Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Евгени Христов Христов

Увод в теория на солитоните

София, 2008 г.

Предговор

Целта на тези записки е да изложи основните идеи на едно от модерните направления в математическата физика, свързано с нелинейните уравнения от солитонен тип. Централно място играе уравнението на Кортевег - де Фриз, което се интегрира с метода на обратната задача на разсейването за уравнението на Шрьодингер. Разгледани са и съответните обобщения, свързани с уравнението на синус-Гордон, нелинейното уравнение на Шрьодингер, верижката на Тода и др..[1]

[1]Записките са частично спонсорирани по договор за научни изследвания 99/2007, СУ "Св. Климент Охридски."

Съдържание

Глава 1.Права и обратна задачи на разсейването за оператора на Шрьодингер

В тази глава привеждаме основните резултати, свързани с правата и обратната задачи на разсейването за оператора на Шрьодингер на цялата ос, които са сходни с добре известните от квантовата механика за радиалното уравнение на Шрьодингер. Отчитайки важността им за интегрирането на уравнението на Кортевег–де Фриз, основните твърдения тук са приведени с доказателствата им.

1.1. Задача на разсейването за уравнението на Шрьодингер на цялата ос

В този параграф ще изложим накратко основните резултати свързани с правата задача на разсейване за уравнението на Шрьодингер

$$l(v)y \equiv -y'' + v(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.1.1}$$

в което реално–значният потенциал $v(x)$ е функция от L_2^1,

$$L_2^1 = \{v(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^2)|v(x)|dx < \infty\}. \tag{1.1.2}$$

Да означим с $f(x,k)$ и $g(x,k)$ решенията на Йост за уравнението (1.1.1), които са дефинирани за реално k чрез своите асимптотики

$$\lim_{x\to\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x,k)e^{ikx} = 1. \tag{1.1.3}$$

Тези условия определят еднозначно $f(x,k)$ и $g(x,k)$ като аналитични в горната полуравнина $\operatorname{Im} k > 0$ и непрекъснати при $\operatorname{Im} k \geq 0$. В сила са следните оценки :

$$\left|f(x,k) - e^{ikx}\right| \leq K\frac{e^{-\operatorname{Im} kx}}{1+|k|}(1 + \max(-x, 0)) \int_x^{\infty} (1 + |t|)|v(t)|dt, \tag{1.1.4}$$

$$\left|g(x,k) - e^{-ikx}\right| \leq K\frac{e^{-\operatorname{Im} kx}}{1+|k|}(1 + \max(x, 0)) \int_{-\infty}^{x} (1 + |t|)|v(t)|dt, \tag{1.1.5}$$

$$\left|f'(x,k) - ike^{ikx}\right| \leq K_1 e^{-\operatorname{Im} kx}(1 + \max(-x, 0)) \int_{\infty}^{x} (1 + |t|)|v(t)|dt, \qquad (1.1.4)$$

$$\left|g'(x,k)+ike^{-ikx}\right| \le K_1 e^{\operatorname{Im} kx}(1+\max(x,0))\int_x^{\pm\infty}(1+|t|)|v(t)|dt, \quad (1.1.5)$$

където K, K_1 са константи. За реални $k \neq 0$ двойките функции $f(x,k)$, $f(x,-k)$ и $g(x,k)$, $g(x,-k)$ са фундаментални системи от решения на (1.1.1) с Вронскиани

$$W(f(x,-k),f(x,k)) = W(g(x,k),g(x,-k)) = 2ik. \quad (1.1.5')$$

Оттук получаваме следните представяния:

$$f(x,k) = b(k)g(x,k) + a(k)g(x,-k), \quad (1.1.6)$$

$$g(x,k) = -b(-k)f(x,k) + a(k)f(x,-k). \quad (1.1.7)$$

Функциите $a(k)$ и $b(k)$ са дефинирани чрез формулите:

$$a(k) = (2ik)^{-1}W(g(x,k),f(x,k)), \quad \operatorname{Im} k \ge 0, \quad (1.1.8)$$

$$b(k) = (2ik)^{-1}W(f(x,k),g(x,-k)), \quad \operatorname{Im} k = 0 \quad (1.1.9)$$

и удовлетворяват равенствата:

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)}, \quad |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \quad (1.1.10)$$

Функцията $ka(k)$ е аналитична в $\operatorname{Im} k > 0$ и непрекъсната при $\operatorname{Im} k \ge 0$. За $|k| \to \infty$ е в сила асимптотиката

$$a(k) = 1 + O\left(|k|^{-1}\right), \quad |k| \to \infty. \quad (1.1.10')$$

. При $\operatorname{Im} k > 0$ $a(k)$ има краен брой прости нули, които лежат върху имагинерната k-ос. Ще означим със $\sigma(v)$ съответното множество от нули:

$$\sigma(v) = \{k_j :\ k_j = i\tau_j,\ \tau_j > 0,\ a(k_j) = 0,\ j = 1,\dots,N\}. \quad (1.1.10'')$$

Операторът на Шрьодингер $l(v)$ (1.1.1), разглеждан като оператор в Хилбертовото пространство $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\| = (f,f)^{1/2}, \quad (1.1.11)$$

е самоспрегнат оператор. Той има двоен и абсолютно непрекъснат спектър при $k^2 > 0$ и краен брой собствени стойности $\lambda_j = -\tau_j^2$, $j = 1,\dots,N$. От равенството (1.1.8) следва, че

$$f(x,k_j) = b_j g(x,k_j) \quad (1.1.12)$$

които определят собствените функции $f^{\pm}(x,k_j) \in L^2$. Да означим с $C_j^{\pm}$ нормировъчните константи

$$C_j^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \|f^{\pm}(x,k_j)\|^{-2} = -ib_j^{\mp 1}\dot{a}^{-1}(k_j) \tag{1.1.13}$$

където точката означава диференциране по k. Последното равенство в (1.1.13) може да се получи от тъждеството

$$\frac{d}{dx}W(\dot{y}(x,k),z(x,k)) = 2ky(x,k)z(x,k) \tag{1.1.13$'$}$$

посредством (1.1.12) и оценките

$$\dot{f}^{+}(x,k_j) \sim xe^{ik_jx} \ \text{ for } \ x\to\infty, \ \ \dot{f}^{+}(x,k_j) \sim \dot{a}(k_j)e^{ik_jx} \ \text{ for } \ x\to-\infty. \tag{1.1.14}$$

Да отбележим по-специално, че в общия случай $a(k)$ и $b(k)$ имат сингулярност от вида k^{-1} в началото. Това е следствие от факта, че при $k=0$ решението $g(x,0)$ на (1.1.1), което е ограничено при $x\to-\infty$: $g(x,0)=1+o(1)$, е линейна комбинация на ограничено и линейно нарастващо решение при $x\to\infty$: $g(x,0)\sim \operatorname{cotan}(\alpha/2)+\beta x$, $|\alpha|\le\pi$. В общия случай $\beta\neq 0$ имаме

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = -\frac{ic}{k} + O(1), \quad k\to 0, \tag{1.1.15}$$

където c е реална константа. При наличието на виртуално ниво $\beta=0$ е в сила

$$a(k) = \frac{1}{\sin\alpha} + o(1), \quad b(k) = -\operatorname{cotan}\alpha + o(1), \quad k\to 0. \tag{1.1.16}$$

1.2. Формули за разлагане. Равенство на Парсевал.

Тук ще получим следната

Теорема за разлагане. За всяка функция $h \in L^2(-\infty, \infty)$ имаме следните формули за разлагане

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)(h, f(-k))\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)(h, f(k))\frac{b(-k)}{a(k)}\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x, i\tau_j)(h, f(i\tau_j)), \tag{1.2.1}$$

и

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,k)(h, g(-k))\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,k)(h, g(k))\frac{b(k)}{a(k)}\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^- g(x, i\tau_j)(h, g(i\tau_j)), \tag{1.2.2}$$

където

$$(h; f(k)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f(y,k)\,dy, \quad (h, g(k)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)g(y,k)\,dy. \tag{1.2.2$'$}$$

Забележка. Нека определим при реални k следните системи от функции

$$u_1^+(x,k) = \frac{1}{a(k)}g(x,k), \quad u_2^+(,k) = \frac{1}{a(k)}f(x,k), \tag{1.2.3}$$

$$u_1^-(x,k) = \overline{u_2^+(x,k)} \quad u_2^-(x,k) = \overline{u_1^+(x,k)} \tag{1.2.4}$$

Използвайки представянията (1.1.6), (1.1.7) и равенствата (1.1.10) след несложни пресмятания получаваме, че формулите за разлагане (1.2.1), (1.2.2) могат да се запишат във вида

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\overline{u_1^+(x,k)}(h, u_1^+(k)) + \overline{u_2^+(x,k)}(h, u_2^+(k))\right\}\,dk+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{u_j(x)}(h, u_j), \quad u_j(x) = u(x, i\tau_j) = \sqrt{C_j^+}\,f(x, i\tau_j), \tag{1.2.5}$$

или

$$h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\overline{u_1^-(x,k)}(h,u_1^-(k))+\overline{u_2^-(x,k)}(h,u_2^-(k))\right\}dk+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\overline{u_j(x)}(h,u_j),\quad u_j(x)=u(x,i\tau_j)=\sqrt{C_j^-}g(x,i\tau_j),\tag{1.2.6}$$

от където се вижда, че спектърът на оператора на Шрьодингер е двукратен и непрекъснат при $\lambda\geq 0$ и има краен брой прости собствени числа λ_j, $j=1,2,\ldots n$.

1.3. Оператори на преобразуване.

Тук накратко ще изложим идеята на получаване на представяния от вида

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{ikt}\,dt, \qquad (1.3.-1)$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)e^{-ikt}\,dt, \qquad (1.3.-2)$$

които се наричат оператори на преобразуване. Нека напомним, че за решението на Йост $f(x,k)$ имаме оценката

$$f(x,k) = e^{ikx} + O\left(\frac{e^{-\tau x}}{|k|}\right), \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k = \tau \geq 0. \qquad (1.3.1)$$

Да разгледаме контурния интеграл

$$J_R(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_{(-R,R)\bigcup\gamma_R} (f(x,k) - e^{ikx})e^{-iky}\,dk, \quad y < x, \qquad (1.1.7)$$

където $\gamma_R = R\exp i\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. От (1.3.1), означавайки с $F(x,y,k)$ подинтегралната функция в (1.1.7), получаваме, че при $\mathrm{Im}k \geq 0$ и фиксирани $x, y, y < x$ имаме

$$|F(x,y,k)| \leq \frac{C}{|k|}e^{-\tau(x-y)}, \quad (C = Const).$$

По лемата на Жордан

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} F(x,y,k)\,dk = 0, \quad y < x.$$

Следователно

$$A^+(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (f(x,k) - e^{ikx})e^{-iky}\,dk = 0, \quad y < x,$$

Отчитайки, че от (1.3.1) следва, че при всяко x, $f(x,k) - e^{ikx} \in L^2(-\infty,\infty)$. Прилагайки формулата за обръщане на интеграла на Фурие, получаваме исканото представяне (1.4.1):

$$f(x,k) - e^{ikx} = \int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{ikt}\,dt, \quad A^+(x,y) \in L^2(x,\infty). \qquad (1.1.8)$$

Нека отбележим, че ако заместим представянето (1.4.1) в уравнението на Шрьодингер (43.1) получаваме за $A^+(x,y)$ уравнението

$$A^+_{xx}(x,y) - v(x)A^+(x,y) = A^+_{yy}(x,y), \quad A^+(x,y) \to 0,\ x,y \to \infty, \tag{1.3.4}$$

където

$$A^+(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty v(y)\,dy. \tag{1.3.5}$$

1.4. Обратна задача на разсейването. Уравнение на Гелфанд–Левитан –Марченко.

Да въведем сега двете множества

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{s}^+(v) = \{r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)},\ k \in \mathbb{R},\ k_j,\ C_j^+ = -\frac{i}{b_j \dot{a}_j},\ j = 1, \dots, N\} \tag{1.4. − 3}$$

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{s}^-(v) = \{r^-(k) = \frac{b(k)}{a(k)},\ k \in \mathbb{R},\ k_j,\ C_j^- = -\frac{ib_j}{\dot{a}_j},\ j = 1, \dots, N\}, \tag{1.4. − 2}$$

които се наричат съответно *десни и леви данни на разсейване*. Функциите $r^\pm(k)$ се4 наричат *коефициенти на отражение*, а функцията $t(k) = 1/a(k)$ се нарича *коефициент на пропускане*. Дисперсионното съотношение

$$a(k) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r^\pm(l)|)}{l - k} dl\right\} \prod_{j=1}^{N} \frac{k - i\tau_j}{k + i\tau_j} \tag{1.4. − 1}$$

позволява определянето на $\mathbf{s}^+$ чрез $\mathbf{s}^-$ и обратно.

Не е трудно да се покаже, че всяко от множествата $\mathbf{s}^\pm$ определя еднозначно потенциала $v(x)$ в уравнението на Шрьодингер (вж., например, §1.8.)

Обратната задача на разсейване (ОЗР) се състои в намиране на алгоритъм за построяване на $v(x)$ при известни $\mathbf{s}^+$ или $\mathbf{s}^-$, а също така в намиране на необходими и достатъчни условия за множеството $\{r(k), i\tau_j, C_j\}$, при което то да представлява леви (или десни) данни на разсейване за даден реално-значен потенциал $v(x)$, принадлежащ на подходящо функционално пространство (например, v удовлетворява условието $v \in L_2^1$ или $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Тук ще приведем кратък извод на класическото уравнение на Гелфанд-Левитан-Марченко (Г Л М) в обратната задача на разсейването за уравнението на Шрьодингер (1.1.1).

То се базира на изведените в предходния параграф § 1.3 представяния за решенията на Йост:

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty A^+(x,t) e^{ikt}\, dt, \tag{1.4.1}$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)e^{-ikt}\,dt, \tag{1.4.2}$$

където

$$v(x) = -2\frac{d}{dx}A^+(x,x) = 2\frac{d}{dx}A^-(x,x). \tag{1.4.3}$$

Нека запишем формулата за разлагане (2.2.1) следния символичен вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\overline{f(y,k)}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)f(y,k)\frac{b(-k)}{a(k)}\,dk$$
$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x,i\tau_j)f(y,i\tau_j) = \delta(x-y). \tag{1.4.4}$$

Имаме още и класическата формула за интеграл на Фурие:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\,dk = \delta(x-y). \tag{1.4.5}$$

Заместваме в (1.4.4) $f(y,k)$ с представянето (1.4.1). При $x < y$ получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{y}^{\infty} A^+(y,t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk\right\}dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{y}^{\infty} A^+(y,t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk\right\}dt$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{C_j^+ f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y} + \int_{y}^{\infty} A^+(y,t)C_j^+ f(x,k)e^{-\tau_j t}dt\right\} = 0. \tag{1.4.6}$$

Нека означим

$$h_x(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk$$
$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y}. \tag{1.4.7}$$

Тогава (1.4.6) дава

$$h_x(y) + \int_{y}^{\infty} A^+(y,t)h_x(t)\,dt = 0, \quad x < y. \tag{1.4.8}$$

Това уравнение, като уравнение на Волтера от втори род, има единствено решение $h_x(y) = 0$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y} = 0, \quad x < y. \tag{1.4.9}$$

Заместваме тук $f(x,k)$ с представянето (1.4.1). Получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\,dk + \int_{x}^{\infty} A^+(x,t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-y)}\,dk\right\}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+y)}\frac{b(-k)}{a(k)}\,dk - \int_{x}^{\infty} A^+(x,t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)}e^{ik(t+y)}\,dk\right\}dt$$

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^+ e^{-\tau_j(x+y)} + \int_{x}^{\infty} A^+(x,t)\left\{\sum_{j=1}^{n} C_j^+ e^{-\tau_j(t+y)}\right\}dt = 0, \quad x < y. \tag{1.4.10}$$

От формулата (1.4.5) получаваме за (1.4.10) уравнението на Г Л М :

$$A^+(x,y) + F^+(x+y) + \int_{x}^{\infty} A^+(x,t)F^+(t+y)\,dt = 0, \quad x < y, \tag{1.4.11}$$

където

$$F^+(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)}e^{ikx}\,dk + \sum_{j=1}^{n} C_j^+ e^{-\tau_j x}. \tag{1.4.12}$$

Аналогично, изхождайки от формулата за разлагане (1.2.2) и представянето (1.4.2) получаваме уравнението

$$A^-(x,y) + F^-(x+y) + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)F^-(t+y)\,dt = 0, \quad y < x, \tag{1.4.13}$$

където

$$F^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(k)}{a(k)}e^{-ikx}\,dk + \sum_{j=1}^{n} C_j^- e^{\tau_j x}. \tag{1.4.14}$$

Нека отбележим, че уравненията (1.4.11) и (1.4.13) са уравнения на Фредхолм от втори род относно функциите $A^+(x,y)$, $x \le y < \infty$ и

$A^-(x,y)$ $x \geq y > -\infty$ съответно. Ще докажем, че така построените уравнения имат единствено решение. Нека напомним, че необходимото и достатъчно условие за единственост на решението на уравнение на Фредхолм от втори род е съответното еднородно уравнение да няма ненулево решение. По-точно имаме следната

Теорема за единственост. Ако $|\frac{b(k)}{a(k)}| < 1$ то уравнението (1.4.11)при всяко фиксирано x има единствено решение, т.е. уравнението

$$\varphi(y) + \int_x^\infty \varphi(t) F^+(t+y)\, dt = 0, \quad x < y \tag{1.4.15}$$

няма ненулеви решения в $L^2(x,\infty)$.

