1. РЕГУЛЯРЕН ОПЕРАТОР НА ЩУРМ-ЛИУВИЛ.

1. Класическата формула за ред на Фурие като задача на собствени значения за оператора $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$. Теорема за попълване по норма в $L^2(0, \pi)$.

2. Регулярен оператор на Щурм - Лиувил.

3. Съществуване и асимптотики на собствените числа и собствените функции.

4. Функция на Грин за задачата на Щурм-Лиувил. Формули за разлагане и равенство на Парсевал.

5. Периодични гранични условия.

Допълнение 1. Теорема на Щурм.

1.1. Класическата формула за ред на Фурие като задача за собствени значения за оператора $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$. Доказателство чрез метода на контурното интегриране. Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

Основният резултат тук е доказателството на класическата формула за развитие в ред на Фурие на произволна функция $f(x) \in L^2(0,\pi)$, където както обикновено

$$L^2(0,\pi): \quad (f,g) = \int_0^\pi f(x)\overline{g}(x)\,dx \quad \|f\| = (f,f)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Приведеният тук извод е удобен с оглед обобщаването му за регулярния оператор на Щурм-Лиувил, което ще направим в следващите параграфи. Имаме следната

Основна теорема- Теорема на Фурие. Нека

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \quad n = 1,2,\ldots, \quad (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}. \tag{1.2}$$

Тогава
а. За всяка два пъти диференцируема функция $f(x) \in C^2[0,\pi]$ и такава, че $f(0) = f(\pi) = 0$ е справедливо разложението

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad c_n = (f,\varphi_n), \tag{1.3}$$

където редът е равномерно и абсолютно сходящ при $0 \le x \le \pi$.
б. Ако $f(x) \in L^2(0,\pi)$ в разложението (1.3) сходимостта е по нормата на $L^2(0,\pi)$:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\|_{L^2} = 0. \tag{1.4}$$

Нека отбележим, че разлагането (1.4) е еквивалентно на равенството

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \tag{1.4a}$$

което се нарича **равенство на Парсевал**.

Преди да докажем тази теорема ще приведем една лема, доказателството на която е добре известно от курса по комплексен анализ.

Лема 1 Нека от комплексната равнина $\mathbb{C}$ извадим кръгчетата $C_\rho(n) : |z-n| < \rho,\ \rho < 1/2$. Тогава в областта $Z_\rho = \mathbb{C} \setminus \cup_n C_\rho(n)$ е справедлива следната оценка

$$|\sin \pi z| \ge K_\rho \exp(|\mathrm{Im}k\, z|\pi) \quad z \in Z_\rho, \tag{1.5}$$

където K_ρ е положителна константа.

Доказателство. Нека $z = x + iy$, където за определеност $y \geq 0$. Директно от формулите на Ойлер имаме

$$\frac{1}{2}|e^{\pi y} - e^{-\pi y}| \leq |\sin \pi z| \leq \frac{1}{2}|e^{\pi y} + e^{-\pi y}| \quad y \geq 0,\ -\infty < x < \infty.$$

Следователно равномерно по $y \geq 1$ и $-\infty < x < \infty$

$$|\sin \pi z| \geq \frac{1}{2}e^{\pi y}(1 - e^{-2\pi y}) \geq \frac{1}{2}e^{\pi y}(1 - e^{-2\pi}) = C^{-1}e^{\pi y}$$

т.е.

$$\frac{1}{|\sin \pi z|} \leq Ce^{-\pi y}, \quad y \geq 1, -\infty < x < \infty. \tag{1.5a}$$

За да получим исканата оценка остава да отбележим, че нулите на $\sin \pi z$ са в точките k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\sin \pi(z + 2) = \sin z$. Следователно в затворената, ограничена област $Z_\rho^{(1)} = (0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 1) \setminus C_\rho(n)$ имаме оценката

$$|\sin \pi z| \geq K_\rho^{(1)} > 0, \quad z \in Z_\rho^{(1)},$$

която заедно с (1.5а) доказва исканата оценка (1.5). $\square$

Нека разгледаме граничната задача, определена от уравнението

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (\lambda = k^2) \tag{1.6}$$

и граничните условия

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{1.7}$$

Общото решение на (1.6) е

$$y(x,k) = A\frac{\sin kx}{k} + B\cos kx. \tag{1.8}$$

Сега да определим тези k_n, за които са изпълнени условията (1.7). От първото условие в (1.7) получаваме $B = 0$, тогава второто води уравнението $\sin k\pi = 0$. Решенията на това уравнение са $k_n = n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Следователно собствените числа и съответните собствени функции са

$$\lambda_n = n^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\|\varphi_n\|_{L^2} = 1). \tag{1.9}$$

Нека построим функцията на Грин

$$\Gamma(x,t,k) = \frac{1}{k\sin k\pi}\begin{cases} \sin kx \sin k(t - \pi), & x \leq t \leq \pi, \\ \sin k(x - \pi)\sin kt, & 0 \leq t \leq x \end{cases} \tag{1.10}$$

и нека функцията $f(x) \in C^2[0,\pi]$ и удовлетворява условията $f(0) = f(\pi) = 0$. Да разгледаме функцията

$$F(f;x,k) = \int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f(t)\,dt =$$

$$\frac{\sin k(x-\pi)}{k\sin k\pi}\int_0^x \sin kt f(t)\,dt+\frac{\sin kx}{k\sin k\pi}\int_x^\pi \sin k(t-\pi)f(t)\,dt. \tag{1.11}$$

Нека отбележим, че функцията $F(f;x,k)$ при $k^2\neq n^2$ е решение на нееднородната гранична задача

$$F''+\lambda F=f(x),\quad F(0)=F(\pi)=0. \tag{1.12}$$

Интегрирайки два пъти по части в (1.11) получаваме

$$F(f;x,k)=\int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f(t)\,dt=\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f''(t)\,dt. \tag{1.13}$$

Нека положим

$$\frac{1}{k}\int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f''(t)\,dt=$$

$$\frac{\sin k(x-\pi)}{k^2\sin k\pi}\int_0^x \sin kt f''(t)\,dt+\frac{\sin kx}{k^2\sin k\pi}\int_x^\pi \sin k(t-\pi)f''(t)\,dt=I_1+I_2. \tag{1.14}$$

Нека $C_N : k=(N+1/2)e^{i\varphi}$, $0\leq\varphi<2\pi$ е окръжност с радиус $N+1/2$ и нека разгледаме контурния интеграл

$$I_N(f;x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} F(f;x,k)k\,dk. \tag{1.15}$$

Доказателството на формулата за разлагане ще получим отначало за функции $f(x)\in C^2[0,\pi]$ и удовлетворяващи условията $f(0)=f(\pi)=0$. Директно пресмятайки с помощта на лема 1 ще покажем, че

$$\lim_{N\to\infty} I_N(f;x)=f(x). \tag{1.16}$$

След това по теоремата за резидуумите получаваме

$$I_N(f;x)=\sum_{n=-N}^{N}\operatorname{Res} kF(f;x,k)|_{k=n}$$

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{\sin nx}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt=\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\pi}\sin nx\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt. \tag{1.17}$$

Сравнявайки (1.16) с (1.17) при $N\to\infty$ получаваме (1.3) за указания клас от функции. Ще получим отначало (1.17). Тъй като полюсите на функцията $kF(f;x,k)$ се определят от нулите на $\sin k\pi$ то за резидуума в $k=n$ имаме

$$\operatorname{Res} kF(f;x,k)|_{k=n}=\frac{1}{\pi\cos n\pi}\left[\int_x^\pi \sin n(t-\pi)f(t)\,dt+\sin n(x-\pi)\int_0^x \sin nt f(t)\,dt\right]$$

$$=\frac{\sin nx}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt. \tag{1.18}$$

Нека $k \in C_N$, тогава от (1.5), отчитайки, че

$$|\sin kx| \leq \exp(|\mathrm{Im}\, k|x) \quad k \in \mathbb{C},\ 0 \leq x \leq \pi \tag{1.19}$$

получаваме

$$|I_1| \leq K_\rho^{-1} \frac{1}{|k|^2} e^{-|\mathrm{Im}\, k|\pi} e^{|\mathrm{Im} k\, k|(\pi - x)} \int_0^x |f''(t)| e^{|\mathrm{Im}\, k|t}\, dt \leq C_\rho \frac{1}{|k|^2} \quad k \in C_N \tag{1.20}$$

където $C_\rho = K_\rho^{-1} \int_0^\pi |f''(t)|\, dt$. От тук и аналогичната оценка за $|I_2|$ имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{1}{k} \left(\int_0^\pi \Gamma(x,t,k) f''(t)\, dt \right) dk = O(\frac{1}{N}). \tag{1.21}$$

От тук, отчитайки,че

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{dk}{k} = 1, \tag{1.22}$$

получаваме (1.16).

