1}(\mathbf{T}) &= t^{i_1 \dots i_{2k+1}}(-\mathbf{a}_{i_1}) \cdots (-\mathbf{a}_{i_{2k+1}}) \\ &= -t^{i_1 \dots i_{2k+1}} \mathbf{a}_{i_1} \cdots \mathbf{a}_{i_{2k+1}} = -\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Следователно инверсията *не може* да бъде елемент на симетрия на никой ненулев тензор от нечетна валентност. С други думи

$$-\mathbf{I} \in G_{\mathbf{T}} \Leftrightarrow \mathbf{T} = 0, \quad \text{ако } \mathbf{T} \in \otimes_{2k+1} \mathcal{E}_n. \quad (9.7)$$

9.2. Изотропни тензори. По-нататък за простота и нагледност ще разглеждаме единствено тензорите над тримерното пространство \mathcal{E}_3 .

Дефиниция 9.1. Тензорът $\mathbf{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{E}_3)$ се нарича изотропен, ако

$$G_{\mathbf{T}} = \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3). \quad (9.8)$$

(Напомниме, че $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ е собствено-ортогоналната група на пространството \mathcal{E}_3 , включваща „чистите“ ротации, вж. § 4.11.)

От дефиницията (9.3) на групата на симетрия е ясно, че изотропният тензор има едни и същи компоненти във всички декартови координатни системи. Това обяснява важността на понятието изотропност и „оправдава“ разглежданията, които ще проведем по-нататък в този параграф. Основната причина се състои в това, че изотропността се появява по естествен начин в механиката на непрекъснатите среди. Именно, ако знаем, че свойствата на средата са едни и същи във всички направления (не зависят от ориентацията на образеца, „изрязан“ от средата), то тензорите, характеризиращи поведението на средата (тензор на еластичните модули, „вискозният“ тензор и т. н.), трябва също да не зависят от ориентацията, т. е. те трябва да бъдат изотропни. Както ще видим това драстично опростява структурата им и броя на материалните постоянни, характеризиращи средата.

Тривиален пример на изотропен тензор е единичният тензор \mathbf{I}

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^* = \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3),$$

просто по дефиниция на ортогоналния тензор, вж. (4.54). Очевидно е също, че сферичните тензори $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}$ са също изотропни. По-долу в § 9.3 ще покажем, че с тях се изчерпват всички изотропни двувалентни тензори.

Ясно е, че ако изотропният тензор \mathbf{T} е от четна валентност, то

$$G_T = \mathcal{O}(\mathcal{E}_3), \quad \mathbf{T} \in \otimes_{2k}(\mathcal{E}_3). \quad (9.9)$$

тъй като $-\mathbf{I} \in G_T$, вж. (9.5). Ако обаче \mathbf{T} е от нечетна валентност, то дефиницията (9.9) е неприемлива — в този случай $-\mathbf{I} \in G_T$, което е възможно единствено ако тензорът \mathbf{T} е нулев, съгласно (9.7). Това обяснява защо в дефиницията (9.8) намесихме собствено-ортогоналната група $\mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$, а не пълната ортогонална група $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$.

Нека $\mathbf{T} \in \otimes_3 \mathcal{E}_n$ е изотропен тензор. Да разгледаме полилинейната му форма

$$\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left(\mathbf{a}_{i_1} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}} \right) \cdots \left(\mathbf{a}_{i_p} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right),$$

вж. (8.2). Нека $\mathbf{U} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$. Да „завъртим“ векторите $\overset{(k)}{\mathbf{x}}$, $k = 1, 2, \dots, p$, с помощта на тензора \mathbf{U}

$$\mathbf{T} \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{U} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) = t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left(\mathbf{a}_{i_1} \cdot \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}} \right) \right) \cdots \left(\mathbf{a}_{i_p} \cdot \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) \right).$$

Но

$$\mathbf{a}_{i_k} \cdot \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{x}} \right) = (\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{a}_{i_k}) \cdot \overset{(k)}{\mathbf{x}}, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

и затова

$$\begin{aligned} & \mathbf{T} \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{U} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) \\ &= t^{i_1 i_2 \dots i_p} \left((\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{a}_{i_1}) \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}} \right) \cdots \left((\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{a}_{i_p}) \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) \\ &= U^{*p}(\mathbf{T}) \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right). \end{aligned}$$

Но щом \mathbf{T} е изотропен, то $U^{*p}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, $\forall U^* \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$, което означава, че

$$\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{T} \left(\mathbf{U} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{U} \cdot \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right), \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3). \quad (9.10)$$

С други думи полилинейната форма на тензора \mathbf{T} е *инвариант* на системата от векторите-аргументи $\left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right)$ — тя остава неизменна, както и да „въртим“ тази система с помощта на произволен ортогонален тензор $\mathbf{U} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$.

