

КРИВОЛИНЕЙНИ И  
ПОВЪРХНИННИ ИНТЕГРАЛИ,  
ФОРМУЛА НА СТОКС,  
МНОГООБРАЗИЯ

В настоящото пособие са разгледани основните понятия на математическия анализ за функции на няколко независими променливи: непрекъснатост, частни производни, развитие на функциите в ред на Тейлор, локални екстремуми, кратни интеграли и приложенията им.

Използвана литература:

- Дойчинов: Математически анализ в евклидови пространства
- Илин, Садовничий, Сендов: Курс по математически анализ, том 2
- Зорич: Математически анализ, том 1 и 2
- Рудин, Основи на математическия анализ
- Фихтенголц, Курс по диференциално и интегрално смятане, том 3

# Глава 1

## Криви и криволинейни интеграли

### 1.1 Параметрично зададени криви

#### Дефиниция на параметрично зададена крива.

Тук ще повторим някои дефиниции от параграфи 2.12 и 4.4 на част I.

**Дефиниция.** *Казваме, че множеството от точки  $\Gamma$  в равнината е параметрично зададена крива, ако са дадени две функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , дефинирани в интервала  $\Delta$ , така че всяка точка  $(x, y) \in \Gamma$  се представя във вида*

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

за някое  $t \in \Delta$ .

Двойката функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  ще наричаме параметрично представяне на  $\Gamma$ . Ако се условим да означаваме с  $\vec{P} = (x, y)$  радиус-вектора на произволна точка от равнината, то горните две скаларни равенства могат да бъдат записани като едно векторно равенство

$$\vec{P} = \vec{P}(t), \quad t \in \Delta,$$

където сме означили  $\vec{P}(t) = (x(t), y(t))$ .

По-нататък ще видим, че всяка параметрично зададена крива притежава безкрайно много параметрични представяния. Един от основните проблеми е да се въведат понятия, независими от параметричното представяне на кривата. Засега обаче ще предполагаме, че заедно с всяка разглеждана крива е зададено и едно фиксирано параметрично представяне. Това ни дава възможност да дадем следните дефиниции:

**Дефиниция.** Кривата  $\Gamma$  ще наричаме:

- *непрекъсната*, ако функциите  $x(t)$ ,  $y(t)$  са непрекъснати.
- *$n$ -кратно гладка*, ако  $x(t)$  и  $y(t)$  са  $n$ -кратно гладки, т.е. притежават непрекъснати производни до ред  $n$  включително.
- *проста (незатворена)*, ако на различни стойности на  $t$  съответствуват различни точки  $(x(t), y(t))$  от равнината.
- *проста затворена*, ако функциите  $x(t)$  и  $y(t)$  вземат еднакви стойности в двата края  $a$  и  $b$  на дефиниционния интервал  $\Delta = [a, b]$ , но на всяка друга двойка стойности на параметъра  $t_1, t_2 \in D$  съответствуват различни точки от равнината.

Същата дефиниция е в сила и за криви в тримерното пространство, или, по-общо, в  $\mathbb{R}^n$ , с единствената разлика, че параметричните функции са три (или съответно  $n$ ) на брой.

Примери на параметрично зададени криви в равнината могат да бъдат видяни в §2.12 на част I.

Ще отбележим, че графиките на функциите също могат да бъдат разглеждани като параметрично зададени криви. Наистина, ако функцията  $f(x)$  е зададена в интервала  $[a, b]$ , то нейната графика може да бъде параметрично представена чрез уравнението  $y = f(x)$ , което формално може да бъде записано във вида:

$$x = t, y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Понякога ще казваме, че такива криви са явно зададени.

**Забележка.** В приложенията често се разглеждат т.нар. частично гладки криви. Това означава, че дефиниционната област  $[a, b]$  може да се раздели на краен брой подинтервали, във вътрешността на всеки от които кривата е гладка, и в делящите точки производните на параметричните функции притежават граници отляво и отдясно.

**Теорема на Жордан.** Може да се докаже, че всяка проста затворена и непрекъсната крива  $\Gamma$  в  $\mathbb{R}^2$  разделя равнината на две линейно свързани части – ограничена и неограничена. Ограничената част се нарича вътрешност на кривата и се бележи с  $\text{int } \Gamma$ .

Макар че тази теорема изглежда очевидна, нейното пълно доказателство е доста трудно\*, и ние не го привеждаме тук.

**Регулярни криви.** Важно е да се види, че гладкостта на параметризиращите функции  $x(t)$  и  $y(t)$  не е достатъчна, за да бъде кривата гладка в обичайния смисъл на думата. Наистина, да разгледаме кривата с уравнения

$$x = t^2 \operatorname{sign} t, \quad y = t^2, \quad t \in [-1, 1].$$

Въпреки, че параметричните функции притежават непрекъснати първи производни, тангента при  $t = 0$  не съществува (в същност кривата съвпада с графиката на функцията  $y = |x|$ ). Още по-лошо е положението с кривата, зададена с уравненията  $x = t^3$   $y = t^2$ ,  $t \in [-1, 1]$ .\* Това налага да се постави и допълнително условие върху параметричните уравнения:

**Дефиниция.** Кривата  $\Gamma$  ще наричаме регулярна, ако тя е поне еднократно гладка и навсякъде в  $D$  е изпълнено неравенството:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0,$$

т.е. производните на  $x(t)$  и  $y(t)$  не се анулират едновременно.