Равномерната и абсолютна сходимост на реда (1.3) следва от равенствата

$$\int_0^\pi f(t) \sin nt\, dt = \frac{-1}{n^2} \int_0^\pi f''(t) \sin nt\, dt. \tag{1.23}$$

Твърдението (б) следва непосредствено от следващата теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

в.Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

Нека в пространството $L^2(0,\pi)$ е дадена пълна ортонормирана система

$$v_n(x),\ (v_n,v_m)=\delta_{nm}\quad n,m=1,2,\dots. \tag{1.24}$$

Имаме равенството

$$\|f-\sum_{n=1}^{\infty}a_nv_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2. \tag{1.25}$$

Дясната част на това равенство т.е.

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2,\quad a_n=\int_0^\pi f(x)v_n(x)\,dx. \tag{1.26}$$

се нарича равенство на Парсевал, а лявата - формула за разлагане по системата v_n. Сега ще покажем, че е в сила следната

Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$ Ако равенството на Парсевал е справедливо за функции $f(x)\in C^2[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$ то е в сила и за всяка функция $f(x)\in L^2(0,\pi)$.

Доказателство Действително, нека $f(x)\in L^2(0,\pi)$ и нека $f_k(x)$ е редица от гладки функции, които клонят към f по нормата на L^2, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^2}=0. \tag{1.27}$$

От (1.26) имаме

$$\int_0^\pi\{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n^{(k)}-a_n^{l)}\}^2,\quad a_n^{(k)}=\int_0^\pi f_k(x)v_n(x)\,dx. \tag{1.28}$$

От (1.26) имаме, че при $k,l\to\infty$ лявата страна в (1.28) клони към нула ,а следователно, и дясната. От неравенството на Коши–Буняковски следва, че

$$|a_n-a_n^{(l)}|\le\left\{\int_0^\pi\{f(x)-f_l(x)\}^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.29}$$

т.е. за всяко фиксирано $n=1,2,\dots$ съществува границата

$$\lim_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n. \tag{1.30}$$

От (1.28) имаме при фиксирано N

$$\sum_{n=1}^{N}\{a_n^{(k)}-a_n^{(l)}\}^2\le\int_0^\pi\{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx. \tag{1.31}$$

От тук при $k\to\infty$, отчитайки (1.30), получаваме

$$\sum_{n=1}^{N}\{a_n-a_n^{(l)}\}^2\le\int_0^\pi\{f(x)-f_l(x)\}^2\,dx. \tag{1.32}$$

Тъй като дясната страна не зависи от N, то при $N \to \infty$ имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{a_n - a_n^{(l)}\}^2 \leq \int_0^\pi \{f(x) - f_l(x)\}^2 \, dx, \tag{1.33}$$

откъдето, в частност, следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ е сходящ. По - нататък имаме

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2}| = |\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_n^{(l)})(a_n + a_n^{(l)})| \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_n^{(l)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + a_n^{(l)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.34}$$

Така получихме, че

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{1.35}$$

За да завършим доказателството остава да забележим, че от сходимостта в (1.27) следва, че

$$\lim_{l \to \infty} \|f_l\|^2 \equiv \int_0^\pi f_l^2(x) \, dx = \int_0^\pi f^2(x) \, dx \tag{1.36}$$

и следователно в равенството на Парсевал

$$\int_0^\pi f_l^2(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2} \tag{1.37}$$

можем да извършим граничен преход $l \to \infty$, с което доказахме (1.26) за всяка функция $f(x) \in L^2(0, \pi)$. Теоремата е доказана.

1.2. Регулярен оператор на Щурм - Лиувил.

Нека, както и в предишния параграф, $L^2(0,\pi)$ е хилбертовото пространство на квадратично–интегрируемите функции със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_0^\pi f(x)\overline{g}(x)\,dx \quad \|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

и нека $C^2[0,\pi]$ е множеството от два пъти непрекъснато диференцируемите функции, разглеждано като линейно многообразие в L^2. Централно място тук ще играе линейният оператор

$$L = -D^2 + q(x), \quad (Lf = -f''(x) + q(x)f(x), \quad f \in C^2[0,\pi]) \tag{2.2}$$

където $q(x)$ е реална, непрекъсната функция в интервала $[0,\pi]$. По -точно ще разглеждаме задачата за намиране решенията на уравнението

$$Ly = \lambda y \quad \Leftrightarrow \quad y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2.3}$$

удовлетворяващи граничните условия

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,\; y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0. \tag{2.4}$$

Тази задача се нарича регулярна задача на Щурм–Лиувил или регулярен оператор на Щурм–Лиувил.

Забележка. Към вида (2.3) се свежда по-общото уравнение

$$y'' + p(x)y' + \{l(x) + \lambda r(x)\}y = 0, \tag{2.6}$$

където функцията $r(x)$ е положителна в интервала $[0,\pi]$. Деиствително, ако $p(x)$ има непрекъсната първа производна, а $r(x)$ - непрекъсната втора производна, то уравнението (2.6) се свежда към каноническия вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \{\lambda + q(\xi)\}\eta = 0 \tag{2.7}$$

посредством *смяната на Лиувил*

$$\xi = \int_0^x \sqrt{r(t)}\,dt, \quad \eta(\xi) = \Phi(x)y(x), \quad \Phi(x) = \sqrt[4]{r(x)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x p(t)\,dt\right), \tag{2.8}$$

при това граничните условия (2.4) не изменят вида си. Нека още отбележим, че разглеждането на оператора L на интервала $[0,\pi]$ не е ограничение, тъй като смяната $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ преобразува интервала $[a,b]$ в интелвала $[0,\pi]$, при което не се изменя вида на граничната задача (2.3-4).

Дефиниция Ако при някое λ_1 граничната задача (2.3-4) има нетривиално решение $y(x,\lambda_1) \neq 0$ то числото λ_1 се нарича **собствено число**, а съответното решение $y(x,\lambda_1)$ - **собствена функция** на граничната задача (2.3-4).

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са два пъти непрекъснато– диференцируеми функции, т. е. $f, g \in C^2[0, \pi]$. Интегрирайки два пъти по части, получаваме **равенството на Грин**

$$\int_0^\pi Lf(x).g(x)\,dx = W(f,g)(\pi) - W(f,g)(0) + \int_0^\pi f(x).Lg(x)\,dx, \tag{2.9}$$

където **Вронскиана**

$$W(f,g)(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x). \tag{2.10}$$

Нека $f = y(x, \lambda_1)$ и $g = y(x, \lambda_2)$ са собствени функции, отговарящи на собствените числа λ_1, λ_2. От граничните условия (2.4) следва, че $W(f, \bar{g})(\pi) = Wf, \bar{g})(0) = 0$. От тук, вследствие на (2.9), получаваме

$$(\lambda_1 - \overline{\lambda}_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1)\overline{y(x, \lambda_2)}\,dx = 0, \quad (Ly(x, \lambda_j) = \lambda_j y(x, \lambda_j), j = 1, 2.) \tag{2.11}$$

Лема 2.1. Собствените значения на граничната задача (2.3), (2.4) са реални, при това собствените функции $y(x, \lambda_1)$ и $y(x, \lambda_2)$, отговарящи на различни собствени числа са ортогонални, т.е.

