# § 10. РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА АБСОЛЮТНО ТВЪРДО ТЯЛО

По определение движението на тяло се нарича *равнинно*, ако всички негови точки се движат успоредно на една фиксирана равнина $P$. В този случай всички прави в тялото, съединяващи две негови точки и перпендикулярни на равнината $P$, се движат постъпателно. Движението на всяка такава права тогава се определя от движението на коя да е нейна точка. Следователно движението на тялото се определя еднозначно от движението на едно негово равнинно сечение, успоредно на $P$, т. е. свежда се до движението на равнинна фигура в нейната равнина. Самото положение на такава фигура се определя от положението на две точки $A$ и $B$ или от положението на отсечката $AB$. Поради това изследването на движението на фигурата се свежда на свой ред до изследването на движението на отсечка, неподвижно свързана с фигурата.

В равнината на движение на фигурата въвеждаме неподвижна координатна система $Oxy$. С движещата се фигура свързваме неподвижно втора равнина, която се движи заедно с фигурата. В тази подвижна равнина въвеждаме координатната система $A\xi\eta$ с начало в една фиксирана точка $A$ от фигурата; точката $A$ се нарича *полюс*. Тогава движението на фигурата поражда движение на подвижната равнина спрямо неподвижната или, което е същото, движение на подвижната координатна система спрямо неподвижната (фиг. 10.1).

Движението на фигурата се задава от трите функции

$$x_A = x_A(t),\ y_A = y_A(t),\ \varphi = \varphi(t), \tag{10.1}$$

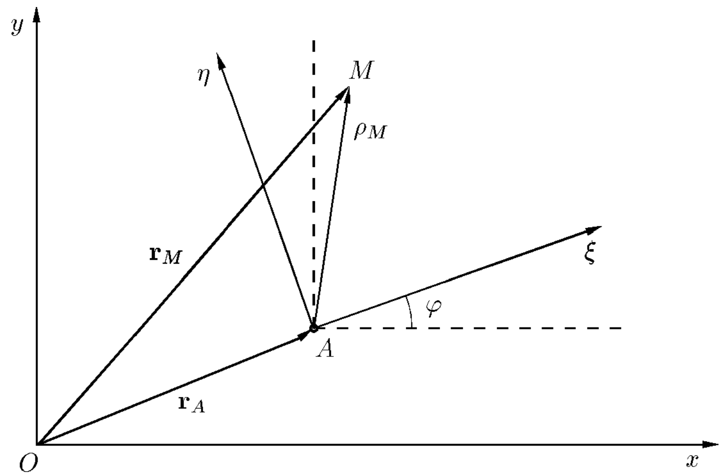
които определят положението на полюса $A$ и завъртането $\varphi$ на подвижната система спрямо неподвижната във всеки момент от време.

Нека $\mathbf{r}_M = \overrightarrow{OM}$, $\boldsymbol{\rho}_M = \overrightarrow{AM}$ са радиус-векторите на точката $M$ от фигурата съответно спрямо неподвижната и подвижната координатна система. Тогава

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_M, \tag{10.2a}$$

или

$$x_M = x_A + \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi,\ y_M = y_A + \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \tag{10.2b}$$




Фиг. 10.1

(фиг. 10.1). От тези съотношения намираме закона на движението на точката $M$:

$$
(10.3)\qquad \begin{aligned} x_M &= x_A(t) + \xi_M \cos\varphi(t) - \eta_M \sin\varphi(t) = x_M(t),\\ y_M &= y_A(t) + \xi_M \sin\varphi(t) + \eta_M \cos\varphi(t) = y_M(t), \end{aligned}
$$

където $\xi_M$ и $\eta_M$ са координатите на $M$ спрямо подвижната система $A\xi\eta$. Изключването на времето $t$ от двете уравнения (10.3) позволява да се определи траекторията на точката $M$ от фигурата.

Всяко преместване (движение) на равнинна фигура от едно положение в друго може да се реализира чрез една ротация около точка, наречена *център на крайната ротация* (теорема на Ойлер). Всяко преместване на фигурата от даденото до безкрайно близко положение тогава се реализира чрез една безкрайно малка ротация около точката $P$, наречена *моментен център на ротация*. Моментният център се характеризира с това, че скоростта му в дадения момент се анулира. Геометричното място на моментните центрове на ротация в неподвижната равнина се нарича *неподвижна центроида* (или *база*), а в подвижната равнина — *подвижна центроида* (или *рулетка*). Подвижната и неподвижната центроида във всеки момент от време се допират в точката $P$ — моментния център на ротация. Следователно произволно равнинно движение може да се осъществи чрез търкаляне (без хлъзгане) на една крива (рулетката) върху друга крива (базата). В това се състои т е о р е м а т а   н а   П о а н с о.