Както ще видим малко по-нататък, регулярните криви притежават допирателни прави във всяка своя точка, т.е. отговарят на интуитивната представа за гладка крива.

Точките, в които горните две производни се анулират едновременно, се наричат особени точки на кривата.

Явно зададените криви винаги са регулярни: ако  $f(x)$  притежава непрекъснати производни до ред  $n$ , то нейната графика е  $n$ -кратно гладка и регулярна (проверете!).

---

\* Важен елемент от това доказателство е теорията на индекса на крива относно точка, която ние излагаме в §8.

\* За първата крива се казва, че в нулата притежава "ъглова точка", а за втората – "рогова точка".

**Връзка между различните параметрични представяния на дадена крива.**

Ако разглеждаме кривата като множество от точки в равнината, то очевидно то може да се получи чрез различни параметрични представяния. Те дори са безкрайно много, защото от дадено представяне можем да получим много други чрез смена на параметъра. По-точно, изпълнено е следното очевидно твърдение:

**Твърдение 1.** *Нека  $\Gamma$  е регулярна и проста параметрично зададена крива с уравнения*

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b].$$

*Нека  $t(\tau)$  е гладка функция, изпрацаща интервала  $[\alpha, \beta]$  в интервала  $[a, b]$ , като навсякъде имаме  $t'(\tau) \neq 0^*$ . Тогава уравненията*

$$x = x(t(\tau)), y = y(t(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$$

*също дават регулярно параметрично представяне на кривата  $\Gamma$ .*

По-интересно за нас е, че и обратното твърдение също е изпълнено:

**Теорема 2.** *Нека дадена крива  $\Gamma$  притежава две различни регулярни параметрични представяния:*

$$\vec{P} = \vec{P}(t) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

$$\vec{P} = \vec{P}(\tau) : x = \tilde{x}(\tau), y = \tilde{y}(\tau), \tau \in [\alpha, \beta].$$

*Тогава те се получават едно от друго чрез смяна на параметъра. По-точно, съществува еднозначно определена гладка функция  $t(\tau) : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ , такава че навсякъде  $t'(\tau) \neq 0$ , и са изпълнени равенствата*

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)), \tilde{y}(\tau) = y(t(\tau)).$$

---

\* Оттук веднага следва, че функцията е строго монотонна и дава взаимно еднозначно съответствие между интервалите  $[\alpha, \beta]$  и  $[a, b]$ .

**Доказателство.** Първо ще докажем твърдението локално. Нека  $\vec{P}_0 = \vec{P}(t_0) = \vec{P}(\tau_0)$  е точка от  $\Gamma$ . Поради регулярността поне една от производните  $x'(t_0)$ ,  $y'(t_0)$  не се анулира; нека например  $x'(t_0) \neq 0$ . Тогава по теоремата за обратната функция (т. 2 от §2.2, част I) около  $t_0$  функцията  $x(t)$  притежава диференцируема обратна  $t = t(x)$ , дефинирана в околност на  $x(t_0)$ . Тогава функцията

$$t(\tau) = t(\tilde{x}(\tau)),$$

дефинирана в околност на  $\tau_0$ , удовлетворява изискванията на теоремата. Лесно се вижда, че тези изисквания определят  $t(\tau)$  еднозначно.

За да дефинираме функцията  $t(\tau)$  върху целия интервал  $[\alpha, \beta]$ , е достатъчно да го разделим на достатъчно малки подинтервали, да приложим във всеки от тях локалното твърдение, и да отбележим, че поради единствеността така дефинираните локално определени функции  $t(\tau)$  се сглобяват в една глобално определена. ■

**Криви в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^n$ .** Дадените по-горе дефиниции и теореми лесно се пренасят и за криви в  $\mathbb{R}^3$ , зададени с уравненията

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$$

Това е в сила и за почти всички следващи твърдения (без теоремата на Жордан). По същият начин можем да разглеждаме криви и в произволно крайномерно пространство. Параметрично зададената крива в  $\mathbb{R}^n$  с координати  $(x_1, \dots, x_n)$  се задава с параметричните уравнения

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), \quad t \in [a, b].$$

По-нататък – за икономия на място – ние ще разглеждаме главно двумерния случай, но всички дефиниции и теореми се пренасят към общия случай без съществени изменения. Ние най-често ще оставяме това на читателя.