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1)\overline{y(x, \lambda_2)}\,dx = 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{2.12}$$

Забележка. Твърденията в тази лема са добре известни свойства на самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство.

Доказателство. Нека $\lambda_1 = u + iv$ е комплексно собствено число. Тъй като функцията $q(x)$ е реална, а също α и β са реални числа, то числото $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = u - iv$ също е собствено значение със съответна собствена функция $\bar{y}(x, \lambda_2)$. В този случай равенството (2.11) дава

$$2iv \int_0^\pi |y(x, \lambda)|^2\,dx = 0, \tag{2.13}$$

т.е. $\mathrm{Im}k\,\lambda \equiv v = 0$. От тук (2.12) следва директно от (2.11), с което лемата е доказана.

2. Нека положим $\operatorname{cotg}\alpha = -h, \operatorname{cotg}\beta = H$, където предполагаме, че h, H са крайни. Тогава граничните условия (2.4) се записват във вида

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{2.13a}$$

За краткост оператора на Щурм–Лиувил $(2.3), (2.13a)$ ще означаваме с $\hat{q} = \{q(x), h, H\}$. (Ако числото $h(H) = \infty$, за съответното гранично условие полагаме $y(0) = 0 (y(\pi) = 0)$.)

Нека означим с $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ решенията на уравнението (2.3), удовлетворяващи началните условия

$$\varphi(x,\lambda) : \varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h \tag{2.13aa}$$

и

$$\psi(x,\lambda) : \psi(\pi,\lambda) = 1,\ \psi'(\pi,\lambda) = -H. \tag{2.13aaa}$$

Характеристичната функция се дава с израза

$$\omega(\lambda) = W(\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)) = \varphi'(\pi,\lambda) + H\varphi(\pi,\lambda) = h\psi(0,\lambda) - \psi'(0,\lambda). \tag{2.14}$$

Ще докажем следната лема.

Лема 2.2 λ_n е собствено число тогава и само тогава, когато

$$\omega(\lambda_n) = 0. \tag{2.15}$$

При това

$$\|\varphi(\lambda_n)\|^2 = -\varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n), \quad (\dot{} = \partial/\partial\lambda) \tag{2.16}$$

откъдето, в частност, следва, че собствените числа са прости нули на $\omega(\lambda)$, т.е.

$$\dot{\omega}(\lambda_n) \neq 0. \tag{2.17}$$

Забележка: кратност на собствено число. Броят на линейно–независимите решения на задачата на Щурм–Лиувил се нарича кратност на собственото значение. Просто собствено значение имаме, ако само едно решение на уравнението (2.3) удовлетворява граничните условия (2.4). Тъй като уравнението е от втори ред то можем да имаме най–много двукратно собствено значение (в. ж., например, §5.) Ще покажем, че при граничните условия (2.4) собствените значения са прости. Действително, нека $s(x,\lambda)$ е решение, удовлетворяващо началните условия $s(0,\lambda) = 0, s(x,\lambda)$. Тъй като $W(\varphi, s) = 1$ то общото решение на уравнението (2.3) е $y(x,\lambda) = C_1\varphi(x,\lambda) + C_2 s(x,\lambda)$, откъдето $y(0,\lambda) = C_1$, $y'(0,\lambda) = C_1 h + C_2$ и следователно условието $y'(0) - hy(0) = 0$ дава $C_1 h + C_2 - hC_1 = 0$, т.е. $C_2 = 0$, което и трябваше да покажем.

Кратността на нулите на характеристичната функция $\omega(\lambda)$ се нарича алгебрична кратност на съответните собствените значения.

Доказателство Нека $\varphi(x,\lambda_n) = C_n\psi(x,\lambda_n)$, тогава $\omega(\lambda_n) = 0$ и обратно, ако $\omega(\lambda_n) = 0$ то $\varphi(x,\lambda_n) = C_n\psi(x,\lambda_n)$. От последното равенство при $x = \pi$ получаваме

$$C_n = \varphi(\pi,\lambda_n) \neq 0. \tag{2.17a}$$

Неравенството $\varphi(\pi,\lambda_n) \neq 0$ може да се установи по следния начин: от (2.15) имаме $\varphi'(\pi,\lambda_n) + H\varphi(\pi,\lambda_n) = 0$, следователно ако допуснем, че $\varphi(\pi,\lambda_n) = 0$ то и $\varphi'(\pi,\lambda_n) = 0$, откъдето получаваме, че $\varphi(\pi,\lambda_n) \equiv 0$, което противоречи на началните условия (2.13аа).

За да получим формулата (2.16) отначало ще отбележим, че непосредствено от уравнението (2.3) имаме тъждеството

$$\frac{d}{dx}W(y(x,\lambda), z(x,\mu)) = (\lambda - \mu)y(x,\lambda)z(x,\mu). \tag{2.18}$$

Нека в последното равенство положим $\lambda = \lambda_n$, $y = \varphi(x, \lambda_n)$, $z = \varphi(x, \mu)$. Интегрирайки от 0 до π имаме

$$\frac{\varphi(\pi, \lambda_n)(\varphi'(\pi, \mu) + H\varphi(\pi, \mu))}{\lambda_n - \mu} = \int_0^\pi \varphi(x, \lambda_n)\varphi(x, \mu)\, dx, \tag{2.19}$$

където отчетохме, че $W(\varphi(0, \lambda_n), \varphi(0, \mu)) = 0$ и $\varphi'(\pi, \lambda_n) = -H\varphi(\pi, \lambda_n)$. Последното равенство можем да запишем във вида

$$\frac{\varphi(\pi, \lambda_n)(\omega(\mu) - \omega(\lambda_n))}{\lambda_n - \mu} = (\varphi(\lambda_n), \varphi(\mu)). \tag{2.20}$$

Устремявайки $\mu \to \lambda_n$ получаваме исканото равенство (2.16). Лемата е доказана.

1.3. Съществуване и асимптотики на собствените числа и собствените функции.

Нека $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ са решенията на уравнението $Ly = \lambda y$, удовлетворяващи началните условия $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = h$ и $\psi(\pi,\lambda) = 1$, $\psi'(\pi,\lambda) = -H$, съответно.

Непосредствено се проверява, че за $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ имаме следните интегрални уравнения:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + h\frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)\varphi(t,k)\,dt, \quad \lambda = k^2 \tag{3.1}$$

и

$$\psi(x,\lambda) = \cos k(x-\pi) - H\frac{\sin k(x-\pi)}{k} + \int_x^\pi \frac{\sin k(t-x)}{k} q(t)\psi(t,k)\,dt. \tag{3.2}$$

Важно място в нашите по–нататъшни построения играе следната теорема.

Теорема 3.1. а. При всяко $x \in [0,\pi]$ решенията $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ са аналитични (цели) функции от λ.

