КОНСПЕКТ

по комплексен анализ за студентите
от специалността "Приложна математика II курс, 2009г.

1. Комплексни числа. Алгебраичен и тригонометричен вид. Формули на Моавър. Формули на Ойлер.

2.а. Топология на комплексната равнина(Околност на точка, отворено, затворено, ограничено множество.) Крива, затворена крива, лема на Жордан. Област, едносвързана и многосвързана.

б. Редици от комплексни числа.

3. а. Редове от комплексни числа. Основни критерии за абсолютна сходимост.

б. Функционални редове. Редове от непрекъснати функции. Равномерна сходимост. Непрекъснатост на сумата на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции. Критерий за равномерна сходимост.

4. а. Степенни редове. Теорема на Абел.

б. Радиус на сходимост. Формула на Коши-Адамар.

в. Диференциране на степенни редове.

5. а. Функции на комплексна променлива. Непрекъсната функция.

б. Диференцируема функция. Уравнения на Коши-Риман.

6. Хармонични функции. Определяне на $\Im f(z) = v(x, y)$ по $\Re f(z) = u(x, y), (f = u + iv)$.

7. а. Функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$ и sh$z$, $\cosh z$. Формули на Ойлер.

б. Оценки за $|\sin z|$, $|\cos z|$, нули на $\sin z$, $\cos z$, периодичност на e^z.

8. а. Интеграл от функция на комплексна променлива. Основни свойства, оценки. Свеждане до криволинеен интеграл от втори род.

б. Примери $\int dz$, $\int z\,dz$, $\int_{|z-a|=R}(z-a)^n\,dz = 0(n \neq -1), 2\pi i(n = -1)$.

9. а. Теорема на Коши за за едносвързана област. (Доказателство чрез формулата на Гриин или чрез свеждане до триъгълник.)

б. Теорема на Коши за многосвързана област, в частност за двусвързана област.

10. а. Обратна функция, производна на обратна функция.

б. Функциите $\ln z$, $\arcsin z$, arctg$z$ като обратни на e^z, $\sin z$, tg$z$. $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$.

11. Примитивна $(F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds \rightarrow F'(z) = f(z))$.

12. Формула на Коши.

13. а. Интегрални формули за производните.

б. Теорема за безкрайна диференцируемост на аналитична функция. (като следствие от формулата на Коши)

14. Редици и редове от аналитични функции.

15. Развитие на аналитична функция в ред на Тейлър.

16. а. Оценки на Коши за коефициентите на степенен ред.

17. Теорема на Лиувил.

18. а. Теорема за единственост.

б. Нули на аналитична функция. Кратност на нула. (Нулите на аналитична функция не могат да имат точка на сгъстяване.)

19. а. Степенни редове от вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ област на сходимост $r < |z-a| < R$. Теорема на Лоран.

б. Единственост на разложението в ред на Лоран.

20. а. Изолирани особени точки на аналитична функция.

б.Теорема за съществуване на особеност на окръжността на сходимост на степенен ред.

21. а. Отстранима особена точка. Теорема на Риман.

22. а. Полюс, кратност на полюс. Връзката между кратността на нулата на аналитична функция $\varphi(z)$ с полюса на $f(z) = 1/\varphi(z)$.

23. а. Съществено-особена точка. Теорема на Сохоцки-Вайерщрас.(без доказателство) Примери.

24. Класификация на особени точки в ∞.

25. а. Теорема за резидуумите.

б. Резидуум в ∞.

в. Правила за пресмянане на резидуум в случая на полюс (прост полюс, кратен полюс).

26.а. Пресмятане на определени интеграли от рационални функции с теоремата на резидуумите.

б. Лема на Жордан. Примери за пресмятане на интеграли:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \mu x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi^{-\mu a}}{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{x \sin \mu x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi^{-\mu a}}{2}.$$

27. а. Пресмятане на интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum \alpha_j \varphi(a_j) - \sum \beta_j \varphi(b_j)$.

б. Теорема за логаритмичния индикатор: $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P$. .Основна теорема на алгебрата.

28. Теорема на Руше.

29. Интеграл на Поасон. Формула на Шварц.

30. Разлагане на $\operatorname{ctg} z$ на елементарни дроби.

Литература:

1.Т. Аргирова, Теория на аналитичните функции, С У "Кл. Охридски София, 1992.

2. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, М. Наука, 1984.

3. А.И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М.,1950.

4. Т. Аргирова, Т. Генчев, Сборник от задачи по теория на аналитичните функции, С У "Кл. Охридски София, 1992.

4. Е. Христов, К. Влъчкова, Задачи и теореми по комплексен анализ, www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/hristov, www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl.

5.03.2009 г. Е. Христов