Доказателство. Допускаме противното, т.е. че уравнението (1.4.15) има ненулево решение $\varphi(y)$, $x \leq y < \infty$. Замествайки $F^+(x)$ с израза (1.4.12), получаваме

$$\varphi(y) + \sum_{j=1}^N C_j^+ \int_x^\infty \varphi(t) e^{-\tau_j(t+y)}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_x^\infty \varphi(t)\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{b(-k)}{a(k)} e^{ik(t+y)}\, dk\right) dt = 0,\ x \leq y < \infty. \tag{1.4.16}$$

От тук, сменяйки реда на интегриране в последното слагаемо, имаме

$$\varphi(y) + \sum_{j=1}^N C_j^+ \int_x^\infty \varphi(t) e^{-\tau_j(t+y)}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{b(-k)}{a(k)}\left(\int_x^\infty \varphi(t) e^{ikt}\, dt\right) e^{iky}\, dk = 0,\ x \leq y < \infty. \tag{1.4.17}$$

Сега умножаваме на $\varphi(y)$ и интегрираме по y от x до ∞. Получаваме

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\, dy + \sum_{j=1}^N C_j^+ \left(\int_x^\infty \varphi(t) e^{-\tau_j t}\, dt\right)^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{b(-k)}{a(k)} \Phi^2(k)\, dk = 0, \tag{1.4.18}$$

където $\Phi(k) = \int_x^\infty \varphi(t) e^{ikt}\, dt$. Отчитайки равенството на Парсевал

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |\Phi(k)|^2\, dk. \tag{1.4.19}$$

и полагайки

$$\Phi(k) = |\Phi(k)|e^{i\theta(k)}, \quad \frac{b(-k)}{a(k)} = |\frac{b(-k)}{a(k)}|e^{i\eta(k)}. \tag{1.4.20}$$

получаваме за (1.4.18)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(k)|^2 \left\{1 - |\frac{b(-k)}{a(k)}| \exp[i(2\theta(k) + \eta(k))]\right\} dk$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} C_j^+ \left(\int_x^{\infty} \varphi(t)e^{-\tau_j t)}\, dt\right)^2 = 0 \tag{1.4.21}$$

Следователно за реалната част на последното равенство имаме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(k)|^2 \left\{1 - |\frac{b(-k)}{a(k)}| \cos(2\theta(k) + \eta(k))\right\} dk$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} C_j^+ \left(\int_x^{\infty} \varphi(t)e^{-\tau_j t)}\right)^2 = 0. \tag{1.4.22}$$

От условието $|\dfrac{b(k)}{a(k)}| < 1$ имаме, че $|\Phi(k)| = 0$, което вследствие на (1.4.19) дава $\varphi(y) = 0$. $\square$

Ще отбележим също, че трябва да отговорим на естествения въпрос дали данните на разсейване $\mathbf{s}^+$ и $\mathbf{s}^-$ (чрез които са построени уравненията (1.4.11) и (1.4.12)) действително водят до един и същ потенциал $v(x)$ в (1.4.3). Следващите две условия са необходими и достатъчни множествата $\mathbf{s}^+$ и $\mathbf{s}^-$ да бъдат съответно леви и десни данни на разсейване за един и същ потенциал.

(i) При реални $k \neq 0$ функциите $r^{\pm}(k)$ са непрекъснати, $r^{\pm}(-k) = \overline{r^{\pm}(k)}$, $|r^{\pm}(k)| < 1$ и $r^{\pm}(k) = O(k^{-1})$ когато $k \to \pm\infty$. Преобразованията на Фурие

$$R^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k)e^{ikx}\, dk, . \quad R^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^-(k)e^{ikx}\, dk.$$

са реални, абсолютно непрекъснати функции в L^2 и за всяко $a > -\infty$ са в сила неравенствата:

$$\int_a^{\infty} |R^{\pm}(\pm x)|\, dx < \infty, \quad \int_a^{\infty} (1 + |x|)|R^{\pm'}(\pm x)|\, dx < \infty.$$

(ii) Коефициентите на отражение $r^+(k)$ и $r^-(k)$ са свързани чрез равенството $r^-(k) = r^+(-k)a(-k)/a(k)$, а нормировъчните константи $C_j^{\pm}$ — чрез (1.1.13), т.е. $C_j^+ C_j^- = \dot{a}^{-2}(k_j)$, където $a(k)$ се определя от (1.4.-3). Освен това функцията $ka(k)$ е непрекъсната в горната полуравнина $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $\lim_{k\to 0} ka(k)[r^{\pm}(k) + 1] = 0$.

Ще отбележим, че тези условия дават точна характеризация, ако потенциалът v удовлетворява $\int_{\mathbb{R}}(1 + |x|)|v(x)|dx < \infty$, докато $R^{\pm}(k)$ е от класа на Шварц $\mathcal{S}$ при условие, че v е от същия клас.

.1.5. Безотражателни потенциали.

Тук ще приведем класическия метод за построявяне на явни формули за потенциалите, съответстващи на случая, когато в данните на разсейване $\mathbf{s}^+(v)$ функцията $r^\pm(k) \equiv 0$, т.е. коефициента на отражение $b(k) = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Изводът се базира на изведенито в предходния параграф уравнение на ГЛМ:

$$F(x+y) + A(x,y) + \int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt = 0, \quad x \leq y < \infty, \tag{1.5.1}$$

където потенциала $v(x)$ се дава с формулата

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty v(t)\,dt. \tag{1.5.2}$$

В случая на безотражателен потенциал, т.е. $b(k) = 0$ за функцията $F(x)$ (1.4.12) имаме

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^+ e^{-\tau_n x}, \tag{1.5.3}$$

$$C_n^+ = \frac{b_n}{i\dot{a}(i\tau_n)}. \tag{1.5.4}$$

В случая на уравнението на КдФ (вж. глава 2)

$$\tau_n(t) = \tau_n(0), \quad C_n^+(t) = C_n^+(0)e^{8\tau_n^3 t}. \tag{1.5.5}$$

За да решим уравнението (1.5.1) отначало полагаме

$$A(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-\tau_n y}. \tag{1.5.6}$$

Имаме

$$\int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt = \sum_{n,m=1}^{N} K_m(x)\int_x^\infty e^{-\tau_m t}C_n^+ e^{-\tau_n(t+y)}\,dt =$$

$$\sum_{n=1}^{N} C_n^+ \left(\sum_{m=1}^{N} K_m(x)\int_x^\infty e^{-(\tau_n+\tau_m)t}\,dt\right)e^{-\tau_n y} =$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y} \sum_{m=1}^{N} \frac{C_n^+ K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m}. \tag{1.5.7}$$

Замествайки (1.5.3), (1.5.6) и (1.5.7) в (1.5.1) получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} C_n^+ e^{-\tau_n x} e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y} \sum_{m=1}^{N} \frac{C_n^+ K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m} = 0. \tag{1.5.8}$$

Тъй като функциите $e^{-\tau_n y}$ са линейно независими, то коефициентите са нула, т.е.

$$K_n(x) + C_n^+ e^{-\tau_n x} + \sum_{m=1}^{N} \frac{C_n^+ K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m} = 0. \tag{1.5.9}$$

Така получаваме системата уравнения

$$K_n(x) + + \sum_{m=1}^{N} t_{nm} K_m(x) = -C_n^+ e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{1.5.10}$$

където

$$t_{nm} = \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m}, \quad n, m = 1, \ldots, N. \tag{1.5.11}$$

Да означим

$$A = (A_{nm})_{nm=1}^{N}, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m} \tag{1.5.12}$$

т.е. имаме линейната система

$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm} K_m = B_n, \quad B_n = -C_n^+ e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{1.5.13}$$

Решението на тази система се дава с известната формула

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)}, \quad n = 1, \ldots, N \tag{1.5.14}$$

където матрицата $A^{(n)}(x)$ се получава заменяйки в $A(x)$ n–ия стълб с елементите на стълба $B = (B_1, \ldots, B_N)^T$, т.е. $A_{mn}^{(n)} = -C_m^+ e^{-\tau_m x}$, $m = 1, 2, \ldots, N$. От (1.5.6) получаваме

$$A(x, x) = (\det A(x))^{-1} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x}. \tag{1.5.15}$$

Но (1.5.12) имаме

$$A'_{nm}(x) = -C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x} \tag{1.5.16}$$

и, следователно, използвайки правилото за диференциране на детерминанта, получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x} = \frac{d}{dx} \det A(x), \tag{1.5.17}$$

т.е. имаме формулата

$$A(x,x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x), \tag{1.5.18}$$

която заедно с (1.5.2) и (1.5.12) дава

$$v(x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x), \tag{1.5.19}$$

където

$$A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N} = \left(\delta_{nm} + \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m}\right)_{n,m=1}^{N}. \tag{1.5.19a}$$

За да получиме оттук N–солитонното решение

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \triangle(x,t) \tag{1.5.20}$$

$$\triangle(x,t) = Det \left(\delta_{nm} + C_n^+ \frac{e^{-(\tau_n+\tau_m)x+8\tau_m^3 t}}{\tau_n+\tau_m}\right)_{n,m=1}^{N}, \tag{1.5.21}$$

остава да заместим в (1.5.19) $C_n^+(t)$ съгласно (1.5.5). При $N=1$ получаваме солитонното решение :

$$v(x,t) = \frac{-2\tau^2}{\cosh^2 \tau(x-4\tau^2 t-\varphi)}, \quad \varphi = \frac{1}{2\tau} \ln \frac{\beta}{2\tau}. \tag{1.5.22}$$

1.5a. Потенциал на Баргман-пример за безотражателен потенциал

Тук ще приведем класическия пример на Баргман (1946) за построяване на безотражателен потенциал, който има едно собствено значение, (терминологията следва въведената в предишните два параграфа). Ще отбележим, че исторически метода на Баргман е изиграл стимулираща роля в по-нататъшното развитие на теорията на обратните спектрални задачи, които, в частност, разглеждахме в предходните параграфи. Подробно изложение на тези въпроси може да се намери, например, в монографията на Б. Левитан [...].

Задачата, която разглеждаме се състои в намирането на потенциал $v(x)$, за който решението на уравнението на Шрьодингер

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0 \tag{1.5a.1}$$

се записва във вида

$$y_1 = e^{ikx}[2k + ia(x)], \tag{1.5a.2}$$

т.е. като експонента $\exp(ikx)$, умножена на полином от k, в разглеждания случай линейна по k функция.

Ще покажем, че искания потенциал има следния вид

$$v(x) = \frac{-2\tau^2}{\mathrm{ch}^2(\tau x - \varphi)}, \tag{1.5a.3}$$

където τ, φ са реални константи.При това

$$a(x) = 2\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi), \tag{1.5a.4}$$

$$y_1(x,k) = e^{ikx}[2k + i2\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)]. \tag{1.5a.4a}$$

Действително, полагайки (1.5a.2) в уравнението (1.5a.1) и приравнявайки коефициентите пред еднаквите степени на k получаваме

$$a' = -v, \quad a'' = va. \tag{1.5a.5}$$

Изключвайки v и ингегрирайки получаваме

$$a' + \frac{a^2}{2} = 2\tau^2, \tag{1.5a.6}$$

където τ^2 е константа на интегриране. Полагането

$$a = 2w'/w \tag{1.5a.7}$$

води до уравнението

$$w'' - \tau^2 w = 0, \tag{1.5a.8}$$

чието решение се дава с формулата

$$w = \alpha e^{\tau x} + \beta e^{-\tau x}. \tag{1.5a.9}$$

Следователно

$$v = -a' = -2\left(\frac{w'}{w}\right)' = -2(\ln w)'', \tag{1.5a.10}$$

което води до търсената формула (11a.3) при $2\alpha = e^{-\varphi}$, $2\beta = e^{\varphi}$, т.е. при

$$w(x) = \mathrm{ch}(\tau x - \varphi). \tag{1.5a.11}$$

Изборът на константите α и β е с оглед решението $w(x)$ да не се анулира при $-\infty < x < \infty$.