б. Равномерно по $0 \le x \le \pi$ и $k \in \mathbb{C}$ имаме оценките

$$\varphi(x,\lambda) = O(e^{|\mathrm{Im}k|x}), \quad \psi(x,\lambda) = O(e^{|\mathrm{Im}k|(\pi-x)|}), \quad \tau = \mathrm{Im}k\ k,\ \lambda = k^2. \tag{3.3}$$

в. При $|k| \to \infty$ равномерно по $x \in [0,\pi]$ са справедливи асимптотиките

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + O(\frac{e^{|\mathrm{Im}k|x}}{|k|}), \tag{3.4}$$

$$\psi(x,\lambda) = \cos k(x-\pi) + O(\frac{e^{|\mathrm{Im}k|(\pi-x)}}{|k|}). \tag{3.5}$$

и

$$\varphi'(x,\lambda) = -k\sin kx + O(e^{|\mathrm{Im}k|x}), \tag{3.6}$$

$$\psi'(x,\lambda) = -k\sin k(x-\pi) + O(e^{|\mathrm{Im}k|(\pi-x)}). \tag{3.7}$$

(Последните равенства показват, че асимптотиките (3.4), (3.5) допускат диференциране по x.)

Доказателство. Твърдението **а** е добре известен факт, че ако коефициентите на линейно диференциално уравнение са цели функции от λ то решението на задачата на Коши с начални данни, независещи от λ е цяла функция от $\lambda \in \mathbb{C}$. Просто доказателство на твърдението **а** ще получим от следващото доказателство на **б**.

Твърдението **б** ще получим с *метода на последователните приближения.* Нека положим

$$\varphi_0(x) = \cos kx + h\frac{\sin kx}{k}, \tag{3.8}$$

и

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)\varphi_{n-1}(t)\,dt,\ n = 1, 2, \ldots. \tag{3.9}$$

Тъй като

$$|\cos kx| \leq e^{|\mathrm{Im}k|x}, \quad ,|\frac{\sin kx}{k}| \leq \frac{1}{|k|}e^{|\mathrm{Im}k|x}, \quad |\frac{\sin kx}{k}| \leq xe^{|\mathrm{Im}k|x}, \quad (x \geq 0) \tag{3.9a}$$

то

$$|\varphi_0(x)| \leq Me^{|\mathrm{Im}k|x}, \quad |\sin k(x-t)/k| \leq Ce^{|\mathrm{Im}k|(x-t)}, 0 \leq t \leq x \leq \pi, \tag{3.10}$$

където константите M и C не зависят от x и k. За да получим последната оценка в (3.9a) използваме, че

$$|\frac{\sin kx}{k}e^{ikx}| = |\int_0^x e^{2ikt}\,dt| \leq x, \quad \mathrm{Im}k \geq 0,\ x \geq 0. \tag{3.10a}$$

От (3.10) имаме

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leq CMe^{|\mathrm{Im}k|x}\int_0^x |q(t)|\,dt = CMj(x)e^{|\mathrm{Im}k|x}, \quad j(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt. \tag{3.11}$$

По индукция получаваме, че ако

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq \frac{C^n Mj^n(x)e^{|\mathrm{Im}k|x}}{n!} \tag{3.12}$$

то

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| =| \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)\{\varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t)\,dt\ |\leq$$

$$\frac{C^{n+1}Me^{|\mathrm{Im}k|x}}{n!}\int_0^x |q(t)|j^n(t)\,dt = \frac{C^{n+1}Me^{|\mathrm{Im}k|x}}{n!}\int_0^x j'(t)j^n(t)\,dt = \frac{C^{n+1}Mj^{n+1}(x)e^{|\mathrm{Im}k|x}}{(n+1)!}. \tag{3.13}$$

Следователно итерационния процес е сходящ и граничната функция

$$\varphi(x, \lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \tag{3.14}$$

е решение на уравнението (2.3), удовлетворяващо началните условия (2.13aa). При това за $\varphi(x, \lambda)$ е справедлива оценката

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq Me^{Cj(x)+|\mathrm{Im}k|x}, \quad (0 \leq x \leq \pi,\ k \in \mathbb{C}). \tag{3.14a}$$

За да получим последното неравенство остава да отбележим, че от равенството

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + \ldots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)), \tag{3.14b}$$

отчитайки (3.10)-(3.12), имаме

$$|\varphi_n(x)| \leq Me^{\tau|x}\sum_{k=1}^{n}\frac{C^k j^k(x)}{k!} \leq Me^{\tau|x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k j^k(x)}{k!} = Me^{Cj(x)+|\mathrm{Im}k|x}. \tag{3.14c}$$

в. Използвайки тази оценка и неравенствата (3.29а),(3.10) получаваме асимптотиката (3.4) непосредствено от интегралното уравнение (3.1). Имаме

$$|\varphi(x,\lambda)-\cos kx| \leq \frac{|h|}{|k|}e^{|\mathrm{Im}k|x} + \frac{C}{|k|}\int_0^x e^{|\mathrm{Im}k|(x-t)}|q(t)||\varphi(t,\lambda)|\,dt \leq$$

$$\frac{e^{|\mathrm{Im}k|x}}{|k|}\left(|h| + MC\int_0^x |q(t)|e^{Cj(t)}\,dt\right) \leq \frac{1}{|k|}e^{|\mathrm{Im}k|x}\left(|h| + Me^{Cj(x)}\right) = O(\frac{e^{|\mathrm{Im}k|x}}{|k|}).$$

Втората оценка в (3.3) и асимптотиката (3.5) се извеждат аналогично от (3.2).

Нека продиференцираме (3.1) по x:

$$\varphi'(x,\lambda) = -k\sin kx + h\cos kx + \int_0^x \cos k(x-t)q(t)\varphi(t,k)\,dt \tag{3.14d}$$

От тук асимптотиката (3.6) се получава като следствие на оценките (3.3) и (3.14а).

Накрая ще отбележим, че от (3.14) следва твърдението **а**, тъй като при фиксирано x редицата $\varphi_n(x,\lambda)$, $n = 0, 1, \ldots$ е редица от аналитични (цели) функции от λ, равномерно сходяща във всяка ограничена област в $\mathbb{C}$. От тук съгласно теоремата на Вайерщрас за равномерно сходящи редици от аналитични функции следва, че $\varphi(x,\lambda)$ е аналитична (цяла) функция. $\square$

Забележка Ако съществуването на решенията $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ на интегралните уравнения (3.1)и (3.2) е известно, то оценките (3.3) се получават лесно със следната лема, известна като

Лема 3.2. Неравенство на Белман- Гронуол. Нека $h(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни функции $0 \leq x \leq X$, при това $h(x)$ е непрекъсната и $g(x)$ интегрируема. Тогава, ако

$$h(x) \leq C + \int_0^x g(t)h(t)\,dt, \quad 0 \leq x \leq X \tag{3.15}$$

то

$$h(x) \leq C\exp(\int_0^x g(t)\,dt). \tag{3.16}$$

Доказателство Полагаме

$$y(x) = \int_0^x g(t)h(t)\,dt. \tag{3.17}$$

От (3.15) получаваме

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(x) \leq Cg(x) + g(x)y(x). \tag{3.18}$$

Тъй като

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)e^{-\int_0^x g(t)\,dt}\right\} = y'(x)e^{-\int_0^x g(t)\,dt} - y(x)g(x)e^{-\int_0^x g(t)\,dt}, \tag{3.19}$$

(3.18) можем да запишем във вида

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)e^{-\int_0^x g(t)\,dt}\right\} \leq Cg(x)e^{-\int_0^x g(t)\,dt}. \tag{3.20}$$

Интегрирайки от 0 до x получаваме

$$y(x) \leq Ce^{\int_0^x g(t)\,dt} - C, \tag{3.21}$$

което заедно с (3.15) дава

$$h(x) \leq y(x) + C \leq Ce^{\int_0^x g(t)\,dt}, \tag{3.22}$$

което и трябваше да докажем.