Провеждайки в обратен ред горните разсъждения се убеждаваме, че инвариантността (9.10) на полилинейната форма на тензора \mathbf{T} влече (9.8). Това означава, че (9.10) може да се използва като дефиниция на изотропността на тензора \mathbf{T} , еквивалентна на (9.8).

На свой ред от (9.10) следва, че p -линейната форма $\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right)$ зависи само от p -едъра $\left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right)$, а не от неговата ориентация, т. е. представлява функция единствено на дължините на векторите $\overset{(k)}{\mathbf{x}}$, определени чрез скаларните произведения $\overset{(k)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(k)}{\mathbf{x}}$, и от ъглите между тях, зададени (при вече известни дължини на тези вектори) от скаларните произведения $\overset{(r)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(s)}{\mathbf{x}}$, $k, r, s = 1, \dots, p$, $r \neq s$, или

$$\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right) = \mathbf{T} \left(\overset{(i)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(j)}{\mathbf{x}} \right), \quad i, j = 1, \dots, p, \quad (9.11)$$

в случая на тензор от четна валентност (Забележете, че дясната страна на (9.11) е инвариантна спрямо пълната ортогонална група $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$, което е невъзможно за ненулев тензор от нечетна валентност.)

9.3. Изотропни двувалентни тензори. Нека $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$ е изотропен, $G_{\mathbf{T}} = \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$. Както отбелязахме в § 4.9 всеки двувалентен тензор над примерното пространство има поне един собствен вектор

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}.$$

Използваме изотропността на \mathbf{T}

$$\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a},$$

или

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}) = \lambda (\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3),$$

вж. (4.54). Последното равенство означава, че освен вектора \mathbf{a} , всички вектори $\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$, са собствени за тензора \mathbf{T} , съответстващи при това на едно и съща собствена стойност λ . Но при фиксирано \mathbf{a} край на вектора $\mathbf{U} \cdot \mathbf{a}$ „замита“ цялата сфера с радиус $|\mathbf{a}|$, когато \mathbf{U} „пробягва“ цялата ортогонална група $\mathcal{O}(\mathcal{E}_3)$. Оттук

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I} \quad \text{или} \quad t_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (9.12)$$

в декартова система. Следователно единствените изотропни двувалентни тензори са сферичните, чиято матрица е пропорционална на единичната във всяка декартова система. С други думи, ако $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$, то

$$G_{\mathbf{T}} = \mathcal{O}(\mathcal{E}_3) \Leftrightarrow \mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}. \quad (9.13)$$

Ще се спрем сега на още едно доказателство на (9.13). То има това важно качество, че се обобщава лесно за поливалентния случай (§9.7), а освен това не използва тримерността на изходното пространство.

Нека отново \mathbf{T} е изотропен двувалентен тензор. Разглеждаме билинейната му форма $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$. Предвид казаното в §9.2, тя е инвариант на двойката вектори \mathbf{x}, \mathbf{y} , т. е.

$$\mathbf{T}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_3), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_3,$$

и затова

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \quad (9.14)$$

вж. (9.11). Но $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависи линейно от \mathbf{x} и \mathbf{y} . Този факт изключва зависимостта на \mathbf{T} от $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$ в (9.14), като оставя само скаларното произведение $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}_n,$$

т. е. $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{I}$.

9.4. Изотропни тензори от четна валентност. Проведеното току-що доказателство за общия вид на двувалентния изотропен тензор се обобщава лесно и за тензори от произволна четна валентност.

За нагледност ще разгледаме първо четривалентния случай, когато тензорът $\mathbf{H} \in \otimes_4 \mathcal{E}_3$ е изотропен. Съгласно (9.10) 4-линейната му форма $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$ е изотропна и поради това зависи само от скаларните произведения

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \\ & \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{w}, \end{aligned}$$

вж. (9.11). Полилинейността на $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$ изключва зависимостта от дължините на векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и \mathbf{w} и оставя само събираеми, съдържащи скаларните произведения на различните аргументи, в които всеки един от тях влиза само по веднъж

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \lambda_1 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}) \\ &+ \lambda_2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) (\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}) + \lambda_3 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Но това е 4-формата на тензора, който в декартова система има компоненти

$$H_{ijpq} = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + \lambda_2 \delta_{ip} \delta_{jq} + \lambda_3 \delta_{iq} \delta_{jp}, \quad (9.16)$$

а това очевидно е линейна комбинация на изомерите на тензора $\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, чийто компоненти са $\delta_{ij}\delta_{pq}$.