За да получим решенията Йост $f^{\pm}(x,k)$ остава да отбележим, че $\lim_{x\to\infty} \mathrm{th}(\tau x - \varphi) = 1$. Следователно

$$f(x,k) = e^{ikx}\frac{k + i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau},\ (\lim_{x\to\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1). \tag{1.5a.12}$$

Аналогично

$$g(x,k) = e^{-ikx}\frac{k - i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau},\ (\lim_{x\to-\infty} g(x,k)e^{ikx} = 1). \tag{1.5a.13}$$

Нека сега в представянето

$$f(x,k) = b(k)g(x,k) + a(k)g(x,-k) \tag{1.5a.14}$$

заместим $f^{\pm}(x,k)$ с изразите (11a.12) и (11a.13). Получаваме

$$e^{ikx}\frac{k + i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau}$$

$$= b(k)e^{-ikx}\frac{k - i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau} + a(k)e^{ikx}\frac{k + i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k - i\tau}. \tag{1.5a.15}$$

Следователно

$$b(k) = 0, \quad a(k) = \frac{k - i\tau}{k + i\tau}. \tag{1.5a.16}$$

Оттук намираме, че собственото число $k = i\tau$ и съответно

$$f(x, i\tau) = e^{-\tau x} \frac{i\tau(1 + \mathrm{th}(\tau x - \varphi))}{2i\tau} =$$

$$= b_\tau g(x, i\tau) = b_\tau e^{\tau x} \frac{i\tau(1 - \mathrm{th}(\tau x - \varphi))}{2i\tau}. \tag{1.5a.17}$$

Оттук непосредствено следва, че

$$b_\tau = e^{-2\varphi}, \tag{1.5a.18}$$

$$f(x, i\tau) = \frac{e^{\varphi}}{2\mathrm{ch}(\tau x - \varphi)}. \tag{1.5a.19}$$

1.6. Още един извод на уравнението на Гелфанд-Левитан-Марченко

Тук, следвайки Марченко[..], ще приведем един кратък извод на основното уравнение (1.4.11-12) в обратната задача на разсейването.[2] За целта представянето (1.1.7), т.е.

$$g(x,k) = -b(-k)f(x,-k) + a(k)f(x,-k) \tag{1.6.1}$$

записваме във вида

$$\frac{1}{a(k)}g(x,k) = r^+(k)f(x,k) + f(x,-k),\ r^+(k) \overset{def}{=} -\frac{b(-k)}{a(k)}. \tag{1.6.2}$$

Изваждайки $g(x,k)$ от двете страни на последното равенство, получаваме

$$\left(\frac{1}{a(k)} - 1\right) g(x,k) = r^+(k)f(x,k) + f(x,-k) - g(x,k), \tag{1.6.3}$$

Нека разгледаме сега преобразованието на Фурие на последното равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(k)} - 1\right) g(x,k)e^{iky}\,dk$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k)f(x,k)e^{iky}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f(x,-k) - g(x,k))e^{iky}\,dk, \quad x < y. \tag{1.6.4}$$

За да пресметнем интегралите в дясната част на това равенство ще използваме представянията (1.4.1), (1.4.2):

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{ikt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_x^+(t)e^{ikt}\,dt, \tag{1.6.5}$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)e^{-ikt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_x^-(t)e^{-ikt}\,dt, \tag{1.6.6}$$

където

$$A_x^+(t) = A^+(x,t),\ x < t < \infty,\ A_x^+(t) = 0, -\infty < t < x,$$

[2] Означенията следват въведените в предишните параграфи.

$$A_x^-(t) = A^-(x,t),\ -\infty < t < x,\ A_x^-(t) = 0, x < t < \infty,$$

и представянията

$$r^+(k) = \int_{-\infty}^{\infty} R^+(t)e^{-ikt}\,dt, \quad R^+(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k)e^{ikt}\,dk. \tag{1.6.7}$$

Имаме

$$r^+(k)e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} R^+(t)e^{ik(x-t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} R^+(x+t)e^{-ikt}\,dt, \tag{1.6.8}$$

$$\begin{aligned} r^+(k)\int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{ikt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} R^+(t)e^{-ikt}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} A_x^+(t)e^{ikt}\,dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty} R^+(t)e^{-ikt}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} A_x^+(-t)e^{-ikt}\,dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R^+(t-u)A_x^+(-u)\,du\right\}e^{-ikt}\,dt = \\ \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} R^+(t+u)A_x^+(u)\,du\right\}e^{-ikt}\,dt. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Замествайки (1.6.8-9) в дясната страна на равенството (1.6.3), получаваме

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a(k)} - 1\right)g(x,k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R^+(x+t)e^{-ikt}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_x^{\infty} R^+(t+u)A^+(x,u)\,du\right\}e^{-ikt}\,dt + \\ &\int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{-ikt}\,dt - \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t)e^{-ikt}\,dt. \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

От тук за равенството (1.6.4) получаваме следния запис

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(k)} - 1\right)g(x,k)e^{iky}\,dk = \\ &R^+(x+y) + A^+(x,y) + \int_x^{\infty} A^+(x,t)R^+(y+t)\,dt, \quad x < y. \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

Пресмятайки с теоремата на резидуумите интеграла в дясната страна на горното равенство, получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(k)}-1\right)g(x,k)e^{iky}\,dk=$$

$$-\sum_{j=1}^{n}C_j^{+}e^{-\tau_j(x+y)}-\int_x^{\infty}A^{+}(x,t)\left\{\sum_{j=1}^{n}C_j^{+}e^{-\tau_j(t+y)}\right\}dt,\ x<y,\qquad(1.6.12)$$

където

$$C_j^{+}\stackrel{\text{def}}{=}\|f(x,k_j)\|^{-2}=-i(b_j\dot{a}(k_j))^{-1},\quad k_j=i\tau_j.\qquad(1.6.13)$$

Действително, нека с γ_R означим полуокръжността $k=Re^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$, където $R>\max\{\tau_j\}$ и нека разгледаме контурния интеграл

$$I_R(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R\cup(-R,R)}\left(\frac{1}{a(k)}-1\right)g(x,k)e^{iky}\,dk,\quad x<y.\qquad(1.6.14)$$

От изложените в § 2. 1 свойства на $g(x,k)$ и $a(k)$ следва, че при фиксирани x и y, подинтегралната функция в (1.6.14) като функция на k е аналитична при $\mathrm{Im}k>0$, непрекъсната при реални k и има n прости полюси в точките $k_j=i\tau_j$, $j=1,\ldots,n$. От тук по теоремата за резидуумите получаваме

$$I_R(x,y)=i\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y}}{\dot{a}(i\tau_j)}=-\sum_{j=1}^{n}C_j^{+}f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y},\qquad(1.6.15)$$

където в последното равенство използвахме (1.1.12) и (1.1.13). По–нататък, имаме от (1.1.4), вследствие лемата на Жордан, че

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R}\left(\frac{1}{a(k)}-1\right)g(x,k)e^{iky}\,dk=0,\quad x<y.\qquad(1.6.16)$$

тъй като $a^{-1}(k)-1=o(1)$ при $k\to\infty,\ \mathrm{Im}k\ge 0$. Следователно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a(k)}-1\right)g(x,k)e^{iky}\,dk=-\sum_{j=1}^{n}C_j^{+}f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y},\quad x<y.\qquad(1.6.17)$$

Оттук, отчитайки представянето (1.1.8) за $f(x,k)$, получаваме исканото равенство (1.6.12).

1.7 Разлагане в произведения на решения на две уравнения на Шрьодингер

Да разгледаме две уравнения на Шрьодингер

$$l(v_n)y \equiv -y'' + v_n(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \ \ n = 1, 2, \tag{1.7.1}$$

където реалните непрекъснати потенциали $v_n(x) \in L^1_2$, т.е. удовлетворяват условието (1.1.2). Да означим с $f_n^+(x,k) = f_n(x,k)$ и $f_n^-(x,k) = g(x,k)$ решенията на Йост на (1.7.1) определени от условията:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n^{\pm}(x,k)\exp(\mp ikx) = 1, \quad \operatorname{Im} k \geq 0.$$

Означаваме още с $a_n(k)$ характеристичните функции (1.1.8) на уравнението (1.7.1). Въвеждаме и функциите

$$\begin{gathered} F^+(x,k) = f_1^+(x,k) f_2^+(x,k), \quad F^-(x,k) = f_1^-(x,k) f_2^-(x,k), \\ \alpha(k) = k a_1(k) a_2(k). \end{gathered} \tag{1.7.2}$$

По-нататък ще предполагаме, че заедно с условието (1.1.2) винаги е изпълнено и (1.1.15). Следователно $\alpha(k) = O(k)$, $k \to 0$.

Да въведем функцията

$$\begin{aligned} R_-(x,y,k) &= \alpha^{-1}(k)\{F^-(x,k)F^+(y,k)\theta(y-x) \\ &+ \sum_{n=1}^{2} [f_n^+(x,k) f_{3-n}^-(x,k) f_n^-(y,k) f_{3-n}^+(y,k) - F^+(x,k)F^-(y,k)]\theta(x-y)\}. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Както обикновено тук $\theta(x)$ означава функцията на Хевисайд ($\theta(x) = 1$, $x > 0$, $\theta(x) = 0$, $x < 0$). Нека с помощта на дискретните спектри

$$\sigma_n = \{k_{n,j} = i\kappa_{n,j} : \ \kappa_{n,j} > 0, \ a_n(k_{n,j}) = 0, \ \ j = 1, \ldots, N_n\}$$

да конструираме множествата

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad \sigma'' = \sigma_1 \cap \sigma_2, \quad \sigma' = \sigma \setminus \sigma''. \tag{1.7.4}$$

От аналитичните и асимптотични свойства на решенията $f^{\pm}(x,k)$ и функцията $a(k)$ (вж. параграф 1.1) не е трудно да се покаже, че функцията $R_-(x,y,k)$ удовлетворява следните условия:

(i) За всяко x и y функцията $R_-(x,y,k)$ заедно с производните си относно x, y са мероморфни по k за $\mathrm{Im}\, k > 0$, непрекъснати за $k \in \mathbb{R}$ и имат полюси от първи или втори ред в точките $k_{n,j} \in \sigma$.

(ii) При $\mathrm{Im}\, k \geq 0$ е в сила следната оценка:

$$|R_-(x,y,k)| \leq K|(1+|x|^2)(1+|y|^2)\alpha(k)|^{-1}\{\theta(x-y)+\exp(-2\mathrm{Im}\, k|x-y|)\},$$

където $K > 0$ е константа,(зависеща само от стойността на интеграла (1.1.2)). Освен това, равномерно по $x, y \in \mathbb{R}$ при $|k| \to \infty$, $\mathrm{Im}\, k \geq 0$, е изпълнено

$$\begin{aligned}
R_-(x,y,k) &= [2k^{-1}+O(k^{-2})]\theta(x-y)+O(k^{-1}\exp(-2\mathrm{Im}\, k|x-y|)),\\
\frac{\partial}{\partial x_l}R_-(x_1,x_2,k) &= 2i(-1)^l[\theta(x_2-x_1)\exp(-2ik(x_1-x_2))]\\
&+ 2i(-1)^l[\exp(2ik(x_1-x_2))+\frac{(-1)^l}{2ik}H(x_l)+O(k^{-2})]\theta(x_1-x_2)\\
&+ 2i(-1)^l[O(k^{-1}\exp(-2\mathrm{Im}\, k|x_1-x_2|))],\quad l=1,2,
\end{aligned}$$

където

$$H(x)=H_+(x)+H_-(x),\ H_\pm(x)=\int_{\mp\infty}^{x}(v_1(t)+v_2(t))\exp(\pm 2ik(t-x))dt.$$

(iii) Ако $s_n(x,k)$ и $c_n(x,k)$ са решенията на уравненията (1.7.1), за които

$$s_n(0,k)=0,\ s_n'(0,k)=1,\ c_n(0,k)=1,\ c_n'(0,k)=0,$$

то за $x \geq y$ функцията R_- може да се представи с формулата

$$\begin{aligned}
R_-(x,y,k) &= 4k\prod_{n=1}^{2}\{s_n(x,k)c_n(y,k)-c_n(x,k)s_n(y,k)\}\\
&+ \alpha^{-1}(k)F^-(x,k)F^+(y,k).
\end{aligned}$$

Ще отбележим, че в горната формула първият член е нечетна функция по k.

Следващата теорема е основният резултат в този параграф.

Теорема 1.7.1. *Да построим системите* $\{F^+\}$ *и* $\{F^-\}$, *съответстващи на* (1.7.1):

$$F^\pm(x,k),\quad k\in\mathbb{R}\cup\sigma,\quad \dot{F}_j^\pm=\dot{F}^\pm(x,k_j),\quad k_j\in\sigma''. \tag{1.7.5}$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) *Всяка функция $f(x) \in L_2^1$ е еднозначно определена от коефициентите на разлагане*

$$
\begin{aligned}
(f, F^+(k)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F^+(x,k) dx, \quad k \in \mathbb{R} \cup \sigma, \\
(f, \dot{F}_j^+) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \dot{F}_j^+(x) dx \quad k_j \in \sigma''
\end{aligned}
\tag{1.7.6}
$$

чрез формулата

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} f(y) dy \\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} F^-(x,k)(f, F^+(k)) \alpha^{-1}(k) dk + \sum{}' \alpha_{n,j}^{-1} F_{n,j}^-(x)(f, F_{n,j}^+) \\
&+ \sum{}'' 2\ddot{\alpha}_j^{-1} \{ \dot{F}_j^-(x)(f, F_j^+) + F_j^-(x)[(f, \dot{F}_j^+) - \dddot{\alpha}_j \, (3\ddot{\alpha}_j)^{-1}(f, F_j^+)] \}.
\end{aligned}
\tag{1.7.7}
$$

Тук $\dot{\alpha}_{n,j} = \dot{\alpha}(k_{n,j})$, $F_{n,j}^-(x) = F^-(x, k_{n,j})$, *и т.н.; сумата в* $\sum{}'$ *е върху всички* $k_{n,j} \in \sigma'$, *а в* $\sum{}''$, *върху* $k_j \in \sigma''$. *Интегралите* (1.7.6) *са абсолютно сходящи и сходимостта в* (1.7.7) *е равномерна по x във всеки краен интервал Δ. Освен това, при $f \in L^2$ границата е абсолютно сходящ интеграл.*

(ii) *Нека $f_1(R;x)$ е производната по x на функцията в дясната страна на* (1.7.7) *при $R < \infty$:*

$$
f_1(R;x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} F_x^-(x,k)(f, F^+(k)) \alpha^{-1}(k) dk + \dots \tag{1.7.8}
$$

и нека

$$
f_2(R;x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{R} F^-(x,k)[f, F^+(k)] \alpha^{-1}(k) dk + \dots, \tag{1.7.9}
$$

където

$$
[f, F^+(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F_x^+(x,k) dx. \tag{1.7.10}
$$

Тогава са в сила следните формули:

$$
\lim_{R\to\infty} \sup_{x\in\Delta} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2ik(y-x)} dy \right] dk - f_l(R;x) \right| = 0, \quad l = 1, 2. \tag{1.7.11}
$$

Доказателство. Да означим с γ_R контура в равнината на k състоящ се от отсечката $[-R, R]$ и полуокръжността $k = R\exp(i\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, $R > \max \kappa_{n,j}$, ориентиран обратно на часовниковата стрелка. Можем да пресметнем интеграла

$$I_R(f;x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} R_-(x,y,k)f(y)dy\right]dk \tag{1.7.12}$$

по два различни начина. Използвайки изброените по-горе свойства на функцията $R_-(x,y,k)$ можем да пресметнем (1.7.12) посредством равенствата:

$$f_n^+(x,k_{n,j}) = b_{n,j}\, f_n^-(x,k_{n,j}), \quad k_{n,j} \in \sigma$$

и теоремата за резидуумите. От друга страна, можем да пресметнем $I_R(f;x)$ чрез директно интегриране по контура γ_R при $R \to \infty$. В резултат на сравняването на получените две стойности намираме формулата за разложение (1.7.7). По подобен начин, замествайки в (1.7.12) вместо R_- нейните производни относно x и y, получаваме твърдението (ii). С това доказателството е завършено.

Следвайки горната схема с $R_+(x,y,k) = -R_-(y,x,k)$ се получава следната теорема:

Теорема 1.7.2. *При означенията в Теорема* 1.7.1, *за всяко* $f \in L_2^1$ *е в сила следното разложение:*

$$\begin{aligned} -\int_x^{\infty} f(y)dy &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F^+(x,k)(f,F^-(k))\alpha^{-1}(k)dk - \sum{}' \alpha_{n,j}^{-1}F_{n,j}^+(x)(f,F_{n,j}^-) \\ &- \sum{}'' 2\ddot{\alpha}_j^{-1}\{\dot{F}_j^+(x)(f,F_j^-) + F_j^+(x)[(f,\dot{F}_j^-) - \dddot{\alpha}_j\,(3\ddot{\alpha}_j)^{-1}(f,F_j^-)]\}. \end{aligned}$$

Валидни са също така и формулите, аналогични на тези в (1.7.8)–(1.7.12).