Сега за да получим първата оценка в (3.3) полагаме

$$\varphi(x, \lambda) = e^{|\mathrm{Im} k|x} f(x). \tag{3.23}$$

Тогава от (3.1) имаме

$$f(x) = \{\cos kx + h\frac{\sin kx}{k}\}e^{-|\mathrm{Im} k|x} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} e^{-|\mathrm{Im} k|(x-t)} q(t) f(t)\,dt. \tag{3.24}$$

От тук, полагайки $g(x) = C|q(x)|$, получаваме от (3.24) неравенството

$$f(x) \leq M + \int_0^x g(t) f(t)\,dt,$$

което вследствие неравенството на Белман–Гронуол дава исканата оценка в (3.3).

Съществуване на собствени значения. Нека сега се върнем към задачата на Щурм–Лиувил

$$y'' + (\lambda - q(x))y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{2.3}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{2.13a}$$

Тук отначало ще докажем следната

Лема 3.3 за съществуване на собствени числа. Собствените значения λ_n на задачата на Щурм–Лиувил (2.3), (2.13a) са прости и можем да наредим в нарастваща редица

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n < \ldots, \tag{3.25}$$

за която

$$\lambda_n \sim n^2 + O(1), \quad n \to \infty. \tag{3.25a}$$

Доказателство. Както вече показахме в §1.2 собствените значения λ_n на задачата (2.3), (2.13a) са прости, реални и се определят от нулите на характеристичната функция

$$\omega(\lambda) = W(\psi, \varphi) = h\psi(0, \lambda) - \psi'(0, \lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) \tag{3.26}$$

Непосредствено от теорема 3.1 **a** получаваме, че $\omega(\lambda)$ е аналитична функция от λ и, следователно, нулите ѝ λ_n нямат крайна точка на сгъстяване.

По–нататък от асимтотиките (3.4),(3.6) имаме

$$\omega(k^2) = -k \sin k\pi + O(^{|\mathrm{Im} k|\pi}), \quad |k| \to \infty. \tag{3.26a}$$

От тук при реални λ, където $\lambda \to +\infty$, имаме асимптотиката

$$\omega(\lambda) = -k \sin k\pi + O(1), \quad (k = \sqrt{\lambda}), \tag{3.27}$$

а при $\lambda \to -\infty$–асимптотиката

$$\omega(\lambda) = -i\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{|\lambda|}\pi + O(e^{\sqrt{|\lambda|}\pi}). \tag{3.28}$$

От (3.27) следва, че при положителни $\lambda \to +\infty$ уравнението $\omega(\lambda) = 0$ се свежда до уравнението

$$-k \sin k\pi + O(1) = 0, \quad k = \sqrt{\lambda} \to \infty. \tag{3.29}$$

Последното очевидно има решения $k_n : k_n^2 = \lambda_n$, които са в околност на точките $k_n^2 = n^2$,т.е. $\lambda_n \sim n^2$, $n \to \infty$. От (3.28) следва, че при $\lambda \to -\infty$ уравнението $\omega(\lambda) = 0$ няма решения, т.е. собствените значения λ_n са ограничени отдолу. Лемата е доказана.

Въпросът за броя на собствените числа, т.е. доколко можем да ги номерираме така, че да бъде изпълнена асимптотиката (3.25) се решава по-сложно.

Имаме следната

Лема 3.4. Нека положим

$$\omega_1(k) = \omega(\lambda), \quad \lambda = k^2. \tag{3.30}$$

При достатъчно големи N във всеки кръг с радиус $N + 1/2$ броят на нулите на $\omega_1(k)$ е равен на броя на нулите на $k \sin k\pi$ т.е. $2(N+1)$. (Тъй като функцията $\omega_1(k)$ е четна то броя на нулите на $\omega(\lambda)$ е $N + 1$.)

Преди да докажем тази лема ще напомним следната известна теорема от комплексния анализ:

Теорема на Руше (вж. например, [....]) Нека $f(z)$ и $g(z)$ са аналитични функции в областта D и на границата ѝ Γ. Тогава ако $|g(z)| < |f(z)|$ при $z \in \Gamma$ то в D функциите $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имат еднакъв брой нули.

Доказателството на лема 3.4. Нека запишем

$$\omega_1(k) = -k \sin k\pi + (\omega_1(k) + k \sin k\pi). \tag{3.30a}$$

и нека положим $f(k) = -k \sin k\pi$, $g(k) = \omega_1(k) + k \sin k\pi$ и $\Gamma = C_N$, където C_N е окръжност с радиус $N + 1/2$. Непосредствено от (3.26а)следва оценката $|g(k)| \leq M \exp(|\mathrm{Im} k|\pi)$, $k \in \mathbb{C}$. Отчитайки лема 1.1 получаваме, че при достатъчно големи N

$$\frac{|g(k)|}{|f(k)|} \leq M_\rho \frac{1}{|k|}, \quad k \in C_N. \tag{3.30b}$$

От тук, съгласно теоремата на Руше, следва твърдението на лемата.□

В края на този параграф ще отбележим, че ако функцията $q(x)$ е непрекъснато–диференцируема: $q(x) \in C^1[0, \pi]$ може да бъде доказана следната

Теорема 3.2. (в.ж., например, [Левитан, Саргсян]) Имаме асимптотиките

$$\lambda_n = n^2 + \frac{2}{\pi}(h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)\,dx) + o(1) \quad n \to \infty, \tag{3.31}$$

$$\varphi_n(x) = \varphi(x, \lambda_n) = \cos nx + O(\frac{1}{n}), \qquad n \to \infty, \tag{3.32}$$

$$\alpha_n = \| \varphi_n \|^{-2} = \frac{2}{\pi} + O(\frac{1}{n^2}), \qquad n \to \infty. \tag{3.33}$$

1.4. Функция на Грин за задачата на Щурм-Лиувил. Формули за разлагане по собствените функции.

Нека разгледаме задачата на Щурм–Лиувил (2.3), (2.13а):

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{4.-1}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{4.-2}$$

В предходните два параграфа показахме, че за тази задача съществува ортонормирана система от собствени функции

$$u_n(x) = \varphi_n(x) \parallel \varphi_n \parallel^{-1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.-3}$$

$$(u_n, u_m) = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \ldots, \tag{4.-4}$$

където

$$\|\varphi(\lambda_n)\|^2 = -\varphi(\pi, \lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n). \tag{4.-5}$$

Ще отбелижим, че от съотношенията за ортогоналност следва, че ако за функция $f(x)$ е справедливо разложение от вида (4.-6) то коефициентите c_n се определят еднозначно по формулата $c_n = (f, \varphi_n)$.

Основният резултат тук е доказателството на следната

Теорема 4.1. Теорема за разлагане по собствените функции на задачата на Щурм–Лиувил.

а. За всяка два пъти диференцируема функция $f(x) \in C^2[0, \pi]$ и такава, че $f'(0) - hf(0) = 0$, $f'(\pi) + Hf(\pi) = 0$ е справедливо разложението

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x), \quad c_n = (f, \varphi_n), \tag{4.-6}$$

където редът е равномерно и абсолютно сходящ при $0 \leq x \leq \pi$.

б. Ако $f(x) \in L^2(0, \pi)$ в разложението (4.-6) сходимостта е по нормата на $L^2(0, \pi)$:

$$\lim_{N \to \infty} \|f - \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n\| = 0, \tag{4.-7}$$

което е еквивалентно на равенството на Парсевал

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c|_n^2, \tag{4.-8}$$

т. е.

$$\|f - \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{\infty} |c|^2_. \tag{4.-9}$$

Доказателството ще получим със сходни с тези на доказателството на Теоремата на Фурие от §1 построения.