Преди да преминем към обобщението на горното разсъждение за произволни тензори от четна валентност, да припомним (§ 8.6), че четривалентният тензор \mathbf{H} определя линейно преобразование в пространството от двувалентни чрез контракцията си $\mathbf{H} : \mathbf{T}$ по две двойки индекси. Ако тензорът \mathbf{H} освен това е и изотропен, то

$$s_{ij} = H_{ijpq}t_{pq} = \lambda_1 \delta_{ij}t_{\alpha\alpha} + \lambda_2 t_{ij} + \lambda_3 t_{ji} \quad \left(\sum_{p,q,\alpha} \right),$$

както следва от (9.16), или

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} : \mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{T} + \lambda_3 \mathbf{T}^*. \quad (9.17)$$

В частност, ако тензорът \mathbf{T} е симетричен, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$, то образът му \mathbf{S} също е симетричен и

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} : \mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{I} \operatorname{tr} \mathbf{T} + 2\mu \mathbf{T}, \quad (9.18)$$

където сме положили $\lambda = \lambda_1$, $2\mu = \lambda_2 + \lambda_3$.

Както ще видим по-нататък при подходяща механична интерпретация на тензорите \mathbf{S} и \mathbf{T} , съотношението (9.18) ще се сведе до закона на Хук за деформирането на линейно еластично и изотропно тяло или до закона на Навие-Стокс за течението на вискозна течност.

Да отбележим също, че предположението за изотропност на тензора драстично опростява структурата му и броят на параметрите, които го характеризират. Например, броят на компонентите на двувалентния тензор (над \mathcal{E}_3) е $3^2 = 9$, но ако той е изотропен, за задаването му е необходима само една константа, вж. (9.13). Аналогично, четривалентният тензор се задава с $3^4 = 81$ компоненти в общия случай, но ако той е изотропен, само три константи са нужни за определянето му, вж. (9.17).

Нека сега $\mathbf{T} \in \otimes_{2p} \mathcal{E}_3$ е изотропен тензор от четна валентност. Аналогично на четривалентния случай, билинейната му форма $\mathbf{T} \left(\overset{(1)}{\mathbf{x}}, \dots, \overset{(p)}{\mathbf{x}} \right)$ е линейна комбинация на

$$\left(\overset{(1)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(2)}{\mathbf{x}} \right) \left(\overset{(3)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(4)}{\mathbf{x}} \right) \cdots \left(\overset{(2p-1)}{\mathbf{x}} \cdot \overset{(2p)}{\mathbf{x}} \right) \quad (9.19)$$

и на аналогични скаларни произведения, получени от (9.19) чрез произволни пермутации на индексите. Това означава, че \mathbf{T} е линейна комбинация на изомерите на тензора

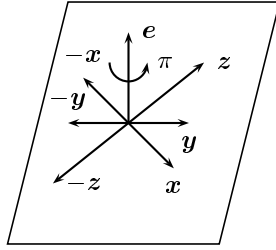
$$\underbrace{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \cdots \otimes \mathbf{I}}_p, \quad (9.20)$$

тъй като $2p$ -линейната форма на последния съвпада с (9.19). В декартова система тензорът (9.20) има компоненти

$$\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \cdots \delta_{i_{2p-1} i_{2p}}, \quad (9.21)$$

което означава, че декартовите компоненти на произволен изотропен тензор от четна валентност са линейни комбинации на изомерите на (9.21).

Частните случаи на това твърдение за двувалентен и за четиривалентен тензори бяха вече установени по-горе, вж. (9.12) и (9.16).



Фиг. 9.1

9.5. Изотропни тривалентни тензори. Отбелязваме преди всичко, че съществува поне един изотропен тривалентен тензор и той е алтерниращият. Това следва от формулата (8.29), съгласно която трилинейната форма $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ на \mathbf{E} е пропорционална на ориентирания обем на паралелепипеда $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, построен върху векторите $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Но този обем е инвариантен спрямо произволни ротации

$$V(\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}) = V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

$\forall \mathbf{U} \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ и следователно същото свойство притежава и трилинейната форма $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Съгласно § 9.2 оттук следва изотропността на алтерниращия тензор \mathbf{E} , вж. (9.10).