1.8 Операторите $\Lambda_{\pm}$ и техните приложения

1. Операторите $\Lambda_{\pm}$ и $(\Lambda_{\pm} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$. С непосредствена, макар и малко дълга, проверка, може да се покаже, че ако производните $v_n'(x)$ са от L^1, тогава произведенията $F^{\pm}(x,k) = f_1^{\pm}(x,k) f_2^{\pm}(x,k)$ на решенията на Йост удовлетворяват интегро-диференциалните уравнения

$$\Lambda_+ F^+(x,k) = k^2 F^+(x,k), \quad \Lambda_- F^-(x,k) = k^2 F^-(x,k), \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \quad (1.8.1)$$

където операторите $\Lambda_{\pm}$ са дефинирани като

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{4}\left\{ -D^2 + 2s(x) - \int_{\pm\infty}^{x} dy\, s'(y) - \int_{\pm\infty}^{x} dy\, \Delta(y) \int_{\pm\infty}^{y} dz\, \Delta(z) \right\},$$

където $s(x) = v_1(x) + v_2(x)$, $\Delta(x) = v_1(x) - v_2(x)$, $D = d/dx$. Да въведем още операторите

$$\Lambda_{\pm}^{*} = \frac{1}{4}\left\{ -D^2 + 2s(x) + s'(x) \int_{\mp\infty}^{x} dy - \Delta(x) \int_{\mp\infty}^{x} dy\, \Delta(y) \int_{\mp\infty}^{y} dz \right\}, \quad (1.8.2)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\pm} \equiv D\Lambda_{\pm} = \frac{1}{4}\left\{ -D^3 + s'(x) + 2s(x)D - \Delta(x) \int_{\pm\infty}^{x} dy\, \Delta(y) \right\}. \quad (1.8.3)$$

Както обикновено, $\mathcal{S}$ е пространството на Шварц от безкрайно-гладки функции, бързо намаляващи при $|x| \to \infty$. Да означим също

$$\mathcal{S}^{\pm} = \{ f(x) : \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad f' \in \mathcal{S} \}. \quad (1.8.4)$$

В този параграф ще използваме формулите за разлагане, получени в параграф 1.7, за да построим резолвентите на операторите $\Lambda_{\pm} - \lambda I$ и спектралните разложения за рационални функции на $\Lambda_{\pm}$. В предвид на приложенията на тези резултати в теорията на еволюционните уравнения решими чрез ОЗР (вж. глава 2 по-долу), по-нататък ние се ограничаваме със случая, когато потенциалите са от $\mathcal{S}$ и операторите $\Lambda_{\pm}$, $\Lambda_{\pm}^{*}, \tilde{\Lambda}_{\pm}$ са с дефиниционна област $\mathcal{S}$. Очевидно, за всяко $f \in \mathcal{S}$ имаме

$$\Lambda_{\pm}^{*} f,\ \tilde{\Lambda}_{\pm} f \in \mathcal{S},\ \Lambda_{\pm} f \in \mathcal{S}^{\pm}. \quad (1.8.5)$$

Директно се проверява валидността на следната

Лема 1.8.1. *Операторите* $\Lambda_\pm^*$ *са спрегнати съответно на* $\Lambda_\pm$ *по отношение на скаларното произведение* (3.1.11)*, а операторът* Λ_+ *е спрегнат на* Λ_- *относно косо-скаларното произведение*

$$[f,g]=(f,Dg)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)\,dx=-[g,f], \tag{1.8.6}$$

а именно,

$$(f,\Lambda_\pm g)=(\Lambda_\pm^* f,g), \quad [f,\Lambda_- g]=[\Lambda_+ f,g], \quad f,\, g\in\mathcal{S}. \tag{1.8.7}$$

Освен това

$$D\Lambda_\pm^n f=(\Lambda_\mp^*)^n Df\in\mathcal{S}, \quad f\in\mathcal{S},\;\; n=1,2,\dots \tag{1.8.8}$$

Тъй като (1.8.1) водят до уравненията

$$\tilde\Lambda_+ F^+(x,k)=k^2 DF^+(x,k), \quad \tilde\Lambda_- F^-(x,k)=k^2 DF^-(x,k), \tag{1.8.9}$$

посредством (1.8.7) и (1.8.8) получаваме:

Следствие 1.8.2. *За всяко* $f\in\mathcal{S}$*, реално* k *и цяло* $n\ge 1$ *са в сила следните равенства:*

$$k^{2n}(f,F^\pm(k))=(\Lambda_\pm^{*n} f,F^\pm(k)), \quad k^{2n}[f,F^\pm(k)]=-[F^\pm(k),\Lambda_\mp^n f]. \tag{1.8.10}$$

Да означим с $\tilde R_-$ функцията

$$\tilde R_-(x,y,\lambda)=-(2\sqrt{\lambda})^{-1}R_-(x,y,k), \quad k=\sqrt{\lambda},\;\; \operatorname{Im}k\ge 0, \tag{1.8.11}$$

където R_- се дава с (1.7.3).

Теорема 1.8.3. *Интегралният оператор дефиниран чрез*

$$\tilde R_-(\lambda)f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde R_-(x,y,\lambda)f(y)dy, \quad f\in L_2^1,$$

определя при

$$\lambda\in\rho(\Lambda_-)=\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^+\cup\{\lambda_{n,j}=k_{n,j}^2\}_{j=1}^{N_n}), \quad k_{n,j}\in\sigma, \tag{1.8.12}$$

резолвентата на оператора $\tilde{\Lambda}_- - \lambda D$, т.е.

$$(\tilde{\Lambda}_- - \lambda D)\tilde{R}_-(\lambda)f = \tilde{R}_-(\lambda)(\tilde{\Lambda}_- - \lambda D)f = f, \quad f \in \mathcal{S}. \tag{1.8.13}$$

Освен това

$$\tilde{R}_-(\lambda)f \in \mathcal{S}^-, \ \ f \in \mathcal{S} \ \text{ and } \lambda \in \rho(\Lambda_-). \tag{1.8.14}$$

Тази теорема е следствие на Теорема 1.7.1, уравненията (1.8.1), (1.8.9) и следващата лема, която дава спектралното разложение на $\tilde{R}_-(\lambda)$.

Лема 1.8.4. *При означенията от Теорема* 1.7.1*, за всяко z, за което $z^2 = \lambda$ и $\operatorname{Im} z > 0$, $z \neq k_{n,j} \in \sigma$, е изпълнено*

$$\tilde{R}_-(x,y,z^2) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^-(x,k)F^+(y,k)}{(k^2-z^2)\alpha(k)}dk + {\sum}' \frac{F^-_{n,j}(x)F^-_{n,j}(y)}{\dot{\alpha}_{n,j}(k^2_{n,j}-z^2)}$$
$$+{\sum}'' \frac{2}{\ddot{\alpha}_j}\left\{ \frac{\partial}{\partial k}\frac{F^-(x,k)}{k^2-z^2}\bigg|_{k=k_j} F^+_j(y) + \frac{F^-_j(x)}{k^2_j - z^2}[\dot{F}^+_j(y) - \frac{\dddot{\alpha}_j}{3\ddot{\alpha}_j}F^+_j(y)] \right\}. \tag{1.8.15}$$

Формулата (1.8.15) е получена чрез пресмятане на контурния интеграл

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_R} R_-(x,y,k)(k^2-z^2)^{-1}dk$$

по същия начин като при доказателството на Теорема 1.7.1.

Забележка 1.8.5. Спектърът на оператора $\tilde{\Lambda}_- - \lambda D$ (определен като допълнението в λ-равнината на резолвентното множество $\rho(\Lambda_-)$) е както следва:

(i) двоен и непрекъснат при $\lambda \in \mathbb{R}^+$ със съответни собствени функции ограничените решения $F^-(x, \pm k)$ на уравнението $(\tilde{\Lambda}_- - k^2 D)F^-(x, \pm k) = 0$;

(ii) има краен брой прости собствени значения $\lambda_{n,j} = k^2_{n,j}$, $k_{n,j} \in \sigma'$ със съответни собствени функции $F^-_{n,j}(x) \in \mathcal{S}^-$;

(iii) двойните собствени значения са $\lambda_j = k^2_j$, $k_j \in \sigma''$ със собствени функции $F^-_j(x) \in \mathcal{S}$ и асоциирани функции $\dot{F}^-_j(x) \in \mathcal{S}^-$.

Да отбележим също, че от (1.8.1) и (1.8.7) следва

$$k^2(f, F^+(k)) = (f, \Lambda_+ F^+(k)) = (\Lambda_+^* f, F^+(k)),\ \ k \in \mathbb{R} \cup \sigma.$$

В резултат получаваме, че формулите за разлагане (1.7.8), (1.7.11) при $f \to \Lambda_+^* f$ водят до разложението

$$\Lambda_+^* f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 F_x^-(x,k)(f, F^+(k))\alpha^{-1}(k)dk + \dots \tag{1.8.16}$$

Последната формула може да се разглежда само като формално разлагане на единицата за оператора Λ_+^*, тъй като не можем да запишем уравнението (1.8.9) във вида $\Lambda_\mp^* DF^\pm(x,k) = k^2 DF^\pm(x,k),\ k \in \mathbb{R}$. Подобен е смисълът на равенството (1.8.18) по-долу.

Да изложим някои следствия от Теорема 1.8.3. Първо имаме

Следствие 1.8.6. *При* $\lambda \in \rho(\Lambda_-)$ *(вж.* (1.8.12)*) са в сила представянията*

$$(\tilde{\Lambda}_+ - \lambda D)^{-1} = \tilde{R}_+(\lambda), \qquad \tilde{R}_+(\lambda)f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_-(y,x,\lambda)f(y)dy.$$

Освен това

$$(\Lambda_\pm - \lambda I)^{-1} = \tilde{R}_\pm(\lambda)D \stackrel{\text{def}}{=} R_\pm(\lambda), \tag{1.8.17}$$

$$(\Lambda_\mp^* - \lambda I)^{-1} = D\tilde{R}_\pm(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} R_\mp^*(\lambda). \tag{1.8.18}$$

Друго следствие се получава в резултат на факта, че (1.8.13) и (1.8.14) водят до (вж. [...]) формулата на Хилберт $\tilde{R}_-(\lambda) - \tilde{R}_-(\mu) = (\lambda-\mu)\tilde{R}_-(\lambda)\tilde{R}_-(\mu)$, $\lambda,\ \mu \in \rho(\Lambda_-)$. Така получаваме

Следствие 1.8.7. *Операторът* $\tilde{R}_-(\lambda)$ *е аналитична функция на* $\lambda \in \rho(\Lambda_-)$*, за която*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\tilde{R}_-(\lambda) = n!\, \tilde{R}_-(\lambda)(D\tilde{R}_-(\lambda))^n,\ \ n = 1, 2, \dots.$$

Освен това от (1.8.17) *и* (1.8.18) *следва*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\pm(\lambda) = n!\,(R_\pm(\lambda))^{n+1}, \quad \frac{d^n}{d\lambda^n}R_\pm^*(\lambda) = n!\,(R_\pm^*(\lambda))^{n+1}. \tag{1.8.19}$$

Да разгледаме рационалната функция

$$\Omega(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m,s} c_{m,s}(\lambda - \mu_m)^{-s}, \quad \mu_m \in \rho(\Lambda_-), \tag{1.8.20}$$

където $P(\lambda)$ е полином и сумирането е върху крайно множество.

Теорема 1.8.8. *Нека $\Omega(\Lambda)$ е операторът, съответстващ на* (1.8.20)*:*

$$\Omega(\Lambda) = P(\Lambda) + \sum_{m,s} c_{m,s}(\Lambda - \mu_m I)^{-s}. \tag{1.8.21}$$

Тогава при означенията от Теорема 1.7.1 *за всяко $f \in \mathcal{S}$ е в сила следното спектрално разложение:*

$$\Omega(\Lambda_-)f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega(k^2)F^-(x,k)[F^+(k), f]\alpha^{-1}(k)dk$$

$$+ \sum{}' \, \Omega(k_{n,j}^2)\dot{\alpha}_{n,j}^{-1}F_{n,j}^-(x)[F_{n,j}^+, f] + \sum{}'' \, 2\ddot{\alpha}_j^{-1} \times \tag{1.8.22}$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial k}\Omega(k^2)F^-(x,k)|_{k=k_j}[F_j^+, f] + \Omega(k_j^2)F_j^-(x)\{[\dot{F}_j^+, f] - \dddot{\alpha}_j \, (3\ddot{\alpha}_j)^{-1}[F_j^+, f]\} \right\}.$$

Освен това

$$D\Omega(\Lambda_-)f = P(\Lambda_+^*)Df + \sum_{m,s} c_{m,s}(\Lambda_+^* - \mu_m I)^{-s}Df \in \mathcal{S} \tag{1.8.23}$$

и за всяко $f \in \mathcal{S}$ са изпълнени равенствата

$$(\Omega(\Lambda_+^*)f, F^+(k)) = \Omega(k^2)(f, F^+(k)), \quad k \in \mathbb{R} \cup \sigma, \tag{1.8.24}$$

$$(\Omega(\Lambda_+^*)f, \dot{F}_j^+) = (f, \frac{\partial}{\partial k}\Omega(k^2)F^+(k)|_{k=k_j}), \quad k_j \in \sigma''. \tag{1.8.25}$$

Доказателство. От Следствие 1.8.2 и свойствата (вж. параграф 1.1)

$$\alpha(k) \neq 0, \;\; k \in \mathbb{R} \setminus 0, \;\; \alpha(k) = k^{-1}(1 + o(1)), \;\; |k| \to \infty, \tag{1.8.26}$$

следва, че функцията под знака на интеграла в (1.7.7) е безкрайно-диференцируема по x и намалява равномерно по $x \in \mathbb{R}$ при $|k| \to \infty$ по-бързо от всяка степен k^{-n}, $n = 1, 2, ...$ Затова, чрез прилагане на оператора Λ_-^s към двете страни на (1.7.7) получаваме (1.8.22), където $\Omega(\Lambda_-) = \Lambda_-^s$. Освен това, след като диференцираме равенството (1.8.11) $s-1$ пъти относно λ и вземем в предвид (1.8.15), (1.8.17) и (1.8.19), получаваме (1.8.22), където $\Omega(\Lambda_-) = (\Lambda_- - \mu I)^{-s}$. При $\Omega(\Lambda_-) = P(\Lambda_-)$ формулата (1.8.23) е очевидна поради (1.8.5) и (1.8.8), а в общия случай е резултат на (1.8.14) и Следствие 1.8.7. Равенствата (1.8.24) и (1.8.25) се получават лесно от (1.8.1), (1.8.6) и (1.8.18). С това теоремата е доказана.