Нека
$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & x\le t\le\pi,\\ \psi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda), & 0\le t\le x\end{cases}\tag{4.1}$$
и нека
$$F(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\,dt,\quad f\in L^2[0,\,\pi].\tag{4.2}$$

Функцията $G(x,t,\lambda)$ се нарича функция на Грин за задачата на Щурм–Лиувил $\hat{q}=\{q(x),h,H\}$. Основните ѝ свойства се дават със следната

Теорема 4.2. Функцията $y=F(x,\lambda)$, $(\lambda\ne\lambda_n)$ е решение на нееднородната задача
$$y''+(\lambda-q(x))y=-f(x),\;0\le x\le\pi,\tag{4.3}$$
$$y'(0)-hy(0)=0,\;y'(\pi)+Hy(\pi)=0,\tag{4.4}$$
при това за всяка функция $f(x)\in C^2[0,\,\pi]$, удовлетворяваща граничните условия (4.4), имаме равенството
$$\int_0^\pi G(x,t,\lambda)(L-\lambda)f(t)\,dt=f(x).\quad (L=-D^2+q(t))\tag{4.5}$$

Доказателство. Имаме
$$F(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^x\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt=I_1(x)+I_2(x),\tag{4.6}$$
откъдето
$$I_1'(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\psi'(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{1}{\omega(\lambda)}\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)f(x)$$
$$I_2'(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi'(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt-\frac{1}{\omega(\lambda)}\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)f(x).$$
Събирайки последните две равенства получаваме
$$F'(x,\lambda)=I_1'+I_2'=\frac{1}{\omega(\lambda)}\psi'(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt+\frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi'(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt.\tag{4.7}$$
Следователно
$$F(0,\lambda)=\frac{\varphi(0,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt,\quad F'(0,\lambda)=\frac{\varphi'(0,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt,\tag{4.8a}$$
$$F(\pi,\lambda)=\frac{\psi(\pi,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt,\quad F'(\pi,\lambda)=\frac{\psi'(\pi,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi\varphi(t,\lambda)f(t)\,dt,\tag{4.8b}$$
откъдето, отчитайки началните условия (2.13аа) и (2.13ааа) за решенията $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$, получаваме, че
$$F'(0,\lambda)-hF(0,\lambda)=\frac{\varphi'(0,\lambda)-h\varphi(0,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\,dt=0,\tag{4.8a}$$

$$F'(\pi,\lambda) + HF(\pi,\lambda) = \frac{\psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda)}{\omega(\lambda)} \int_0^\pi \varphi(t,\lambda) f(t)\, dt = 0, \tag{4.8b}$$

с което показахме, че функцията $F(x,\lambda)$ удовлетворява граничните условия (4.4).

По–нататък от (4.7) имаме

$$F''(x,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\psi''(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)f(t)\,dt + \frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi''(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)f(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\omega(\lambda)}\{\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\}f(x) =$$

$$\frac{1}{\omega(\lambda)}\psi''(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)f(t)\,dt + \frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi''(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)f(t)\,dt - f(x), \tag{4.9}$$

където в последното равенство използвахме, че

$$\omega(\lambda) = W(\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)) = \psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda).$$

От (4.9), отчитайки че $\psi'' = (q(x)-\lambda)\psi, \quad \varphi'' = (q(x)-\lambda)\varphi$, получаваме

$$F''(x,\lambda) = (q(x)-\lambda)\{\frac{\psi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^x \varphi(t,\lambda)f(t)\,dt + \frac{\varphi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_x^\pi \psi(t,\lambda)f(t)\,dt\} - f(x) =$$

$$= (q(x)-\lambda)F(x,\lambda) - f(x), \tag{4.10}$$

с което доказахме, че функцията $= F(x,\lambda)$ удовлетворява (4.3). Равенството (4.5) се доказва аналогично и оставяме на читателя. □

Преди да докажем теорема 4.1 ще приведем една лема, аналогична на лема 1.1.

Лема 4.1. Нека имаме аналитична функция $f(z),\ z \in \mathbb{C}$, за която при $|z| \to \infty$ е справедлива асимптотиката

$$f(z) = \sin \pi z + O\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} k|\pi}}{|z|}\right). \tag{4.11}$$

Тогава при достатъчно големи $R > 0$ при $z \in Z_{\rho,R}$, където $Z_{\rho,R}$ е областта, която се получава като от външността на кръга $|z| > R$ махнем кръгчетата $C_\rho(n)$: $|z-n| < \rho,\ \rho < 1/2$, е справедлива оценката

$$\frac{1}{|f(z)|} \le Ce^{-|\mathrm{Im} kz|\pi}, \quad (z \in Z_{\rho,R}). \tag{4.12}$$

При това при $|z| \to \infty$ и $z \in Z_{\rho,R}$ е справедлива асимптотиката

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\sin \pi z} + O\left(\frac{e^{-|\mathrm{Im} k|\pi}}{|z|}\right). \tag{4.13}$$

Доказателство. Нека напомним, че в лема 1.1 получихме оценката

$$\frac{1}{|\sin \pi z|} \leq C_\rho \exp(-|\mathrm{Im}k\, z|\pi) \quad z \in Z_\rho, \tag{4.14}$$

От тук следва, че при $z \in Z_{\rho,R}$ имаме

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\sin \pi z + O(z^{-1}\exp(|\mathrm{Im}k \pi z|)} =$$

$$= \frac{1}{\sin \pi z(1 + O(|z \sin \pi z|^{-1}\exp(|\mathrm{Im}k \pi z|))} =$$

$$= \frac{1}{\sin \pi z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \sin \pi z + O\left(\frac{1}{|z|}e^{-|\mathrm{Im}k\pi z|}\right). \tag{4.15}$$

Оценката (4.12) следва директно от (4.13) и (4.14).□

От тук получаваме

Следствие. За функцията на Грин (4.1), равномерно по $0 \leq x, t \leq \pi$ и $k \in Z_{\rho,R}$, имаме оценката

$$G(x, t, k^2) = O(|k|^{-1}), \tag{4.16}$$

и при $|k| \to \infty$, $k \in Z_{\rho,R}$–асимптотиката

$$G(x, t, \lambda) = \frac{1}{-k \sin \pi k}\begin{cases} \cos kx \cos k(t - \pi), & x \leq t \leq \pi, \\ \cos k(x - \pi) \cos kt, & 0 \leq t \leq x \end{cases}$$

$$+ \left(\frac{1}{|k|^2}\begin{cases} e^{-|\mathrm{Im}k|(t-x)}, & x \leq t \leq \pi, \\ e^{-|\mathrm{Im}k|(x-t)}, & 0 \leq t \leq x \end{cases}\right). \tag{4.17}$$

Доказателство. Оценката (4.16)е директно следствие на асимптотиката (4.17)

и оценката (4.14). За да получим (4.17) отначало ще отбележим, че от асимптотиките (3.4), (3.6) следва, че за характеристичната функция $\omega(\lambda)$ имаме

$$\omega(k^2) = -k \sin k\pi + O(^{|\mathrm{Im}k|\pi}), \quad |k| \to \infty. \tag{4.18}$$

От тук, вследствие на лема 4.1, имаме асимптотиката

$$\frac{1}{\omega(k^2)} = \frac{-1}{k \sin k\pi} + O(\frac{^{|\mathrm{Im}k|\pi}}{|k|^2}), \quad k \in Z_{\rho,R}, \tag{4.19}$$

която заедно с асимптотиките (3.4), (3.5) дава (4.17). □

Доказателството на теорема 4.1 ще проведем със сходен с тези за реда на Фурие начин. Нека имаме функция $f(x) \in C^2[0, \pi]$, удовлетворяваща граничните условия (4.-2). Нека C_N е окръжност в k–равнината с радиус $N + 1/2$, където N е достатъчно голямо, така че окръжността C_N лежи в $Z_{\rho,R}$. Нека $\lambda = k^2$, тогава образът на окръжността C_N е окръжност $\tilde{C}_N$ с радиус $(N + 1/2)^2$. Както показахме в лема 3.4 във вътрешността на $\tilde{C}_N$ има $N+1$ собствени значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Нека по f построим функцията (4.2) и разгледаме контурния интеграл