Нека сега $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$ е произволен тривалентен изотропен тензор. Ще покажем, че той е пропорционален на алтерниращия.

Разглеждаме трилинейната форма $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ на тензора \mathbf{T} . Забелязваме че тя се анулира, ако аргументите ѝ са компланарни. За да се убедим в това, разглеждаме ротацията \mathbf{U}^e на ъгъл π около вектора \mathbf{e} , перпендикулярен на равнината, в която лежат векторите \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} , вж. фиг. 9.1. Очевидно $\mathbf{U}^e \in \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3)$ е собствено ортогонално преобразование и

$$\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}, \quad \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y}, \quad \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{z} = -\mathbf{z}.$$

Затога

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{x}, \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{y}, \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{z}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (9.22)$$

От изотропността на \mathbf{T} следва обаче, че

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}^e \cdot \mathbf{x}, \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{y}, \mathbf{U}^e \cdot \mathbf{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (9.23)$$

Сравнението на (9.22) и (9.23) показва, че

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \quad \text{ако } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \text{ са компланарни.} \quad (9.24)$$

Нека $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 е ортонормиран базис. Полагаме

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -\lambda \quad (9.25)$$

Паралелепипедът, определен от векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 , е очевидно единичният куб, чийто обем е единица, $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$. Поради това (9.25) може да се препише като

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -\lambda V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \quad (9.26)$$

Оттук

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= -\lambda V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \mathbf{x} &= \mu_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{y} = \mu_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{z} = \mu_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (9.27)$$

което означава, че стойността $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ на трилинейната форма на тензора \mathbf{T} е пропорционална на обема на правоъгълния паралелепипед, построен върху взаимно-перпендикулярните вектори \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} .

Остана да покажем, че (9.27) е в сила за произволна тройка вектори \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} , а не само за взаимно-перпендикулярните. За целта да „скосим“ правоъгълния паралелепипед, като прибавим, например, към $\mathbf{z} = \mu_3 \mathbf{e}_3$ вектора $\chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2$. Височината на паралелепипеда (по оста x_3) няма да се измени, както и обемът му

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} + \chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2) = V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{R}.$$

Но и трилинейната форма на разглеждания тензор \mathbf{T} също няма да се измени

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} + \chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2) &= \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ + \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2) &= \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \forall \chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

тъй като векторите $\mathbf{x} = \mu_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{y} = \mu_2 \mathbf{e}_2$ и $\chi_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2$ са компланарни и подчертаният член, съгласно (9.24), се анулира.

Скосявайки паралелепипеда по аналогичен начин и в останалите две координатни равнини се убеждаваме, че (9.27) е в сила за произволна тройка вектори \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} , а не само за взаимно перпендикулярни. Привличаме още един път формулата (8.29)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\lambda V(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{E}_3.$$

Но това означава, че ако $\mathbf{T} \in \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3 \otimes \mathcal{E}_3$, то

$$G_{\mathbf{T}} = \mathcal{O}^+(\mathcal{E}_3) \Leftrightarrow \mathbf{T} = \lambda \mathbf{E} \quad (9.28)$$

— единствените тривалентни изотропни тензори са пропорционални на алтерниращия. В този смисъл алтерниращият символ ε_{ijk} е тривалентният аналог на кронекеровата делта δ_{ij} , вж. § 9.3.

9.6. Примери.

а) Да разгледаме първо двувалентния тензор $\mathbf{E} : \mathbf{E}$ с компоненти $(\mathbf{E} : \mathbf{E})_{ij} = \varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha j}$, където \mathbf{E} е алтерниращият тензор, дефиниран в (8.25). Тъй като \mathbf{E} е изотропен, вж. § 9.5, то двувалентният тензор $\mathbf{E} : \mathbf{E}$ е също изотропен. Съгласно (9.9)

$$\mathbf{E} : \mathbf{E} = \lambda \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha j} = \lambda \delta_{ij} \quad \left(\sum_{\alpha, \beta} \right). \quad (9.29)$$

За определяне на λ извършваме контракция в двете страни на (9.29) по индексите i, j , полагайки $i = j = \gamma$ и сумирайки по γ

$$3\lambda = \lambda \delta_{\gamma\gamma} = \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \quad \left(\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \right)$$

или

$$3\lambda = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\gamma\alpha\beta}^2,$$