2. Зависимости между Вронскиани и теорема за единственост в ОЗР. Да съпоставим на уравненията (1.7.1) на съответните данни на разсейване $\mathbf{s}^{\pm}(v_n)$:

$$\mathbf{s}^{+}(v_n) = \{r_n^{+}(k) = \frac{b_n(-k)}{a_n(k)},\ \ k \in \mathbb{R};\ \ k_{n,j};\ \ C_{n,j}^{+} = -i\frac{1}{b_{n,j}\dot{a}_{n,j}},\ j = 1, \ldots, N_n\} \tag{1.8.27}$$

и

$$\mathbf{s}^{-}(v_n) = \{r_n^{-}(k) = \frac{b_n(k)}{a_n(k)},\ \ k \in \mathbb{R};\ \ k_{n,j};\ \ C_{n,j}^{-} = -\frac{ib_{n,j}}{\dot{a}_{n,j}},\ j = 1, \ldots, N_n\}.$$

Посредством (1.8.27) дефинираме

$$\begin{array}{rclcrcl} \Delta^{-}(k) & = & r_1^{-}(k) - r_2^{-}(k), & \quad & s^{-}(k) & = & r_1^{-}(k) + r_2^{-}(k) \\ \Delta_j^{-} & = & C_{2,j}^{-} - C_{1,j}^{-}, & & s_j^{-} & = & C_{2,j}^{-} + C_{1,j}^{-}. \end{array} \tag{1.8.28}$$

Теорема 1.8.9. *Функциите*

$$\Delta(x) = v_1(x) - v_2(x), \quad w(x) = s'(x) - \Delta(x)\int_{-\infty}^{x} \Delta(y)dy$$

имат следните разложения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} \Delta(y)dy &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^{-}(k)F^{-}(x,k)dk \\ &+ \sum{}'(-1)^n 2C_{n,j}^{-}F_{n,j}^{-}(x) + \sum{}'' 2\Delta_j^{-}F_j^{-}(x), \end{aligned} \tag{1.8.29}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} w(y)dy &= \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ks^{-}(k)F^{-}(x,k)dk \\ &+ \sum{}' 4ik_{n,j}C_{n,j}^{-}F_{n,j}^{-}(x) + \sum{}'' 4ik_j s_j^{-}F_j^{-}(x). \end{aligned} \tag{1.8.30}$$

Доказателството се получава непосредствено от Теорема 1.7.1 и следващата лема:

Лема 1.8.10. (вж. [....]) *За* $\Delta(x)$ *и* $w(x)$ *коефициентите на разлагане в* (1.7.7) *се определят от данните на разсейване както следва*:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^-(k) = (2i\alpha(k))^{-1}(\Delta, F^+(k)), \quad (-1)^n\, 2C^-_{n,j} = \dot{\alpha}^{-1}_{n,j}(\Delta, F^+_{n,j}), \\ (\Delta, F^+_j) = 0, \quad \Delta^-_j = \ddot{\alpha}^{-1}_j(\Delta, \dot{F}^+_j), \quad k_j \in \sigma'', \end{aligned}\right\} \tag{1.8.31}$$

$$\left.\begin{aligned} -2iks^-(k) = (2i\alpha(k))^{-1}(w, F^+(k)), \quad 4ik_{n,j}C^-_{n,j} = \dot{\alpha}^{-1}_{n,j}(w, F^+_{n,j}), \\ (w, F^+_j) = 0, \quad 2ik_j s^-_j = \ddot{\alpha}^{-1}_j(w, \dot{F}^+_j), \quad k_j \in \sigma''. \end{aligned}\right\} \tag{1.8.32}$$

Разлагането (1.8.29) води директно до изложеното по-долу

Следствие 1.8.11. (Теорема за единственост в обратната задача на разсейване) *Данните на разсейване* $\mathbf{s}^-(v)$ *или* $\mathbf{s}^+(v)$ *определят еднозначно потенциала* $v(x)$ *в* (3.1.1).

Да предположим, че $\Omega(\lambda)$ е рационална функция както в (1.8.20) и че операторът $\Omega(\Lambda^*_+)$ е дефиниран в (1.8.21) с Λ заместено от Λ^*_+. Тогава от Теорема 1.8.8 и (1.8.29), (1.8.30) получаваме

Следствие 1.8.12. *Валидна е следната формула*:

$$\begin{aligned} \Delta(x) + \Omega(\Lambda^*_+)w(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Delta^-(k) - 2ik\Omega(k^2)s^-(k)]F^-_x(x,k)dk \\ + \sum\nolimits'[(-1)^n + 2ik_{n,j}\Omega(k^2_{n,j})]C^-_{n,j}F^-_{n,j,x}(x) + \sum\nolimits''[2\Delta^-_j + 4ik_j\Omega(k^2_j)s^-_j]F^-_{j,x}(x). \end{aligned} \tag{1.8.33}$$

Теорема 1.8.13. *Необходимите и достатъчни условия щото потенциалите в* (1.7.1) *да удовлетворяват уравнението*

$$\Delta(x) + \Omega(\Lambda_+^*)w(x) = 0 \tag{1.8.34}$$

са:

$$\begin{aligned} \Delta^-(k) - 2ik\Omega(k^2)s^-(k) &= 0, \qquad \Omega(k^2) = \overline{\Omega(k^2)}, \quad k \in \mathbb{R}, \\ (-1)^n + 2ik_{n,j}\Omega(k_{n,j}^2) &= 0, \qquad k_{n,j} \in \sigma', \\ \Delta_j^- + 2ik_j\Omega(k_j^2)s_j^- &= 0, \qquad k_j \in \sigma'', \end{aligned} \tag{1.8.35}$$

където означенията са както в Теорема 1.8.9.

Доказателство. Достатъчността е очевидна поради (1.8.33) (да отбележим, че второто равенство в (1.8.35) следва от (3.1.10)). Необходимостта пък се получава (вж. също [35]) от Лема 1.8.10, като приложим (1.8.24) и (1.8.25).

Глава 2.Уравнение на Кортевег–де Фриз

2.1. Уравнение на Бюргерс. Смяна на Коул - Хопф.

Нека разгледаме задачата на Коши за уравнението

$$c_t(t,x) + c(t,x)c_x(t,x) = \nu c_{xx}(t,x), \quad c(0,x) = F(x),\ -\infty < x < \infty,\ t \geq 0, \tag{2.1.1}$$

където ν е параметър. Това уравнение се нарича уравнение на Бюргерс. Основният резултат тук е доказателството на следната

Теорема на Хоул- Копф Решението на (2.1.1) се дава с формулата

$$c(t,x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-G/2\nu}\, d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu}\, d\eta}, \tag{2.1.2}$$

където

$$G(\eta; x, t) = \int_0^\eta F(\eta')\, d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}. \tag{2.1.3}$$

Доказателство ще извършим посредством смяната

$$c = -2\nu\varphi_x/\varphi, \tag{2.1.4}$$

която е удобно да направим в два етапа. Отначало ще положим в (2.1.1)

$$c = \psi', \tag{2.1.5}$$

което води до уравнението

$$\psi_{tx} + \psi_x\psi_{xx} = \nu\psi_{xxx}. \tag{2.1.6}$$

Интегрирайки по x, получаваме

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \nu\psi_{xx}. \tag{2.1.6}$$

Сега полагаме

$$\psi = -2\nu \ln\varphi. \tag{2.1.7}$$

Получаваме уравнението на топлопроводността

$$\varphi_t(x,t) = \nu\varphi_{xx}(x,t) \quad \varphi(x,0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.1.8}$$

Както е добре известно, решението му се дава с формулата на Поасон:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4\nu t}\right) d\eta. \tag{2.1.9}$$

От тук, за да получим (2.1.2) остава да отбележим, че

$$\Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi)\, d\xi\right). \tag{2.1.10}$$

Теоремата е доказана.

За пълнота на изложението ще приведем извода на (2.1.9). Имаме ($\nu = 1$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4t}\right)\right] d\eta. \tag{2.1.11}$$

Сега остава да отбележим, че непосредствено се проверява

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4t}\right) = 0, \quad t > 0. \tag{2.1.12}$$

За да получим началното условие е удобно да направим в (2.1.9) смяната

$$\frac{\eta - x}{2\sqrt{t}} = \xi, \tag{2.1.13}$$

от където получаваме

$$\lim_{t\to 0} \varphi(x,t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \Phi(x + 2\xi\sqrt{t})\, d\xi = \Phi(x). \tag{2.1.14}$$

2.2. Уравнение на Кортевег- де Фриз. Теорема за единственост.

Имаме задачата на Коши за уравнението

$$v_t(x,t) = 6v(x,t)v_x(x,t) - v_{xxx}(x,t), \quad v(x,0) = v_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \qquad (2.2.1)$$

където $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е пространството на Шварц от безкрайно диференцируеми функции, клонящи към нула заедно с производните си при $|x| \to \infty$.

Ще отбележим две характерни свойства на уравнението на КдФ, доказателството на които ще приведем по-късно.

Твърдение 1 Функцията

$$v(x,t) = \frac{-2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t + \varphi)}, \quad \kappa > 0,\ \varphi = Const. \qquad (2.2.2)$$

наричана солитон, е решение на КдФ.

Докато горното твърдение може да се провери непосредствено и е било известно още от 19 век, то следващото е едно далеч нетривиално обобщение, което в опеделяща степен оправдава интереса към това уравнение.

Твърдение 2 (N-солитонно решение.) Нека са зададени $2N$ константи m_j, κ_j такива, че $m_j > 0, \kappa_j > 0$, $\kappa_j \neq \kappa_l, j, l = 1, 2 \dots N$. Тогава функцията

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \triangle(x,t),$$

$$\triangle(x,t) = Det\left(\delta_{jl} + m_j^2 \frac{e^{-(\kappa_j+\kappa_l)x + 8\kappa_l^3 t}}{\kappa_j + \kappa_l}\right)$$

е решение на уравнението на Кортевег–де Фриз.

2.2. б. Теорема за единственост.

Нека $u(x,t)$ е друго решение на уравнението (2.2.1), т.е. имаме

$$u_t(x,t) = 6u(x,t)u_x(x,t) - u_{xxx}(x,t), \quad u(x,0) = v_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \qquad (2.2.18)$$

Означаваме $w = v - u$ и изваждаме (2.2.18) от (2.2.1). Получаваме

$$w_t(x,t) = 6w(x,t)v_x(x,t) + 6u(x,t)w_x(x,t) - w_{xxx}(x,t). \qquad (2.2.19)$$

Умножаваме по w и интегрираме по x от $-\infty$ до ∞. Получаваме

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(6w^2v_x + 6uw_xw - w_{xxx}w)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(6v_x - 3u)w^2\,dx, \tag{2.2.20}$$

тъй като

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{xxx}w\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} w_{xx}w_x\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}w_x^2\,dx = 0. \tag{2.2.21}$$

Нека означим

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx = E(t), \quad m = \max_x|6v_x - 3u|. \tag{2.2.22}$$

Тогава от (2.2.20) получаваме

$$\frac{d}{dt}E(t) \le mE(t) \quad \Rightarrow \quad E(t) \le E(0)e^{mt}. \tag{2.2.23}$$

Следователно, ако $E(0) = 0$ то $E(t) = 0$, $t > 0$, което и трябваше да докажем.

2.3. Скобка на Поасон- Гарднер.

Нека $F = F(v)$, $H = H(v)$ са функционали над пространството на Шварц със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{2.3.3}$$

Градиент на функционала F ще определим по формулата

$$G_F = \frac{\partial F}{\partial v} : \frac{d}{d\varepsilon}F(v+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = (G_F(v), h). \tag{2.3.4}$$

Скобката на Поасон–Гарднер определяме като

$$[F,H] = (G_F, \partial G_H), \quad \partial = \frac{d}{dx}. \tag{2.3.5}$$

Теорема Уравнението на Кортевег- де Фриз е хамилтонова система:

$$v_t = \partial\frac{\partial H}{\partial v}, \quad H(v) = \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{v_x^2}{2} + v^3)\,dx. \tag{2.3.6}$$

Преди да докажем тази теорема ще проверим, че по-горе дефинираната скобка удовлетворява условията 1. Кососиметричност

$$[F, G] = -[G, F]. \tag{2.3.6a}$$

2. Линеиност

$$[\alpha F + \beta G, H] = \alpha[F, H] + \beta[G, H] \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.3.6b}$$

3. Тъждество на Якоби

$$[F, [F, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0. \tag{2.3.6c}$$

Първите две условия са очевидни. (Кососиметричността се проверява интегрирайки по части.) Остава да докажем тъждеството на Якоби. Имаме

$$(G_{[F,H]}, h) = \frac{d}{d\varepsilon}[F(v+\varepsilon h), H(v+\varepsilon h)]|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}(G_F(v+\varepsilon h), \partial G_H(v+\varepsilon h))|_{\varepsilon=0}$$

$$= (G'_F(v)h, \partial G_H(v)) + (G_F(v), \partial G'_H(v)h)). \tag{2.3.7}$$

Ще покажем, че операторите G'_F и G'_H са симетрични, т.е.

$$(G'_F h, f) = (h, G'_F f). \tag{2.3.8}$$

Отчитайки последното равенство имаме

$$(G_{[F,H]}, h) = (h, G'_F(v)\partial G_H(v)) - (h, G'_H(v)\partial G_F(v))). \tag{2.3.9}$$

Следователно

$$G_{[F,H]} = G'_F \partial G_H - G'_H \partial G_F. \tag{2.3.10}$$

Ще докажем (2.3.8). Производна на Фреше означава, че за всеки две функции v и h съществува производната

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(v + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = (G_F(v), h), \tag{2.3.11}$$

която е линеен функционал относно h при фиксирано v. Нека $G'_F(v)$ е втората производна на F, т.е. оператора определен с равенството

$$\frac{d}{d\eta}G_F(v + \eta w)|_{\eta=0} = G'_F(v)w. \tag{2.3.12}$$

Да подставим (2.3.11) в (2.3.12). Имаме

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(v+\varepsilon h+\eta w)|_{\varepsilon=0,\eta=0}=\frac{\partial}{\partial\eta}(G_F(v+\eta w),h)|_{\eta=0}=(G'_F(v)w,h), \tag{2.3.13}$$

но

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{2.3.14}$$

и следователно

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}F(v+\varepsilon h+\eta w)|_{\varepsilon=0,\eta=0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(G_F(v+\varepsilon h),w)|_{\varepsilon=0}=(G'_F(v)h,w). \tag{2.3.15}$$

Сравнявайки последното равенство с (2.3.13) получаваме (2.3.8). Сега, използвайки (2.3.10), ще получим

$$[[F,H],K]+[[H,K],F]+[[K,F],H]=(G'_F\partial G_H-G'_H\partial G_F,\partial G_K)+$$

$$(G'_H\partial G_K-G'_K\partial G_H,\partial G_F)+(G'_K\partial G_F-G'_F\partial G_K,\partial G_H)=0, \tag{2.3.16}$$

където в последното равенство използвахме (2.3.8). Тъждеството на Якоби е доказано.

Сега за да докажем (2.3.6) остава да отбележим, че

$$G_H=-v_{xx}+3v^2. \tag{2.3.17}$$

2.4. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег - де Фриз

Основният резултат тук е доказателството на следната важна

Теорема 1. За уравнението на КдФ $v_t = 6vv_x - v_{xxx}$ е справедливо следното представяне

$$L_t = [A, L], \quad \left(L_t = \frac{\partial L}{\partial t} \right) \tag{2.4.1}$$

наричано **представяне на Лакс** , където операторите

$$L = -D^2 + v(x,t), \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v', \quad D = \frac{d}{dx}. \tag{2.4.2}$$

Равенството (2.4.1) следва да се разбира като тъждество

$$L_t f(x) = ALf(x) - LAf(x),$$

което е изпълнено за всяка функция $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, t разглеждаме като параметър. В частност, от

$$Lf(x) = -f''(x) + v(x,t)f(x)$$

следва, че

$$L_t f(x) = v_t(x,t)f(x),$$

т.е. $L_t = v_t(x,t)$ е оператор на умножение на фукцията $v_t(x,t)$. Твърдението на теоремата е, че при така избрания оператор A, операторът $AL-LA$ е оператор на умножение на функцията $6v(x,t)v_x(x,t) - v_{xxx}(x,t)$.

Доказателството на тази теорема, което се свежда до непосредствена проверка, ще приведем в края на този параграф.

Преди това ще обясним как от някои общи съображения се получава равенството (2.4.1). За целта ще напомним дефиницията на

Унитарна еквивалентност. Нека имаме семейство самоспрегнати оператори

$$L(t), \quad L(t) = L^*(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.3}$$

и нека $U(t)\, t \in \mathbb{R}^+$ е семейство унитарни оператори

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I, \quad U(0) = I. \tag{2.4.4}$$

Ще казваме, че операторите $L(t)$ са унитарно - еквивалентни, ако

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4.5}$$

Лема 1. Нека $U(t)$ е семейство унитарни оператори, т.е. удовлетворява условията (2.4.4). Тогава $U(t)$ удовлетворява уравнението

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad \dot{} = d/dt, \tag{2.4.6}$$

където $A(t)$ е кососиметричен оператор

$$A^*(t) = -A(t). \tag{2.4.7}$$

Доказателство. Диференцирайки по t първото от равенствата в (2.4.4), получаваме

$$\dot{U}^*(t)U(t) + U^*(t)\dot{U}(t) = 0.$$

От тук, умножавайки отляво по $U(t)$, имаме

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad A(t) = -U(t)\dot{U}^*(t). \tag{2.4.8}$$

Нека диференцираме второто равенство в (2.4.4). Получаваме

$$\dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) = 0,$$

което заедно с $A^*(t) = -\dot{U}(t)U^*(t)$ дава (2.4.7).