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}_N} F(x,\lambda)\,d\lambda == \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} F(x,k^2)k\,dk, \tag{4.20}$$

където C_N и $\tilde{C}_N$ се обхождат един път в положителна посока. По теоремата на резидиуумите, отчитайки лема 2.2, получаваме

$$I_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Res}\{\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\,dt\}|_{\lambda=\lambda_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\varphi(t,\lambda_n)\,dt = -\sum_{n=0}^{N} c_n u_n(x) = -\sigma_N(x). \tag{4.21}$$

Нека сега пресметнем непосредствено $I_N(x)$ по окръжността C_N. За целта ще запишем (4.5) във вида

$$F(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\,dt = -\frac{f(x)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi G(x,t,\lambda)g(t)\,dt, \tag{4.22}$$

където $g(x) = Lg(x) = -f''(x) + q(x)f(x)$. Следователно

$$I_N(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} F(x,k^2)k\,dk$$

$$= \frac{f(x)}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{dk}{k} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\left\{\int_0^\pi G(x,t,\lambda)g(t)\,dt\right\}\frac{d\,k}{k} = I_{1,N}(x) + I_{2,N}(x). \tag{4.23}$$

От оценката (4.16) имаме

$$|I_{2,N}(x)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_N}\int_0^\pi |G(x,t,\lambda)||g(t)|\,dt\frac{|d\,k|}{|k|} \le C\int_{C_N}\frac{|d\,k|}{|k|^2} = O(\frac{1}{N}). \tag{4.24}$$

От тук, отчитайки, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{dk}{k} = 1,$$

получаваме

$$I_N(x) = -f(x) + O(\frac{1}{N}). \tag{4.25}$$

Сравнявайки (4.21) получаваме при $N \to \infty$ формулата за разлагане (4.-6). Твърдението bf б се доказва както и в случая на ред на Фурие с теоремата за попълване по норма в L^2. □

1.5. Периодични гранични условия.

В този параграф ще разгледаме спектралните задачи, определяни от уравнението

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \tag{5.1}$$

и граничните условия

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi), \tag{5.2}$$

а също и граничните условия

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi). \tag{5.3}$$

Първата задача се нарича задача на Щурм-Лиувил с периодични гранични условия, а втората - с антипериодични гранични условия. Тук ще изложим накратко и задачата с нулеви гранични условия

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \le x \le \pi \tag{5.4}$$

и граничните условия

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{5.5}$$

свойствата на която, както е добре известно, са тясно свързани с периодичните задачи.

Нека въведем решенията

$$c(x,\lambda): \quad c(0,\lambda) = 1,\ c'(0,\lambda) = 0, \tag{5.6}$$

$$s(x,\lambda): \quad s(0,\lambda) = 0,\ s'(0,\lambda) = 1. \tag{5.7}$$

Ще отбележим, че Вронскиана

$$W(c(x,\lambda), s(x,\lambda)) = c(0,\lambda)s'(0,\lambda) - c'(0,\lambda)s(0,\lambda) = 1. \tag{5.8}$$

аналогично въвеждаме и решенията

$$\tilde{c}(x,\lambda): \quad \tilde{c}(\pi,\lambda) = 1,\ \tilde{c}'(\pi,\lambda) = 0, \tag{5.9}$$

$$\tilde{s}(x,\lambda): \quad \tilde{s}(\pi,\lambda) = 0,\ \tilde{s}'(\pi,\lambda) = 1, \tag{5.10}$$

където

$$W(\tilde{c}(x,\lambda), \tilde{s}(x,\lambda)) = 1. \tag{5.11}$$

Тъй като всяка от системите решения $c(x,\lambda), s(x,\lambda)$ и $\tilde{c}(x,\lambda), \tilde{s}(x,\lambda)$ е фундаментална то имаме представянията

$$\tilde{c}(x,\lambda) = s'(\pi,\lambda)c(x,\lambda) - c'(\pi,\lambda)s(x,\lambda), \tag{5.12}$$

$$\tilde{s}(x,\lambda) = -s(\pi,\lambda)c(x,\lambda) + c(\pi,\lambda)s(x,\lambda). \tag{5.13}$$

и обратно

$$c(x,\lambda) = \tilde{s}'(0,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda) - \tilde{c}'(0,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda), \tag{5.14}$$

$$s(x,\lambda) = -\tilde{s}(0,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda) + \tilde{c}(0,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda). \tag{5.15}$$

Нека сега разгледаме нееднородната задача

$$\Phi'' + (\lambda - q(x))\Phi = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{5.16}$$

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0, \tag{5.17}$$

Ще напомним, че намирането на решението $\Phi(f;x,\lambda) = \Phi(x,\lambda)$ се свежда до построяването на съответната функция на Грин $G(x,y,\lambda)$, която удовлетворява следните условия:

1. При всяко λ, което не е собствено значение, функцията $G(x,y,\lambda)$ е непрекъсната при $0 \le x,y \le \pi$, при това $G'_x(x,y,\lambda)$ и $G''_{xx}(x,y,\lambda)$ са непрекъснати по x,y в триъгълниците $0 \le y \le x, \le x \le y < \pi$.

2.$G'_x(y+0,y,\lambda) - G'_x(y-0,y,\lambda) = 1$

3.$G(x,y,\lambda)$ по x при $x \ne y$ удовлетворява уравнението (5.1): $G''_{xx}+(\lambda-q(x))G = 0$.

3.$G(x,y,\lambda)$ по x удовлетворява граничните условия (5.5), т.е.

$$G(0,y,\lambda) = 0, \quad G(\pi,y,\lambda) = 0, \quad 0 \le y \le \pi. \tag{5.18}$$

Тогава решението на нееднородната задача (5.16), (5.17) се дава с формулата

$$\Phi(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,y,\lambda)f(y)\,dy, \tag{5.19}$$

където

$$G(x,y,\lambda) = \frac{1}{s(\pi,\lambda)}\left\{\begin{array}{ll} s(x,\lambda)\tilde{s}(y,\lambda) & x \le y \le \pi \\ \tilde{s}(x,\lambda)s(y,\lambda) & 0 \le y \le x, \end{array}\right. . \tag{5.20}$$

За да построим така указаната функция на Грин нека напомним, че ако въведем функцията

$$K(x,y,\lambda) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & x \le y \le 1 \\ s(x,\lambda)c(y,\lambda) - c(x,\lambda)s(y,\lambda), & 0 \le y \le x. \end{array}\right. , \tag{5.21}$$

то функцията

$$F(x,\lambda) = \int_0^x K(x,y,\lambda)f(y)\,dy \tag{5.22}$$

е едно частно решение на нееднородното уравнение (5.16). ($F'' + (\lambda - q(x))F = f(x)$.)

Нека положим

$$G(x,y,\lambda) = \left\{\begin{array}{ll} \alpha(y)c(x,\lambda) + \beta(y)s(x,\lambda) & x \le y \le \pi \\ K(x,y,\lambda) + \alpha(y)c(x,\lambda) + \beta(y)s(x,\lambda) & 0 \le y \le x, \end{array}\right. . \tag{5.23}$$

Функциите $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ определяме от граничните условия (5.17), което дава

$$G(0,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(y)c(0,\lambda) + \beta(y)s(0,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(y) = 0 \tag{5.24}$$

$$G(\pi, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(\pi, \lambda)c(y, \pi) - c(\pi, \lambda)s(y, \pi) + \beta(y)s(\pi, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\beta(y) = \frac{c(\pi, \lambda)s(y, \lambda) - s(\pi, \lambda)c(y, \lambda)}{s(\pi, \lambda)} = \frac{\tilde{s}(y, \lambda)}{s(\pi, \lambda)}, \tag{5.25}$$

където в последното равенство използвахме представянето (5.13).

