Задачи към курса "Математически модели във физиката "

В приведените по–долу задачи означенията следват тези от курса "Математически модели във физиката ". По-трудните задачи са отбелязани със *.

част 1 "Класическа механика".

1. Движение по действие на централни сили. Задача на Кеплер.

Задача 1.1. Пресмятайки интеграла

$$t - t_0 = \frac{p^2}{c}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+e\cos(\varphi-\varphi_0))^2}.$$

посредством субституцията

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

да се получи формулата

$$t - t_0 = \frac{p^2}{c(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - e\sin E),$$

известна като **уравнение на Кеплер**. Ще отбележим, че изразяването на $E = E(t)$ чрез елементарни функции е невъзможно.

Задача 1.2. (**Допълнителен пръв интеграл в задачата на Кеплер.**) Нека имаме движение под действието на централна сила с потенциал

$$V = -\frac{\alpha}{r}$$

и нека имаме първия интеграл:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}.$$

Тогава уравнението:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} = -\mathrm{grad}V(r)$$

има пръв интеграл

$$I(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{M} + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = Const.$$

Упътване. От условията на задачата имаме

$$\frac{dI}{dt} = \dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{M} + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = m\dot{\mathbf{v}}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

За да получите последното равенство използвайте, че $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}.\mathbf{b})$ и $(\mathbf{r}.\mathbf{r}) = r^2$.

Задача 1.3. (пространствен осцилатор) Да се намери траекторията на движение в централно поле

$$V = \frac{kr^2}{2}$$

Упътване. Използвайте, че силата е централна, движението е в равнината Oxy. Следователно

$$V = \frac{k(x^2+y^2)}{2} \Rightarrow \mathbf{F} = (-kx, -ky).$$

Задача 1.4. Да се докаже, че потенциала

$$V = -\frac{\alpha}{r} \quad r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

където (x_0, y_0, z_0) са координатите на привличащия център, удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Задача 1.5*. Нека $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r,\varphi)\mathbf{e}_r$ е централно силово поле (централна сила, $\mathbf{e}_r$ –единичен вектор по $\mathbf{r}$.) То е потенциално тогава и сама тогава, когато $F = F(r)$, т.е. F не зависи явно от φ, потенциала

$$V(x,y) = V(r), \quad V(r) = -\int F(r)\,dr.$$

Упътване. Нека $\mathbf{F} = (X, Y) = (F_r, F_\varphi)$. Изразът

$$X\,dx + Y\,dy = F_r\,dr + F_\varphi\,d\varphi$$

е пълен диференциал тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}.$$

Но $F_\varphi = 0$ и следователно $\partial F_r/\partial\varphi = 0$, т.е.

$$F = F(r) \Rightarrow V = -\int F(r)\,dr.$$

За да завършим решението остава да напомним, че пълния диференциал е инвариантен при смяна на променливите.

2. Уравнения на Лагранж и Хамилтон.

задача 2.1 Функция на Лагранж за една свободна точка се дава в декартови координати с израза

$$L = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а.Покажете, че в цилиндрични координати

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

имаме

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

б. Покажете, че в сферически координати

$$\left.\begin{array}{c} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \\ (-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi) \end{array}\right\},$$

имаме

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\psi}^2).$$

задача 2.2 Да се намери хамилтониана и да се съставят уравненията на Хамилтон за механични системи с лагранжиан

$$L = \frac{3}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 - q_1q_2,$$

$$L = \frac{5}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1 - q_2) + 3\cos q_1 + \cos q_2,$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{4}(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2 - 2(q_1^2 + q_2^2 - q_1q_2) - \frac{1}{4}(q_3^2 + q_4^2).$$

задача 2.3. Да се намери лагранжиана и да се съставят уравненията на Лагранж за механични системи с хамилтониан

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2,$$

$$H = q_1p_2 - q_2p_1 + a(p_1^2 + p_2^2),$$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}) - a\cos q_1.$$

задача 2.3 Да се решат уравненията на Хамилтон, ако

$$H = (p_1^2 + q_1^2)F(p_2, \dots, p_n, t).$$

задача 2.4 Нека

$$q_i = \varphi_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad p_i = \psi_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad i = 1, \dots, n$$

са решения на уравненията на Хамилтон

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}.$$

Да се намери движението на системата с хамилтониан

$$H_1 = \gamma(t) H_0(q_i, p_i).$$

3. Скобки на Поасон

задача 3.1 Нека означим координатите и импулсите на точка съответно чрез

$$x,\, y,\, z, \quad p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y},\, p_z = m\dot{z}$$

и нека компонентите на момента на количеството на движение са

$$m_x = yp_z - zp_y, \quad m_y = zp_x - xp_z, \quad m_x = xp_y - yp_x.$$

Да се покаже, че скобките на Поасон

$$\{p_x, p_y\} = 0, \quad \{p_x, m_y\} = p_z, \quad \{m_x, m_y\} = m_z.$$

задача 3.2 Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = q^2 + p^2, \quad \psi = \mathrm{arctg}\frac{p}{q}.$$

$$\varphi = \varphi(q^2 + p^2), \quad \psi = \mathrm{arctg}\frac{p}{q}.$$

$$\varphi = q_i, \quad \psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).$$

$$\varphi = p_i, \quad \psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t).$$

$$\varphi = \varphi(p_1, q_1), \quad \psi = F(\varphi(p_1, q_1), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, t).$$

задача 3.3 Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = q\cos\omega t + \frac{p}{\omega}\sin\omega t, \quad \psi = p\cos\omega t - q\omega\sin\omega t.$$

задача 3.4 Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = \varphi[\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)], \quad \psi = \psi[\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)].$$

$$\varphi = \cos[\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)], \quad \psi = \sin[\sum_{i=1}^{n}(p_i^2 + q_i^2)].$$

задача 3.5 Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = f_1(g(q_i, p_i)), \quad \psi = f_2(g(q_i, p_i)).$$

част 2 "Квантова механика".