Теорема 2. Условието

$$\dot{L} = AL - LA = [A, L], \tag{2.4.9}$$

където оператора $A(t)$ е кососиметричен, т.е.$A^* = -A$ е необходимо и достатъчно за унитарната еквивалентност на семейството самоспрегнати оператори $L(t)$.

Доказателство. Диференцирайки (2.4.5) по t и отчитайки (2.4.7), (2.4.8), получаваме

$$\dot{U}^*LU + U^*\dot{L}U + U^*L\dot{U} = -U^*ALU + U^*LAU + U^*\dot{L}U = 0. \tag{2.4.10}$$

Като умножим отляво с U^* и отдясно с U получаваме (2.4.9), с което необходимостта на на условието (2.4.9) за унитарната еквивалентност на семейството от оператори $L(t)$ е доказана.Обратно, нека е изпълнено условието (2.4.9):

$$\dot{L} = AL - LA = [A, L] \tag{2.4.11}$$

и нека $U(t)$ е семейството унитарни оператори, удовлетворяващи уравнението

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad U(0) = I. \tag{2.4.12}$$

Тъй като $A^* = -A$, от тук следва, че

$$\dot{U}^*(t) = -U^*(t)A(t). \tag{2.4.13}$$

Нека сега умножим (2.4.11) отдясно на $U(t)$ и отляво на $U^*(t)$:

$$U^*\dot{L}U = U^*ALU - U^*LAU.$$

Отчитайки (2.4.12), (2.4.13), от последното равенство следва, че

$$U^*\dot{L}U = -\dot{U}^*LU - U^*L\dot{U},$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}(U^*LU) = 0.$$

Интегрирайки от 0 до t получаваме исканато равенство (2.4.5).Теоремата е доказана.

Забележка Спектърът на унитарно–еквивалентните оператори не зависи от t, т.е. ако $\lambda(0)$ е собствено значение на оператора $L(0): \ L(0)y(0) = \lambda(0)y(0)$, то $\lambda(0)$ е собствено значение и на оператора $L(t)$ със собствена функция

$$y(t) = U(t)y(0): \ L(t)y(t) = \lambda(0)y(t). \tag{2.4.14}$$

Действително от (2.4.5) имаме

$$U^*(t)L(t)U(t)y(0) = L(0)y(0) = \lambda(0)y(0).$$

Прилагайки към двете страни на последното равенство оператора $U(t)$ и отчитайки (2.4.4) получаваме (2.4.14). Нека отбележим още, че диференцирайки по t първото равенство в (2.4.10'), получаваме $y_t(t) = U_t(t)y(0)$, което заедно с (2.4.6) дава уравнението

$$y_t(t) = A(t)U(t)y(0) = A(t)y(t), \tag{2.4.15}$$

което определя еволюцията по t на решението $y(t)$ на уравнението (2.4.14).

Доказателство на теорема 1. Директно от (2.4.2) получаваме

$$L_t = v_t(x,t), \tag{2.4.16}$$

$$AL - LA = 2vD^3 + 3v'D^2 + 4D^3v - 6vDv - 6D^2vD + 6vD - 3D^2v'. \tag{2.4.17}$$

Сега нека отбележим, че

$$4D^3v = 4v''' + 12v''D + 12v'D^2 + 4vD^3,$$

$$-6vDv = -6vv' - 6v^2D,$$

$$-6D^2vD = -6v''D - 12v'D^2 - 6vD^3,$$

$$-3D^2v' = -3v''' - 6v''D - 3v'D^2.$$

Замествайки тези равенства в дясната страна на (2.4.17), получаваме

$$AL - LA = -6v(x,t)v_x(x,t) + v_{xxx}(x,t),$$

с което теоремата е доказана.

2.4. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег - де Фриз

Основният резултат тук е доказателството на следната важна

Теорема 1. За уравнението на КдФ $v_t = 6vv_x - v_{xxx}$ е справедливо следното представяне

$$L_t = [A, L], \quad \left(L_t = \frac{\partial L}{\partial t} \right) \tag{2.4.1}$$

наричано **представяне на Лакс** , където операторите

$$L = -D^2 + v(x,t), \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v', \quad D = \frac{d}{dx}. \tag{2.4.2}$$

Доказателството на тази теорема, което се свежда до непосредствена проверка, ще приведем в края на този параграф.

Забележка Равенството (2.4.1) следва да се разбира като тъждество

$$L_t f(x) = ALf(x) - LAf(x),$$

което е изпълнено за всяка функция $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, t разглеждаме като параметър. В частност, от

$$Lf(x) = -f''(x) + v(x,t)f(x)$$

следва, че

$$L_t f(x) = v_t(x,t)f(x),$$

т.е. $L_t = v_t(x,t)$ е оператор на умножение на фукцията $v_t(x,t)$. Твърдението на теоремата е, че при така избрания оператор A, операторът $AL-LA$ е оператор на умножение на функцията $6v(x,t)v_x(x,t) - v_{xxx}(x,t)$.

Унитарна еквивалентност Нека имаме семейство самоспрегнати оператори

$$L(t), \quad L(t) = L^*(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.3}$$

и нека $U(t)$ е семейство унитарни оператори

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I. \tag{2.4.4}$$

Ще казваме, че операторите $L(t)$ са унитарно - еквивалентни, ако

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{2.4.5}$$

Лема 1. Нека $U(t)$ е семейство унитарни оператори, т.е. удовлетворява условията (2.4.4). Тогава $U(t)$ удовлетворява уравнението

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad \dot{} = d/dt, \tag{2.4.6}$$

където $A(t)$ е кососиметричен оператор

$$A^*(t) = -A(t). \tag{2.4.7}$$

Доказателство. Диференцираме по t първото от равенствата в (2.4.4): $\dot{U}^*(t)U(t) + U^*(t)\dot{U}(t) = 0$ и умножаваме отляво по $U(t)$. Получаваме

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad A(t) = -U(t)\dot{U}^*(t). \tag{2.4.8}$$

Нека диференцираме второто равенство в (2.4.4). Получаваме $\dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) = 0$, което заедно с $A^*(t) = -\dot{U}(t)U^*(t)$ дава (2.4.7).

Теорема 2. Условието

$$\dot{L} = AL - LA = [A, L], \tag{2.4.9}$$

където оператора $A(t)$ е кососиметричен, т.е.$A^* = -A$ е необходимо и достатъчно за унитарна еквивалентност на семейството оператори $L(t)$.

Доказателство. Диференцирайки (2.4.5) по t и отчитайки (2.4.7), (2.4.8), получаваме

$$\dot{U}^*LU + U^*\dot{L}U + U^*L\dot{U} = -U^*ALU + U^*LAU + U^*\dot{L}U = 0. \tag{2.4.10}$$

Като умножим отляво с U^* и отдясно с U получаваме (2.4.9), с което необходимостта на на условието (2.4.9) за унитарната еквивалентност на семейството от оператори $L(t)$ е доказана. Достатъчността се доказва аналогично и тук няма го привеждаме.

Забележка Спектърът на унитарно еквивалентните оператори не зависи от t, т.е. ако $\lambda(0)$ е собствено значение на оператора $L(0): \ L(0)y(0) = \lambda(0)y(0)$, то $\lambda(0)$ е собствено значение и на оператора $L(t)$ със собствена функция

$$y(t) = U(t)y(0): \ L(t)y(t) = \lambda(0)y(t). \tag{2.4.10'}$$

Действително от (2.4.5) имаме

$$U^*(t)L(t)U(t)y(0) = L(0)y(0) = \lambda(0)y(0).$$

Прилагайки към двете страни на последното равенство оператора $U(t)$ и отчитайки (2.4.4) получаваме (2.4.10'). Нека отбележим още, че диференцирайки по t първото равенство в (2.4.10'), получаваме $y_t(t) = U_t(t)y(0)$, което заедно с (2.4.6) дава уравнението

$$y_t(t) = A(t)U(t)y(0) = A(t)y(t), \tag{2.4.10''}$$

което определя еволюцията по t на решението $y(t)$ на уравнението (2.4.10').

Доказателство на теорема 1. Директно от (2.4.2) получаваме

$$L_t = v_t(x,t), \tag{2.4.11}$$

$$AL - LA = 2vD^3 + 3v'D^2 + 4D^3v - 6vDv - 6D^2vD + 6vD - 3D^2v'. \tag{2.4.12}$$

Сега нека отбележим, че

$$4D^3v = 4v''' + 12v''D + 12v'D^2 + 4vD^3,$$

$$-6vDv = -6vv' - 6vD^2,$$
$$-6D^2vD = -6v''D - 12v'D^2 - 6vD^3,$$
$$-3D^2v' = -3v''' - 6v''D - 3v'D^2.$$

Замествайки тези равенства в дясната страна на (2.4.12), получаваме

$$AL - LA = -6v(x,t)v_x(x,t) + v_{xxx}(x,t), \tag{2.4.13}$$

с което теоремата е доказана.

2.5. Метод на обратната задача -основна идея.

Нека разгледаме уравнението на Шрьодингер

$$y'' + (k^2 - v(x,t))y = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0, \tag{2.5.1}$$

където потенциала $v(x,t)$ удовлетворява уравнението на КдФ (2.4.1), t разглеждаме като параметър.

Лема 1. Нека $f(x,t,k)$ е решението на Йост на уравнението (2.5.1), определено от асимптотиката $\lim_{x\to\infty} f(x,t,k)e^{-ikx} = 1$. Тогава $f(x,t,k)$ удовлетворява уравнението

$$\dot{f} = -Af - 4ik^3 f, \tag{2.5.2}$$

където оператора A се определя както в (2.4.2).

Доказателство. Нека диференцираме по t уравнението (2.5.1), отчитайки, че $dk/dt = 0$:

$$Ly = k^2 y \quad \Rightarrow \dot{L}y + L\dot{y} = k^2\dot{y}. \tag{2.5.3}$$

Използвайки представянето на Лакс (2.4.1) получаваме

$$(LA - AL)y + L\dot{y} = k^2\dot{y}, \quad LAy - k^2Ay + L\dot{y} = k^2\dot{y},$$

т.е.

$$(L - k^2)(Ay + \dot{y}) = 0. \tag{2.5.4}$$

Следователно функцията

$$\tilde{y} = Ay + \dot{y} \tag{2.5.5}$$

е решение на уравнението $(L-k^2)\tilde{y} = 0$. Полагаме $y = f(x,t,k)$, с което определяме $\tilde{f}$ еднозначно тъй като $\lim_{x\to\infty}\tilde{f}$ не зависи от t. Следователно при $x \to \infty$ получаваме

$$\tilde{f} \sim -ik^3 e^{ikx} \Rightarrow \tilde{f} = -ik^3 f(x,t,k), \tag{2.5.6}$$

което доказва (2.5.2).

Теорема 1. Нека потенциалът $v(x,t)$ в уравнението (2.5.1) удовлетворява уравнението на КдФ, тогава построените съгласно (1.1.8), (1.1.9) функции $a(k,t)$, $b(k,t)$ удовлетворяват линейните (по t) диференциални уравнения

$$\dot{a}(k,t) = 0, \quad \dot{b}(k,t) = -8ik^3 b(k,t). \tag{2.5.7}$$

Доказателство. Имаме представянето (1.1.6), т.е.

$$f(x,t,k) = b(k,t)g(x,t,k) + a(k,t)g(x,t,-k). \tag{2.5.8}$$

Поставяме (2.5.8) в (2.5.3) и устремяваме $x \to -\infty$, отчитайки, че $v(x,t) \to 0$, $|x| \to \infty$ и $g(x,t,\pm k) \sim \exp(\mp ikx)$. Получаваме

$$\dot{b}(k,t)e^{-ikx} + \dot{a}(k,t)e^{ikx} =$$

$$-4ik^3 b(k,t)e^{-ikx} + 4ik^3 a(k,t)e^{ikx} - 4ik^3 b(k,t)e^{-ikx} - 4ik^3 a(k,t)e^{ikx}. \tag{2.5.9}$$

Сравнявайки коефициентите пред $\exp(\pm ikx)$, получаваме (2.5.7).

Забележка. Сега ще покажем директно, че ако потенциалът $v(x,t)$ в уравнението (2.5.1) удовлетворява уравнението на КдФ то собствените значения $k_j^2 = \lambda_j(t)$ не зависят от t : $\dot{\lambda}_j = 0$. (Това твърдение следва от представянето на Лакс, тъй като то е еквивалентно на унитарната еквивалентност на семейството оператори $L(t)$ (вж. напр. (2.4.5))

Нека положим в първото уравнение на (2.5.3) $k^2 = \lambda_j(t)$. Тогава второто уравнение дава

$$\dot{L}y + L\dot{y} = \dot{\lambda}_j y + \lambda_j \dot{y} \tag{2.5.10}$$

и следователно (2.5.4) се трансформира в

$$(L - \lambda_j)(A\psi_j + \dot{\psi}_j) = \dot{\lambda}_j \psi_j. \tag{2.5.11}$$

Сега умножаваме с

$$\psi_j : L\psi_j = \lambda_j \psi_j \tag{2.5.12}$$

и интегрираме по x от $-\infty$ до ∞. Получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j (L - \lambda_j)(A\psi_j + \dot{\psi}_j)\, dx = \dot{\lambda}_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^2\, dx. \tag{2.5.13}$$

От тук, отчитайки (2.5.11) и факта, че L е самоспрегнат оператор ($(Lf,g) = (f,Lg)$) получаваме , че лявата страна на последното равенство е равна на нула. Следователно

$$\dot{\lambda}_j = 0, \tag{2.5.14}$$

което и искахме да покажем.

Нека имаме собствено число $k_j = i\tau_j$, $\tau_j > 0$ на уравнението (2.5.1), тогава

$$f^+(x, t, k_j) = b_j(t) f^-(x, t, k_j). \tag{2.5.15}$$

Както вече показахме, ако $v(x, t)$ е решение на КдФ, то собствените числа $\lambda_j = k_j^2$ на уравнението (2.5.1) са първи интеграли, т.е. имаме равенствата (2.5.14).