По аналогичен начин ще построим функцията на Грин за периодичната задача (5.1), (5.2). Нека отбележим, че решението

$$\psi(x, \lambda) = -s(\pi, \lambda)c(x, \lambda) - (1 - c(\pi, \lambda))s(x, \lambda) = -s(x, \lambda) + \tilde{s}(x, \lambda) \tag{5.26}$$

удовлетворява граничното условие $y(0) = y(\pi)$, а решението

$$\varphi(x, \lambda) = (1 - s'(\pi, \lambda))c(x, \lambda) + c'(\pi, \lambda)s(x, \lambda) = c(x, \lambda) - \tilde{c}(x, \lambda) \tag{5.27}$$

удовлетворява граничното условие $y'(0) = y'(\pi)$. При това

$$W(\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)) = 2 - (c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)) = F_+(\lambda). \tag{5.28}$$

Следователно, ако $F_+(\lambda_0) = 0$, то

$$\psi(x, \lambda_0) = C_0\varphi(x, \lambda), \tag{5.29}$$

т. е. λ_0 е собствено значение на граничната задача (5.(), (5.2). Полатайки $x = 0$, за C_0 получаваме

$$-s'(\pi, \lambda_0) = C_0(1 - s'(\pi, \lambda_0)) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{s(\pi, \lambda_0)}{s'(\pi, \lambda_0) - 1}. \tag{5.30}$$

Функцията на Грин ще построиме, изхождайки от израза (5.23), където функциите α и β ще определим от граничните условия (5.2):

$$G(0, y, \lambda) = G(\pi, y, \lambda), \tag{5.31}$$

$$G'_x(0, y, \lambda) = G'_x(\pi, y, \lambda). \tag{5.32}$$

Така получаваме уравненията

$$\alpha(y)(1 - c(\pi, \lambda)) - \beta(y)s(\pi, \lambda) = s(\pi, \lambda)c(y, \lambda) - c(\pi, \lambda)s(y, \lambda), \tag{5.33}$$

$$-\alpha(y)c'(\pi, \lambda) + \beta(y)(1 - s'(\pi, \lambda)) = s'(\pi, \lambda)c(y, \lambda) - c'(\pi, \lambda)s(y, \lambda). \tag{5.34}$$

За детерминантата на получената система имаме

$$D = \begin{vmatrix} (y)(1 - c(\pi, \lambda) & -s(\pi, \lambda) \\ -c'(\pi, \lambda) + \beta & (1 - s'(\pi, \lambda) \end{vmatrix} = 2 - (c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)) = F_+(\lambda). \tag{5.35}$$

Следователно, отчитайки представянията (5.26), (5.27), получаваме

$$\alpha(y) = -\frac{\psi(y, \lambda)}{F_+(\lambda)}, \quad \beta(y) = -\frac{\varphi(y, \lambda)}{F_+(\lambda)}. \tag{5.36}$$

Замествайки така получените значения на α и β намираме, че функцията на Грин за периодичната задача има следния вид

$$G_+(x,y,\lambda) = \frac{-1}{F_+(\lambda)} \begin{cases} c(x,\lambda)\psi(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) & x \le y \le \pi \\ \psi(x,\lambda)c(y,\lambda) + \varphi(x,\lambda)s(y,\lambda) & 0 \le y \le x. \end{cases} \tag{5.37}$$

Лесно се проверява тъждеството

$$c(x,\lambda)\psi(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) =$$

$$\psi(x,\lambda)c(y,\lambda) + \varphi(x,\lambda)s(y,\lambda) + F_+(\lambda)[s(x,\lambda)c(y,\lambda) - c(x,\lambda)s(y,\lambda)], \tag{5.38}$$

откъдето следва, че

$$G_+(x,y,\lambda) = -F_+^{-1}(\lambda)[c(x,\lambda)\psi s(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi s(y,\lambda)]-$$

$$[s(x,\lambda)c(y,\lambda) - c(x,\lambda)s(y,\lambda)], \quad 0 \le y \le x. \tag{5.39}$$

За да изследваме антипериодичната задача (5.1), (5.3) въвеждаме решенията

$$\tilde{\psi}(x,\lambda) = s(\pi,\lambda)c(x,\lambda) - (1 + c(\pi,\lambda))s(x,\lambda) \quad (\tilde{\psi}(0,\lambda) = -\psi(\pi,\lambda)) \tag{5.40}$$

и

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = (1 + s'(\pi,\lambda))c(x,\lambda) - c'(\pi,\lambda)s(x,\lambda) \quad (\tilde{\varphi}(0,\lambda) = \tilde{\varphi}(\pi,\lambda), \tag{5.41}$$

където

$$W(\tilde{\psi}(x,\lambda), \tilde{\varphi}(x,\lambda)) = 2 + (c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)) = F_-(\lambda). \tag{5.42}$$

Следвайки изложената по–горе схема намираме, че функцията на Грин за антипериодичната задача (5.1), (5.3) се дава с формулата

$$G_-(x,y,\lambda) = \frac{-1}{F_-(\lambda)} \begin{cases} c(x,\lambda)\tilde{\psi}(y,\lambda) + s(x,\lambda)\tilde{\varphi}(y,\lambda) & x \le y \le \pi \\ \tilde{\psi}(x,\lambda)c(y,\lambda) + \tilde{\varphi}(x,\lambda)s(y,\lambda) & 0 \le y \le x. \end{cases} \tag{5.43}$$

Допълнение 1. Теорема на Щурм.

Тук ще приведем знаменитата теорема на Щурм, изиграла решаваща роля в развитието на теорията на оператора на Щурм–Лиувил.

Теорема на Щурм. Нека имаме две уравнения

$$u'' + g(x)u = 0, \tag{11.1}$$

$$v'' + h(x)v = 0. \tag{11.2}$$

Ако $g(x) < h(x)$ при $a \leq x \leq b$ то между всеки две нули на всяко решение $u(x)$ на уравнението (11.1) има поне една нула на всяко решение $v(x)$ на уравнението (11.2).

Доказателство. Нека умножим (11.1) на v и (11.2) на u и извадим така получените равенства. Получаваме

$$u''v - v''u = \frac{d}{dx}(u'v - uv') = \{h(x) - g(x)\}uv. \tag{11.3}$$

Нека x_1 и x_2 са две последователни нули на $u(x)$. Интегрирайки (11.3) от x_1 до x_2 получаваме

$$u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (h(x) - g(x))u(x)v(x)\, dx. \tag{11.4}$$

Нека допуснем, че $v(x) \neq 0$ при $x_1 \leq x \leq x_2$. Без ограничение на общността предполагаме, че $u(x) > 0$, $v(x) > 0$, $x_1 < x < x_2$. Следователно имаме $u'(x_2) < 0$, $v(x_2) > 0$ и $u'(x_1) > 0$, $v(x_1) > 0$, което дава за лявата страна на (11.4) $u'(x_2)v(x_2) - u'(x_1)v(x_1) \leq 0$, дясната страна е положителна. Полученото противоречие доказва теоремата.

Следствие. Ако $g(x) \leq -m^2 < 0$ то $u(x)$ може да има не повече от една нула.

Доказателство. Действително, ако допуснем, че $u(x)$ има две нули то по теоремата на Щурм всяко решение $v(x)$ на уравнението $v'' - m^2 v = 0$ трябва да има поне една нула между тях, но решения на последното уравнение са функциите $v_1(x) = e^{-mx}$ и $v_2(x) = e^{mx}$, които никъде не се анулират.