Задача 1.1. * Да се намери функция $v(x)$, за която решението на уравнението на Шрьодингер
$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0$$
се записва във вида
$$y_1 = e^{ikx}[2k + ia(x)].$$

Отговор
$$v(x) = \frac{-2\tau^2}{\mathrm{ch}^2(\tau x - \varphi)}.$$
където τ, φ са реални константи.

Задача 1.1а. Да се покаже, че две линиейно независими решения на уравнението
$$y'' + (k^2 + \frac{2\tau^2}{\mathrm{ch}^2(\tau x - \varphi)})y = 0$$

са функциите
$$f^+(x,k) = e^{ikx}\frac{k + i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau}, \qquad (\lim_{x\to\infty} f^+(x,k)e^{-ikx} = 1),$$
$$f^-(x,k) = e^{-ikx}\frac{k - i\tau \mathrm{th}(\tau x - \varphi)}{k + i\tau}, \qquad (\lim_{x\to-\infty} f^-(x,k)e^{ikx} = 1).$$

Квантово-механичната скобка на Поасон ще въведем по формулата
$$\{A, B\} = i[A, B], \tag{1}$$
където A и B са самоспрегнати оператори в съответното хилбертово пространство, комутаторът
$$[A, B] = AB - BA. \tag{2}$$

Задача 1.2. Да се покаже, че ако операторите
$$Q = x, \quad P = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} \tag{3}$$
то
$$\{P, Q\} = i[P, Q] = I \leftrightarrow [Q, P] = iI, \tag{4}$$
където I е единичния оператор.

Задача 1.3. Да се намери решението $\varphi(x)$ на уравнението
$$(P - \rho I)\varphi(x) = i\gamma(Q - \sigma I)\varphi(x),$$
където операторите P и Q са определени, както в предишната задача, ρ, γ, σ са реални числа, $\gamma > 0$.

Задача 1.4. Нека самоспрегнатите оператори P и Q удовлетворяват комутационното съотношение (4), т.е. $[Q, P] = iI$. Да се покаже, че

$$[Q, P^n] = inP^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Задача 1.5. * Нека самоспрегнатите оператори P и Q удовлетворяват комутационното съотношение (4), т.е. $[Q, P] = iI$. Да се покаже, че

$$[P, P^2 f(Q)] = -iP^2 f'(Q),$$

$$[P, Pf(Q)P] = -iPf'(Q)P,$$
$$[P, f(Q)P^2] = -if'(Q)P^2,$$

където операторите

$$f(Q) = a_0 + a_1 Q + a_2 Q^2 + \ldots + a_n Q^n + \ldots,$$

$$f'(Q) = a_1 + 2a_2 Q + \ldots + na_n Q^{n-1} + \ldots,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са реални константи.

Задача 1.6. * Да се докаже, че за операторите

$$L = -D^2 + v(x), \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v', \quad D = \frac{d}{dx}$$

е справедливо следното представяне

$$[A, L] = 6v(x)v_x(x) - v_{xxx}(x),$$

т.е. комутаторът на диференциалните оператори L иA е оперратор на умножение на функцията $6v(x)v_x(x) - v_{xxx}(x)$.

Задача 1.7. Нека за операторите P_j и Q_k (j,k=1,2,3) са в сила комутационните съотношения:

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, P_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

наричани комутационни съотношения на Хайзенберг. Използвайки (5) да се покаже, за операторите на момента в квантовата механика

$$\begin{aligned} L_1 &= Q_2 P_3 - Q_3 P_2, \\ L_2 &= Q_3 P_1 - Q_1 P_3, \\ L_3 &= Q_1 P_2 - Q_2 P_1. \end{aligned} \tag{6}$$

имаме следните комутационни съотношения

$$[L_1, L_2] = iL_3,$$

$$[L_2, L_3] = iL_1,$$

$$[L_3, L_1] = iL_2.$$

При това за оператора на квадрата на импулса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2.$$

имаме

$$[L_j, L^2] = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Задача 1.8 *. Нека функцията $u(x, y)$ удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Да се покаже, че при смяната от декартови в полярни координати, т.е.

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi.$$

функцията

$$\tilde{u}(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

удовлетворява уравнението на Лаплас в полярни координати

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = 0.$$

Забележка. Резултата на тази задача обикновенно се записва във вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Задача 1.9. Нека имаме уравнението

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu\Phi = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Да се намерят всички стойности на параметъра ν, за които решението $\Phi(\varphi)$ удовлетворява следните гранични условия

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi),$$

Упътване Използвайте, че общото решение на уравнението може да бъде записано във вида

$$\Phi(\varphi) = Ae^{i\sqrt{\nu}\varphi} + Be^{-i\sqrt{\nu}\varphi}, \quad \nu \neq 0,$$

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi, \quad \nu = 0.$$

Отговор

$$\nu = m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Задача 1.10.Нека имаме радиалното уравнение на Шрьодингер

$$\frac{d^2S}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dS}{dr} + \{k^2 - V(r) - \frac{\lambda}{r^2}\}S = 0, \quad 0 < r < \infty.$$

Да се покаже, че ако положим

$$S = r^{-\frac{1}{2}}R(r),$$

получаваме уравнението

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - V(r) - \frac{\lambda - 1/4}{r^2}\right)R = 0.$$

Да се покаже,че ако в последното уравнение направим смяната

$$R(r) = \chi(r)/r,$$

то:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 - V(r) - \frac{\lambda - 1/4}{r^2}\right)\chi = 0.$$