тъй като $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ — извършихме три пермутации за да превърнем $(\gamma\alpha\beta)$ в $(\beta\alpha\gamma)$. Но $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}^2 = 1$, а броят на ненулевите компоненти $\varepsilon_{\gamma\alpha\beta}$ на тензора \mathbf{E} е шест, вж. дефиницията му (8.25). Следователно $3\lambda = -6$, $\lambda = -2$, и от (9.29) следва

$$\mathbf{E} : \mathbf{E} = -2\mathbf{I} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\alpha j} = -2\delta_{ij} \quad \left(\sum_{\alpha, \beta} \right) \quad (9.30)$$

в декартова система. Последната формула очевидно повтаря съотношенията (8.36) и (8.37), които по такъв начин наистина се оказват следствие на изотропността на алтерниращия тензор.

б) Да разгледаме четривалентния тензор $\mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ с компоненти

$$H_{ijkl} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})_{ijkl} = \varepsilon_{ij\beta} \varepsilon_{\beta kl} \quad \left(\sum_{\beta} \right)$$

в декартова система. Той е изотропен и следователно има вида (9.16)

$$\varepsilon_{ij\beta} \varepsilon_{\beta kl} = \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \lambda_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda_3 \delta_{il} \delta_{jk} \quad \left(\sum_{\beta} \right).$$

Но тензорът \mathbf{H} е антисиметричен по двойките индекси (i, j) и (k, ℓ)

$$H_{ijkl} = -H_{jikl}, \quad H_{ijkl} = -H_{ijlk},$$

като следствие от дефиницията (8.25) на алтерниращия тензор. Оттук $\lambda_1 = 0$, тъй като δ_{ij} и δ_{kl} са симетрични по (i, j) и (k, ℓ) , а $\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$, т. е.

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \lambda(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \left(\sum_{\beta} \right). \quad (9.31)$$

Неизвестният множител λ ще намерим след контракцията $k = j = \alpha$ в (9.31)

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\ell} = \lambda(\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{\alpha\alpha}) \left(\sum_{\alpha,\beta} \right).$$

Но

$$\delta_{i\alpha}\delta_{\alpha\ell} = \delta_{i\ell}, \quad \delta_{\alpha\alpha} = 3 \left(\sum_{\alpha} \right),$$

и затова

$$\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha\ell} = -2\lambda\delta_{i\ell} \left(\sum_{\alpha,\beta} \right).$$

Сравнението на последната формула с (9.30) показва, че $\lambda = 1$, т. е.

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} \left(\sum_{\beta} \right). \quad (9.32)$$

Тази формула може да се разглежда като четиривалентно обобщение на (9.30), което отново е следствие на „богатата“ симетрия (по-точно, на изотропността) на алтерниращия тензор.

Да обърнем внимание, че формулата (9.32) може да се запише и с помощта на една детерминанта

$$\varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{i\ell} \\ \delta_{jk} & \delta_{j\ell} \end{vmatrix}. \quad (9.33)$$

Този запис ще се окаже удобен при обобщението на формулата (9.32) за шествалентния изотропен тензор $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ в § 16.1.

в) Току-що изведеното съотношение (9.32) има като просто следствие известната формула за разкриването на двойното векторно произведение.

Да разгледаме контракцията на четиривалентния тензор $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ с триадата \mathbf{cba} по три двойки индекси. Резултатът е векторът \mathbf{d} с компоненти

$$\begin{aligned} d_i &= \varepsilon_{ij\beta}\varepsilon_{\beta k\ell} c_{\ell} b_k a_j = \varepsilon_{ij\beta} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_{\beta} a_j \\ &= \left[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right]_i \left(\sum_{\beta,j,k,\ell} \right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

в декартова система.

От друга страна, използвайки (9.32), получаваме следният израз за компонентите d_i на вектора \mathbf{d} :

$$\begin{aligned} d_i &= (\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}) c_\ell b_k a_j = \delta_{ik}\delta_{j\ell} c_\ell b_k a_j - \delta_{i\ell}\delta_{jk} c_\ell b_k a_j \\ &= b_i (a_j c_j) - c_i (a_j b_j) = b_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \left(\sum_{k,j,\ell} \right). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Сравнението между (9.35) и (9.35) дава

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (9.36)$$

— добре познатата формула за разкриването на двойното векторно произведение¹¹, зад която се крие, както се убедихме току-що, изотропността на алтерниращия тензор.

¹¹ Да напомним мнемоничното правило: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \text{БАЦ} - \text{ЦАБ}$.