Следвайки доказателството на теорема 1, ще докажем следната

Теорема 2. Номировъчните константи $b_j = b_j(t)$ удовлетворяват уравненията

$$\dot{b}_j(t) = 8\tau_j^3 b_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots N, \tag{2.5.16}$$

т.е.

$$b_j(t) = {}^{8\tau_j^3 t} b_j(0), \quad j = 1, 2, \ldots N. \tag{2.5.17}$$

Доказателство Нека положим в (2.5.5) $y = f^+(x, t, k_j)$. Тогава от асимптотиката

$$f^+(x, t, k_j) \sim e^{-\tau_j x}, \quad x \to \infty, \tag{2.5.18}$$

(която не зависи от t), получаваме

$$\tilde{f}^+(x, t, k_j) \sim -4D^3 e^{-\tau_j x} = 4\tau_j^3 e^{-\tau_j x}. \tag{2.5.19}$$

Тъй като асимптотиката (2.5.19) определя еднозначно решението $\tilde{f}^+(x, t, k_j)$ (защо?), то

$$\tilde{f}^+(x, t, k_j) = 4\tau_j^3 f^+(x, t, k_j), \tag{2.5.20}$$

което поставено в (2.5.5), дава

$$4\tau_j^3 f^+(x, t, k_j) = A f^+(x, t, k_j) + \dot{f}^+(x, t, k_j). \tag{2.5.21}$$

Нека в последното равенство заместим $f^+(x, t, k_j)$ с равното му от (2.5.15)

$$f(x, t, k_j)^+ = b_j(t) f^-(x, t, k_j). \tag{2.5.22}$$

и следващото от тук равенство

$$\dot{f}^+(x, t, k_j) = \dot{b}_j(t) f^-(x, t, k_j) + b_j(t) \dot{f}^-(x, t, k_j). \tag{2.5.23}$$

Получаваме

$$4\tau_j^3 b_j(t) f^-(x, t, k_j)$$

$$= Ab_j(t)f^-(x,t,k_j) + \dot{b}_j(t)f^-(x,t,k_j) + b_j(t)\dot{f}^-(x,t,k_j). \tag{2.5.24}$$

При $x \to -\infty$ имаме

$$f^-(x,t,k_j) \sim e^{\tau_j x}, \quad \dot{f}^-(x,t,k_j) \sim 0. \tag{2.5.25}$$

Следователно от (2.5.24) при $x \to -\infty$ получаваме

$$4\tau_j^3 b_j(t)e^{\tau_j x} = Ab_j(t)e^{\tau_j x} + \dot{b}_j(t)e^{\tau_j x}. \tag{2.5.26}$$

От тук, отчитайки, че

$$Ae^{\tau_j x} = -4\tau^3 e^{\tau_j x}, \tag{2.5.27}$$

получаваме $8\tau_j^3 b_j(t)e^{\tau_j x} = \dot{b}_j(t)e^{\tau_j x}$, т.е.(2.5.16).Теоремата е доказана.

2.6. N-солитонно решение на КдФ.

Тук ще приведем класическия метод за построяване на N-солитонно решение на КдФ, базиращ се на уравнението на Гелфанд–Левитан– Марченко

$$F(x+y) + A(x,y) + \int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt = 0, \quad x \le y < \infty, \tag{2.6.1}$$

където потенциала $v(x)$ се дава с формулата

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty v(t)\,dt. \tag{2.6.2}$$

В частния случай на безотражателен потенциал $b(k) = 0$ имаме

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\tau_n x}, \tag{2.6.3}$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{i\dot{a}(i\tau_n)}. \tag{2.6.4}$$

В случая на уравнението на КдФ

$$\tau_n(t) = \tau_n(0), \quad b_n(t) = b_n(0)e^{8\tau_n^3 t}. \tag{2.6.5}$$

За да решим уравнението (2.6.1) отначало полагаме

$$A(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-\tau_n y}. \tag{2.6.6}$$

Имаме

$$\int_x^\infty A(x,t)F(t+y)\,dt = \sum_{n,m=1}^{N} K_m(x)\int_x^\infty e^{-\tau_m t}\beta_n e^{-\tau_n(t+y)}\,dt =$$

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n\left(\sum_{m=1}^{N} K_m(x)\int_x^\infty e^{-(\tau_n+\tau_m)t}\,dt\right)e^{-\tau_n y} =$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y}\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_n K_m(x)e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m}. \tag{2.6.7}$$

Замествайки (2.6.3), (2.6.6) и (2.6.7) в (2.6.1) получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\tau_n x} e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y} \sum_{m=1}^{N} \frac{\beta_n K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m} = 0. \tag{2.6.8}$$

Тъй като функциите $e^{-\tau_n y}$ са линейно независими, то коефициентите са нула, т.е.

$$K_n(x) + \beta_n e^{-\tau_n x} + \sum_{m=1}^{N} \frac{\beta_n K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m} = 0. \tag{2.6.9}$$

Така получаваме системата уравнения

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^{N} t_{nm} K_m(x) = -\beta_n e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{2.6.10}$$

където

$$t_{nm} = \frac{\beta_n e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m}, \quad n, m = 1, \ldots, N. \tag{2.6.11}$$

Да означим

$$A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N}, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m}, \tag{2.6.12}$$

т.е. имаме линейната система

$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm} K_m = B_n, \quad B_n = -\beta_n e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{2.6.13}$$

Решението на тази система се дава с известната формула

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{2.6.14}$$

където матрицата $A^{(n)}(x)$ се получава заменяйки в $A(x)$ n–ия стълб с елементите на стълба $B = (B_1, \ldots, B_N)^T$, т.е. $A^{(n)}_{mn} = -\beta_m e^{-\tau_m x}$, $m = 1, 2, \ldots, N$. От (2.6.6) получаваме

$$A(x, x) = (\det A(x))^{-1} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x}. \tag{2.6.15}$$

Но (2.6.12) имаме

$$A'_{nm}(x) = -\beta_n e^{-(\tau_n+\tau_m)x} \tag{2.6.16}$$

и, следователно, използвайки правилото за диференциране на детерминанта, получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{det} A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x} = \frac{d}{dx} \mathrm{det} A(x), \tag{2.6.17}$$

т.е. имаме формулата

$$A(x,x) = \frac{d}{dx} \ln \mathrm{det} A(x), \tag{2.6.18}$$

която заедно с (2.6.2) и (2.6.12) дава

$$v(x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \mathrm{det} A(x), \quad A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N} = \left(\delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m} \right). \tag{2.6.19}$$

За да получим оттук N–солитонното решение

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \triangle(x,t) \tag{2.6.20}$$

$$\triangle(x,t) = Det \left(\delta_{jl} + \beta_j \frac{e^{-(\tau_j+\tau_l)x+8\tau_l^3 t}}{\tau_j + \tau_l} \right), \tag{2.6.21}$$

остава да заместим в (2.6.19) $\beta_n(t)$ съгласно (2.6.5). При $N = 1$ получаваме солитонното решение (2.2.12):

$$v(x,t) = \frac{-2\tau^2}{\cosh^2 \tau(x - 4\tau^2 t - \varphi)}, \quad \varphi = \frac{1}{2\tau} \ln \frac{\beta}{2\tau}. \tag{2.6.22}$$

Глава 3. НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ СВЪРЗАНИ С ОПЕРАТОРА НА ДИРАК.

3.1.Обобщение на схемата на Лакс. Модифицирано уравнение на Кортевег–де Фриз, нелинейно уравнение на Шрьодингер и уравнението sin -Гордон.

Тук ще приведем основната идея, по която изложената по-горе схема за интегриране на уравнението на КдФ се модифицира с оглед интегрирането на други нелинейни еволюционни уравнения.

В основата на интегрирането на уравнението на КдФ имахме системата уравнения

$$\psi_{xx} - v(x,t)\psi = -k^2\psi, \tag{3.1.1}$$

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6v(x,t)\psi_x + 3v_x(x.t)\psi. \tag{3.1.2}$$

Тази система уравнения относно функцията $\psi(x,t,k)$ е преопределена. Условието за съвместимост така, че решението $\psi(x,t,k)$ на уравнението на Шрьодингер (3.1.1) да е решение и на уравнението (3.1.2) налага условие за потенциала $v(x,t)$, което е уравнението на КдФ

$$v_t = 6vv_x - v_{xxx}. \tag{3.1.3}$$

За да се убедим, че (3.1.3) е условие за съвместимост на (3.1.1) и (3.1.2) е удобно да постъпим по следния начин. Отначало ще запишем уравнението от втори ред като система уравнения от първи ред, въвеждайки нова неизвестна функция ψ_1 така че

$$\psi_x = ik\psi + \psi_1. \tag{3.1.4}$$

Тогава от (3.1.1) имаме

$$\psi_{1x} = -ik\psi_1 + v\psi. \tag{3.1.5}$$

Очевидно системата (3.1.4), (3.1.5) е еквивалентна на уравнението (3.1.1). По-нататък с помощта на системата (3.1.4), (3.1.5) изключваме производните по x в уравнението (3.1.2). Така получаваме

$$\psi_t = 4ik^3\psi + 4k^2\psi_1 + 2ikv\psi - v_x\psi + 2v\psi_1. \tag{3.1.6}$$

От тук, използвайки отново системата (3.1.4), (3.1.5), получаваме аналогично уравнение за ψ_1:

$$\psi_{1t} = -4ik^3\psi_1 + 4k^2\psi + 2ikv_x\psi - 2ikv\psi_1 + (2v^2 - v_{xx})\psi + v_x\psi_1. \quad (3.1.7)$$

Нека означим

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.8)$$

Тогава системите (3.1.4),(3.1.5) и (3.1.6),(3.1.7), заменяйки k с λ, можем да запишем в следния компактен вид

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \quad (3.1.9)$$

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \quad (3.1.10)$$

където матриците

$$U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

$$V(\lambda) = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} v & 0 \\ v_x & -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_x & 2v \\ 2v^2 - v_{xx} & v_x \end{pmatrix}. \quad (3.1.12)$$

Системата уравнения (3.1.9), (3.1.10) относно вектор-функцията φ е преопределена. Условието за съвместимост $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ дава уравнението

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0. \quad (3.1.13)$$

Това равенство, което е полином относно параметъра λ, следва да бъде изпълнено за всички $\lambda \in \mathbb{C}$. Следователно коефициентите му, като функции на променливите x, t се анулират. Структурата на матриците U и V обезспечава анулирането на всички коефициенти на полинома с изключение на свободния му член, т. е. лявата страна на равенството (3.1.13) има вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_t - 6vv_x + v_{xxx} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.14)$$

Така получихме, че равенството (3.1.13) е еквивалентно на изискването функцията $v(x,t)$ да удовлетворява уравнението на КдФ. Равенството (3.1.13) дава едно ново комутационно представяне за уравнението на

КдФ. Предимството му, в сравнение с представянето на Лакс, е че може да бъде обобщено за други еволюционни уравнения, интегруеми с идеята на метода на обратната задача. Нека матрицата $U(x,t;\lambda)$ има вида

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.15}$$

където в общия случай q, r са комплекснозначни функции на x и t. Матрицата V ще избираме от условието щото равенството (3.1.13) да се свежда до уравнение в частни производни относно q и r.

Нека V има вида

$$V = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}. \tag{3.1.16}$$

Тогава (3.1.13) дава системата на Абловиц–Кауп–Нюел и Сегюр (АКНС)

$$\begin{aligned} ir_t + r_{xx} - 2qr^2 = 0 \\ iq_t - q_{xx} + 2rq^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

При $r = \bar{q}$ или $r = -\bar{q}$ получаваме нелинейните уравнения на Шрьодингер (НУШ $\pm$)

$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0, \quad (r = \bar{q}) \tag{3.1.18a}$$

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0, \quad (r = -\bar{q}). \tag{3.1.18}$$

Нека

$$V = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2\lambda \begin{pmatrix} qr & -q_x \\ r_x & qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} qr_x + rq_x & iq_{xx} - 2q^2 r \\ r_{xx} - 2r^2 q & qr_x - rq_x \end{pmatrix}. \tag{3.1.19}$$

Получаваме системата уравнения

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} - 6rqq_x = 0 \\ r_t + r_{xxx} - 6qrr_x = 0. \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

При $r = 1$ имаме уравнението на КдФ, а при $q = \pm r$ –модифицираното уравнение на КдФ (МКдФ):

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} - 6q^2 q_x = 0 \\ q_t + q_{xxx} + 6q^2 q_x = 0. \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

При

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_x}{2} \\ \frac{u_x}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1.21}$$

$$V = \frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \tag{3.1.22}$$

получаваме уравнението sin-Gordon

$$u_{xt} = \sin u.$$

1. Вспомагателни предложения. Най напред ще напомним някои факти свързани с правата задача на разсейването за системата на Дирак

$$l(u)y \equiv \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -r(x) & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = i\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Функциите $q(x),\ r(x)$ in (3.2.1) че абсолютно интегрируеми на цялата ос $\mathbb{R}$. За удобство на матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ -r(x) & 0 \end{pmatrix}$$

ще съпоставим вектор-функциите $u(x)$ и $v(x)$:

$$u = \begin{pmatrix} q \\ -r \end{pmatrix}, \quad v = \sigma_3 u = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ще напомним някои добре известни твърдения (see e.g. [2], [3] for their proofs). По-надолу ще означаваме с $\mathbb{C}^+$ и $\overline{\mathbb{C}}^+$ съответно отворената и затворената горна комплексна полуравнина и аналогично с $\mathbb{C}^-$ и $\overline{\mathbb{C}}^-$ отворената (затворената) долна комплексна полуравнина. Решенията на Йост за системата (3.2.1) ($\top$ означава транспониране)

$$\varphi^{\pm}(x,\lambda) = (\varphi_1^{\pm}, \varphi_2^{\pm})^{\top}, \quad \psi^{\pm}(x,\lambda) = (\psi_1^{\pm}, \psi_2^{\pm})^{\top}$$

ще дефинираме с техните асимптотики на безкрайност

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi^+(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lim_{x\to\infty} \psi^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}^+, \quad (3.2.2)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi^-(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \lim_{x\to\infty} \psi^-(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}^-. \quad (3.2.3)$$

Може да се покаже, че при условието (3.2.8) за всяко x решенията $\varphi^{\pm}(x,\lambda)$ и $\psi^{\pm}(x,\lambda)$ са непрекъснати функции по $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}^{\pm}$ съответно, аналитични при $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}$. При това, съществува константа $K > 0$, (независеща от $x,\ \lambda$) такава, че при $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}^{+}$ са справедливи оценките:

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1^+(x,\lambda)e^{i\lambda x}| \le K, \quad |\varphi_2^+(x,\lambda)e^{i\lambda x}| \le K\int_{-\infty}^{x} |r(y)|e^{-2\operatorname{Im}\lambda(x-y)}dy,\\
&|\psi_1^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x}| \le K\int_{x}^{\infty} |q(y)|e^{-2\operatorname{Im}\lambda(y-x)}dy, \quad |\psi_2^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x}| \le K,
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

а при $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}^{-}$ - оценките

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1^-(x,\lambda)e^{-i\lambda x}| \le K\int_{-\infty}^{x} |q(y)|e^{2\operatorname{Im}\lambda(x-y)}dy, \quad |\varphi_2^-(x,\lambda)e^{-i\lambda x}| \le K,\\
&|\psi_1^-(x,\lambda)e^{i\lambda x}| \le K, \quad |\psi_2^-(x,\lambda)e^{i\lambda x}| \le K\int_{x}^{\infty} |r(y)|e^{2\operatorname{Im}\lambda(y-x)}dy.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

По - нататък при условието

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(1+|x|)(|r(x)|+|q(x)|)+|r'(x)|+|q'(x)|]dx < \infty, \tag{3.2.6}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ при $|\lambda| \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \ge 0$ са в сила асимптотиките

$$\begin{aligned}
\varphi^+(x,\lambda)e^{i\lambda x} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{x} r(y)q(y)\,dy\\ r(x)\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\\
\psi^+(x,\lambda)e^{-i\lambda x} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix}-q(x)\\ \int_{x}^{\infty} r(y)q(y)\,dy\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

а при $|\lambda| \to \infty,\ \operatorname{Im}\lambda \le 0$ – асимптотиките

$$\begin{aligned}
\varphi^-(x,\lambda)e^{-i\lambda x} &= \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix}q(x)\\ \int_{-\infty}^{x} r(y)q(y)\,dy\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\\
\psi^-(x,\lambda)e^{i\lambda x} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2i\lambda}\begin{pmatrix}-\int_{x}^{\infty} r(y)q(y)\,dy\\ r(x)\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

При реални λ имаме представянията

$$\begin{aligned}
\varphi^{\pm}(x,\lambda) &= \pm a^{\pm}(\lambda)\psi^{\mp}(x,\lambda) + b^{\pm}(\lambda)\psi^{\pm}(x,\lambda),\\
\psi^{\pm}(x,\lambda) &= \mp a^{\pm}(\lambda)\varphi^{\mp}(x,\lambda) + b^{\mp}(\lambda)\varphi^{\pm}(x,\lambda),
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

където

$$a^{\pm}(\lambda) = W(\varphi^{\pm},\psi^{\pm}) \equiv \varphi_1^{\pm}\psi_2^{\pm} - \varphi_2^{\pm}\psi_1^{\pm}, \quad b^{\pm}(\lambda) = W(\varphi^{\pm},\psi^{\mp}). \tag{3.2.10}$$

Тук коефициентите $a^{\pm}(\lambda)$ са аналитични функции при $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}$ и непрекъснати при $\overline{\mathbb{C}}^{\pm}$ съответно. В сила са асимптотиките

$$a^{\pm}(\lambda) = 1 + O(\lambda^{-1}), \qquad |\lambda| \to \infty, \ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}^{\pm}. \tag{3.2.11}$$

Коефициентите $b^{\pm}(\lambda)$ са непрекъснати функции от $\lambda \in \mathbb{R}$ и $b^{\pm}(\lambda) \to 0$ at $|\lambda| \to \infty$.