Скоростта на произволна точка $M$ от фигурата се определя по формулата на Ойлер

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{MA}, \ \mathbf{v}_{MA} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_M, \tag{10.4}$$

където $\mathbf{v}_A$ е скоростта на полюса $A$, $\mathbf{v}_{MA}$ е скоростта на точката $M$ в нейното кръгово движение спрямо полюса $A$, а $\boldsymbol{\omega}$ е векторът ъглова скорост на фигурата, дефиниран по следния начин: $\boldsymbol{\omega}$ е насочен перпендикулярно на равнината на фигурата в посока, от която завъртането на фигурата на ъгъл $d\varphi$ около полюса $A$ се вижда като положително (т. е. обратно на движението на часовниковата стрелка); по големина $|\boldsymbol{\omega}| = |\omega| = |d\varphi/dt|$.

Проекциите на скоростта върху осите на неподвижната координатна система са

$$v_{Mx} = v_{Ax} - \omega(y_M - y_A), \ v_{My} = v_{Ay} + \omega(x_M - x_A), \tag{10.5}$$

а върху осите на подвижната:

$$\begin{gathered} v_{M\xi} = v_{A\xi} - \omega\eta, \quad v_{M\eta} = v_{A\eta} + \omega\xi, \\ v_{A\xi} = v_{Ax}\cos\varphi + v_{Ay}\sin\varphi, \ v_{A\eta} = -v_{Ax}\sin\varphi + v_{Ay}\cos\varphi, \end{gathered} \tag{10.6}$$

при това $v_{Ax} = \dot{x}_A$, $v_{Ay} = \dot{y}_A$, $\omega = \dot{\varphi}$ са известни функции на времето, защото е зададен законът (10.1) на движението на фигурата.

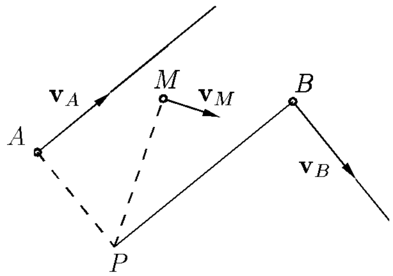
Параметричните уравнения на базата и на рулетката се намират от условието, че техните точки имат нулеви скорости съответно в неподвижната и подвижната координатна система. С помощта на (10.5) и (10.6) сега намираме

$$x_P = x_A - \frac{1}{\omega}\dot{y}_A, \quad y_P = \frac{1}{\omega}\dot{x}_A + y_A \tag{10.7}$$

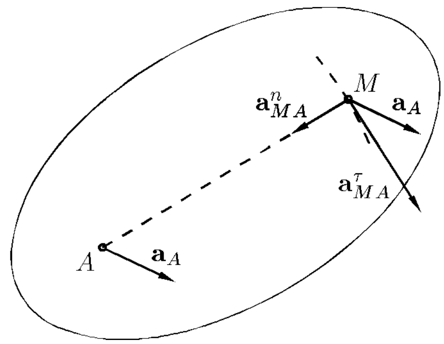
— параметричното уравнение на базата, и

$$\xi_P = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_A\sin\varphi - \dot{y}_A\cos\varphi), \ \eta_P = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_A\cos\varphi + \dot{y}_A\sin\varphi) \tag{10.8}$$

— параметричното уравнение на рулетката.




Фиг. 10.2




Фиг. 10.3

Моментният център на ротация $P$ може да се намери геометрично, ако знаем направленията на скоростите на две точки $A$ и $B$ от фигурата: $P$ е пресечната точка на перпендикулярите, издигнати в точките $A$ и $B$ към направленията на скоростите в тях (фиг. 10.2).

Ако са известни скоростта $\mathbf{v}_A$ на една точка $A$ от фигурата и направлението на скоростта в друга точка $B$, то може да се намери скоростта на всяка точка $M$ от фигурата по следния начин: Издигайки перпендикуляри към директрисите на скоростите в точките $A$ и $B$, определяме положението $P$ на моментния център на ротация. От съотношението $v_A = \omega|PA|$ намираме моментната ъглова скорост на въртене на фигурата: $\omega = v_A/|PA|$. Тогава $v_M = \omega|PM| = v_A|PM|/|PA|$ и $\mathbf{v}_M \perp \overrightarrow{PM}$, където $M$ е коя да е точка от фигурата.

Ускорението на произволна точка $M$ от фигурата се дава от формулата

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}^\tau_{MA} + \mathbf{a}^n_{MA}, \ \mathbf{a}^\tau_{MA} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho}_M, \ \mathbf{a}^n_{MA} = -\omega^2 \boldsymbol{\rho}_M, \tag{10.9}$$

където $\mathbf{a}_A = \dot{\mathbf{v}}_A$ е ускорението на полюса $A$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ е векторът на моментното ъглово ускорение на фигурата, а $\mathbf{a}^\tau_{MA}$ и $\mathbf{a}^n_{MA}$ са съответно тангенциалното и нормалното ускорение на точката $M$ при нейното кръгово движение спрямо полюса $A$ (фиг. 10.3).