При това, в сила е следното условие за "унитарност":

$$a^{+}(\lambda)a^{-}(\lambda) + b^{+}(\lambda)b^{-}(\lambda) = 1, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.2.12}$$

Тук, както и в следващите параграфи ще предполагаме, както обикновенно [...], че функциите $a^{+}(\lambda)$ и $a^{-}(\lambda)$ имат краен брой прости нули при $\mathbb{C}^{+}$ и $\mathbb{C}^{-}$ съответно и освен това, че $a^{\pm}(\lambda) \neq 0$ при реални λ. Нека означим със σ дискретния спектър на оператора (3.2.1), където

$$\sigma = \sigma^{+} \cup \sigma^{-}, \quad \sigma^{\pm} = \{\lambda_k^{\pm} \in \mathbb{C}^{\pm} : \quad a^{\pm}(\lambda_k^{\pm}) = 0, \ \ k = 1, 2, \ldots, N_{\pm}\}.$$

От (3.2.10) следва, че

$$\varphi^{\pm}(x, \lambda_k^{\pm}) = b_k^{\pm}\psi^{\pm}(x, \lambda_k^{\pm}), \qquad \lambda_k^{\pm} \in \sigma^{\pm}, \quad b_k^{\pm} \neq 0. \tag{3.2.13}$$

На оператора (3.2.1) ще съпоставим левите и десните данни на разсейване [....]:

$$\mathbf{S}^{+}(u) = \{\rho^{\pm}(\lambda) = \frac{b^{\pm}(\lambda)}{a^{\pm}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad \lambda_k^{\pm}; \quad C_k^{\pm} = \frac{b_k^{\pm}}{\dot{a}_k^{\pm}}, \quad k = 1, \ldots, N^{\pm}\} \tag{3.2.14}$$

и

$$\mathbf{S}^{-}(u) = \{\sigma^{\pm}(\lambda) = \frac{b^{\mp}(\lambda)}{a^{\pm}(\lambda)}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}; \ \ \lambda_k^{\pm}; \ \ M_k^{\pm} = \frac{1}{b_k^{\pm}\dot{a}_k^{\pm}}, \ \ k = 1, \ldots, N^{\pm}\}, \tag{3.2.15}$$

където $\dot{a}_k^{\pm} = (da^{\pm}(\lambda)/d\lambda)_{|\lambda=\lambda_k^{\pm}}$. Връзката между $\mathbf{S}^{+}$ и $\mathbf{S}^{-}$ $(N^{+} = N^{-})$ се дава със следното дисперсионно съотношение

$$\pm \ln a^{\pm}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 + \rho^{+}(\xi)\rho^{-}(\xi))\, d\xi}{\xi - \lambda} + \sum_{k=1}^{N} \ln\frac{\lambda - \lambda_k^{+}}{\lambda - \lambda_k^{-}}, \ (\lambda \in \mathbb{C}^{\pm}). \tag{3.2.16}$$

Задачи

Задача 1. Да се докаже, функцията

$$v(x,t) = \frac{-2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t + \varphi)}, \quad \kappa > 0,\, \varphi = Const. \tag{1}$$

наричана солитон, е решение на уравнението на Кортевег-де Фриз (КдФ):

$$v_t(x,t) = 6v(x,t)v_x(x,t) - v_{xxx}(x,t), \quad v(x,0) \in v_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{2}$$

където $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е пространството на Шварц от безкрайно диференцируеми функции, клонящи към нула заедно с производните си при $|x| \to \infty$.

Задача 2. (Преобразавание на Миура) Да се докаже, че ако $u(x,t)$ е решение на МКдф (Модифицирано уравнение на КдФ)

$$Qu \equiv u_t(x,t) - 6u^2(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0. \tag{3}$$

то функцията

$$v = u^2 + u_x \tag{4}$$

е решение на КдФ

$$Pv \equiv v_t(x,t) - 6v(x,t)v_x(x,t) + v_{xxx}(x,t) = 0. \tag{5}$$

Упътване Да се покаже, че

$$Pv = (2u + \frac{\partial}{\partial x})Qu. \tag{6}$$

Задача 3. (Уравнение на Гарднер) Да се докаже, че ако $w(x,t;\varepsilon)$ е решение уравнението

$$Rw \equiv w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0 \tag{7}$$

то

$$v = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2. \tag{8}$$

е решение на КдФ

$$Pv \equiv v_t(x,t) - 6v(x,t)v_x(x,t) + v_{xxx}(x,t) = 0.$$

(При $\varepsilon = 1$ преобразованието (8) се свежда до преобразованието на Миура (4).)

Упътване Да се покаже, че

$$Pv = (1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w) Rw. \tag{9}$$

Задача 4. (Представяне на Лакс) Да се докаже, че за уравнението на КдФ $v_t = 6vv_x - v_{xxx}$ е справедливо следното представяне

$$L_t = [A, L] = AL - LA, \tag{10}$$

където операторите

$$L = -D^2 + v(x,t), \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v', \quad D = \frac{d}{dx}. \tag{11}$$

Нека разгледаме уравнението на Шрьодингер

$$Ly \equiv -y'' + v(x,t)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty \quad (\lambda = k^2) \tag{12}$$

t -параметър.

Задача 5. Използвайки представянето на Лакс, да се покаже, че ако $v(x,t)$ удовлетворява уравнението на КдФ, то собствените значения $\lambda(t)$ на уравнението (12) не зависят от $t : \lambda(t)_t = 0$.

Задача 6. Използвайки представянето на Лакс, да се покаже, че ако $v(x,t)$ удовлетворява уравнението на КдФ, то решението $y = y(x,t,\lambda)$ на уравнението (12) удовлетворява уравнението

$$y_t = Ay, \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v' + C, \tag{13}$$

където C е произволна константа.

Нека въведем оператора

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}D^2 + v(x) + \frac{1}{2}\int_x^\infty dy\, v'(y), \quad D = \frac{d}{dx}, \tag{14}$$

действащ по формулата

$$\mathcal{L}f(x) = -\frac{1}{4}f''(x) + v(x)f(x) + \frac{1}{2}\int_x^\infty v'(y)f(y)\,dy, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Задача 7. Да се покаже, че произведението $Y = y_1(x,k)y_2(x,k)$ на всеки две решения на уравнението (12) е решение на уравнението

$$\tilde{\mathcal{L}}Y = D\mathcal{L}Y = \left[-\frac{1}{4}D^3 + \frac{1}{2}(v(x)D + Dv(x))\right]Y = k^2 DY. \tag{1.15}$$

Задача 8. Нека

$$f(x,k) : \lim_{x\to\infty} f(x,k)e^{-ikx} = 1,\ \mathrm{Im}k \geq 0 \tag{16}$$

е решението на Йост на уравнението (12). Да се докаже, че функциите $f^2(x,k)$ удовлетворяват уравнението

$$\mathcal{L}f^2(x,k) = k^2 f^2(x,k), \quad (\mathrm{Im}\,k \geq 0). \tag{17}$$

Задача 9. **a.** Да се покаже, че оператора

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{4}D^2 + v(x) + \frac{1}{2}v'(x)\int_{-\infty}^x dy, \tag{18}$$

е спрегнатия оператор на оператора $\mathcal{L}$ относно скаларното произведение (f,g) в реалното Хилбертово пространство $L^2(\mathbb{R})$,т.е.

$$(\mathcal{L}f, g) = (f, \mathcal{L}^* g), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{19}$$

b.Да се покаже, че уравнението на КдФ може да се запише във вида

$$v_t = 4\mathcal{L}^* v_x. \tag{20}$$

Задача 10. Нека

$$F(x,k) = f(v_1; x,k)f(v_2; x,k) \tag{21}$$

е произведението на решенията на Йост на две уравнения на Шрьодингер с потенциали $v_n(x)$, $n = 1, 2$. Да се докаже, че

$$\Lambda F(x,k) = k^2 F(x,k), \tag{21}$$

където оператора

$$\Lambda = \frac{1}{4}\left\{-D^2 + 2s(x) + \int_x^\infty dy\, s'(y) - \int_x^\infty dy\, \Delta(y) \int_y^\infty dz\, \Delta(z)\right\}, \quad (22)$$

$s = v_1 + v_2$, $\Delta = v_1 - v_2$, действа на всяка $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ по формулата

$$\Lambda = \frac{1}{4}\left\{-f''(x) + 2s(x)f(x) + \int_x^\infty s'(y)f(y)\,dy - \int_x^\infty \Delta(y)\left(\int_y^\infty \Delta(z)f(z)\,dz\right)dy\right\}.$$

Задача 11. Да се докаже, че уравнението на КдФ има следните първи интеграли

$$2I_{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,dx, \quad 2I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} v(x)^2\,dx,$$

$$2I_1 = -\int_{-\infty}^{\infty}(v_x^2 + 2v^3)\,dx, \quad 2I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}(v_{xx}^2 - 5v^2 v_{xx} + 5v^4)\,dx. \quad (23)$$

Нека в уравнението на КдФ (2) положим $v = u + \varepsilon h$. Диференцирайки така полученото уравнение по ε и полагайки $\varepsilon = 0$ получаваме линеаризираното уравнение на КдФ

$$h_t = 6u_x h + 6u h_x - h_{xxx}. \quad (24)$$

Задача 12. Да се докаже, че функцията

$$h(x,t,\lambda) = Y_x(x,t,\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} y^2, \quad (25)$$

където $y(x,t,\lambda)$ е решение на уравнението

$$y'' + (\lambda - u(x))y = 0 \quad (26)$$

е решение на уравнението (24).

Задача 13. Нека y_j и z_j, $j = 1, 2$ са решения на уравненията на Шрьодингер $L(v_j)y_j = \lambda y_j$ и $L(v_j)z_j = \mu z_j$. и нека $Y = y_1 y_2$, $Z = z_1 z_2$. Да се докаже следното важно тъждество:

$$W(Y(x,\lambda), Z(x,\mu)) = \frac{1}{\lambda - \mu}\frac{d}{dx}\prod_{j=1}^{2} W(y_j(x,\lambda), z_j(x,\mu)). \quad (27)$$

където Вронскиана

$$W(f,g) = fg' - f'g. \tag{28}$$

Упътване. Използвайте тъждеството

$$\frac{d}{dx}W(z(x,\mu), y(x,\lambda)) = (\mu - \lambda)z(x,\mu)y(x,\lambda). \tag{29}$$

Нека $F = F(v)$ е функционал над пространството на Шварц със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{30}$$

Градиент на функционала F ще определим по формулата

$$G_F = \frac{\partial F}{\partial v} : \frac{d}{d\varepsilon}F(v + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = (G_F(v), h). \tag{31}$$

Нека имаме функционал от вида

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(v, v_x, v_{xx}, \ldots)\,dx \tag{32}$$

където $\tilde{F}(z_1, z_2, \ldots)$ е полином на променливите $z_1, z_2, \ldots$.

Задача 14. Да се докаже, че за функционала $F(v)$ от вида(32)

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\partial \tilde{F}}{\partial v^{(n)}}. \tag{33}$$

От тук, в частност, да се намерят градиентите на функционалите, приведени в задача 11.

Задача 15. Нека $\lambda = \lambda(v)$ е просто собственото число и $y(v;x,\lambda)$ е съответната собствена функция на уравнението

$$y'' + (\lambda(v) - v(x))y = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y^2(v;x,\lambda)\,dx < \infty. \tag{34}$$

Да се докаже, че

$$\frac{d}{d\varepsilon}\lambda(v+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(v;x,\lambda)h(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(v;x,\lambda)\,dx}, h(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \tag{35}$$

т.е.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{y^2(v;x,\lambda)}{\|y(v;.,\lambda)\|^2_{L(\mathbb{R})}}. \tag{36}$$

Упътване. Диференцирайте по ε уравнението

$$y''(v+\varepsilon h;x) + (\lambda(v+\varepsilon h) - (v+\varepsilon h))y(v+\varepsilon h;x) = 0,$$

след което положете $\varepsilon = 0$ и използвайте уравнението (34).

Задача 16. Покажете, че ако $\tilde{\sigma}(u,v)$ е решение на уравнението

$$\tilde{\sigma}_{uu} - \tilde{\sigma}_{vv} = \sin\tilde{\sigma}, \tag{36}$$

то функцията

$$\sigma(x,t) = \tilde{\sigma}(ax + \frac{t}{a}, ax - \frac{t}{a}) \tag{37}$$

е решение на уравнението

$$\sigma_{xt} = \sin\sigma. \tag{38}$$

Задача 17. Покажете, че при всеки избор на знаците $\pm$, функцията

$$\tilde{\sigma}(u,v) = 4\mathrm{arctg}\left[\gamma\exp\left(\frac{\mathrm{u}\pm\beta\mathrm{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right], \tag{39}$$

където γ и β са константи, е решение на уравнението sin-Гордон (36).

Упътване. Използвайте тъждеството

$$\sin 4\theta = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\theta(1-\mathrm{tg}^2\,\theta)}{(1-\mathrm{tg}^2\,\theta)^2}, \quad \theta = \frac{\tilde{\sigma}}{4}. \tag{40}$$

Задача 18. Използвайки горното тъждество (40), покажете, че функцията

$$\tilde{\sigma}(u,v) = 4\mathrm{arctg}\left[U(u)/V(v)\right], \tag{41}$$

е решение на уравнението sin-Гордон (36), когато U и V удовлетворяват уравненията

$$(U')^2 = -k^2U^4 + m^2U^2 + n^2, \tag{42a}$$

$$(V')^2 = k^2V^4 + (m^2-1)U^2 - n^2, \tag{42b}$$

където k, m и n са произволно константи.

Задача 19. Покажете, че функцията

$$r(x,t) = 2i\eta \frac{\exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2-\eta^2)t - i\varphi_0)}{\operatorname{ch} 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}, \tag{43}$$

където ξ, η, φ_0 и x_0 са произволни константи, е решение на нелинейното уравнение на Шрьодингер (НУШ)

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0. \tag{44}$$

Задача 20. Покажете, че функцията

$$u(x,t) = 2k \frac{1}{\operatorname{ch}(2kx - 8k^3t + \delta)}, \tag{45}$$

където k и δ са произволни константи, е решение на модифицираното уравнение на КдФ (МКдФ)

$$u_t = -6u^2u_x - u_{xxx}. \tag{46}$$

Литература:

1. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л.П. Питаевский, ТЕОРИЯ СОЛИТОНОВ, Метод обратной задачи. М. Наука, 1980.

2. G. B. Whitham, Linear and nonlinear waves, John Wiley and Sons, New York, 1974

3. Б. М. Левитан, Саргсян И. С. **Введение в спектральную теорию**, Издательство „Наука”, Москва , 1970.

4. Б. М. Левитан,**Обратные задачи Штурма–Лиувилля**, Издательство „Наука”, Москва , 1984.

5. Коддингтон Э., Левинсон Н.**Теория обикновенных дифференциальных уравнений** , Москва , И Л, 1958.