**Посока върху крива.** Интуитивно, всяка параметризация на дадена крива определя посока върху нея, определена от посоката на нарастване на параметъра. Ще формализираме тази представа. Нека е дадена кривата  $\Gamma$  заедно с параметричното си представяне  $\vec{P} = \vec{P}(t)$ . Тогава върху точките от  $\Gamma$  е определена наредба. Нека са дадени точките  $\vec{P}_1, \vec{P}_2 \in \Gamma$ , като  $\vec{P}_1 = \vec{P}(t_1)$ ,  $\vec{P}_2 = \vec{P}(t_2)$ . Ще казваме, че  $\vec{P}_2$  следва  $\vec{P}_1$  (записваме  $\vec{P}_1 \prec \vec{P}_2$ ), ако  $t_1 \leq t_2$ . Такава наредба ще наричаме посока върху  $\Gamma$ .

Ще видим как наредбата се променя в зависимост от избраното параметрично представяне. Нека е дадено друго регулярно параметрично

представяне  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  на  $\Gamma$ , и нека  $\vec{P}(\tau) = \vec{P}(t(\tau))$ . Тъй като  $t'(\tau) \neq 0$ , то знакът на  $t'(\tau)$  може да е или навсякъде плюс, или навсякъде минус. Следователно  $t(\tau)$  трябва да бъде строго монотонно растяща или строго монотонно намаляваща. Ако тя е растяща, наредбите, определени от двете параметрични представяния, съвпадат; в такъв случай ще казваме, че представянията  $\vec{P} = \vec{P}(t)$  и  $\vec{P} = \vec{P}(\tau)$  са еднакво ориентирани. Ако  $t(\tau)$  е монотонно намаляваща, наредбите, определени от представянията, са противоположни една на друга; в такъв случай казваме, че представянията са противно ориентирани. Накратко от горните разсъждения получаваме:

**Твърдение 3.** *Върху всяка параметрично зададена крива съществуват точно две посоки, като едната е противоположна на другата.*

**Дефиниция.** *Под ориентирана крива ще разбираме кривата като геометричен обект, заедно с една избрана върху нея посока. Казано формално, разглеждаме кривата заедно с даден клас от еднакво ориентирани нейни параметрични представяния.*

#### Допирателна към параметрично зададена крива.

Нека  $P_0$  и  $P$  са две точки от кривата  $\Gamma$ . Определената от тях права ще наричаме секуща за  $\Gamma$  ще бележим с  $l_{P_0, P}$ . Ще определим допирателната права в дадена точка като гранично положение на секущите:

**Дефиниция.** *Нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива и  $P_0 \in \Gamma$ . Ще казваме, че правата  $l$  е допирателна, или тангента, към  $\Gamma$  в  $P_0$ , ако тя е граница на секущите  $l_{P_0, P_n}$  за всяка редица  $\{P_n\}$  от точки, лежащи върху  $\Gamma$  и клонящи към  $P_0$ .*

Ясно е, че графиката на функцията  $f(x) = |x|$ , разгледана по-горе, не притежава допирателна в началото на координатите, макар че може да бъде гладко параметризирана. Ако поискаме обаче освен гладкостта да има и регулярност, то допирателната съществува, както се вижда от следната теорема:

**Теорема 4.** *Нека  $\vec{P}_0 = \vec{P}(t_0)$  е точка от кривата  $\Gamma$ , производните  $x'(t_0)$  и  $y'(t_0)$  съществуват и поне едната от тях не е нула. Тогава допирателната в  $P_0$  съществува и е колинеарна с вектора*

$$\vec{l}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$



**Доказателство.** Нека  $t_n$  е редица от стойности на параметъра  $t$ , клоняща към  $t_0$ , и  $\vec{P}_n = \vec{P}(t_n)$ . Векторът  $P_0\vec{P}_n = \vec{P}_n - \vec{P}_0$  е колинеарен със секущата  $l_{P_0, P_n}$ . Редицата от тези вектори клони към нулевия вектор и следователно е безполезна за определянето на границата на секущите. Ако обаче вместо тях разгледаме пропорционалните на тях вектори

$$\frac{1}{t_n - t_0} P_0\vec{P}_n = \left( \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0}, \frac{y(t_n) - y(t_0)}{t_n - t_0} \right),$$

виждаме, че границата съществува и съвпада с вектора  $\vec{l}(t_0)$ . Следователно, границата на секущите съществува. Очевидно тя съвпада с правата, минаваща през точката  $\vec{P}_0$  и колинеарна с вектора  $\vec{l}(t_0)$ . ■

В частност, ако имаме крива, явно зададена с уравнението  $y = f(x)$ , от горната теорема получаваме допирателния вектор  $(1, f'(x))$ .

Аналогично, за крива в тримерното пространство получаваме допирателен вектор  $\vec{l}(t)$  с компоненти

$$\vec{l}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

**Забележка.** По дефиниция допирателната права не зависи от избраното параметрично представяне на кривата. За допирателния вектор  $\vec{l}(t)$  това не е вярно; при избор на различни параметрични представяния съответните допирателни вектори обаче са колинеарни един на друг, т.е. единият може да бъде получен от другия чрез умножение с числова функция.\*

Донякъде зависимостта от параметричното представяне може да бъде избягната, ако вместо  $\vec{l}(t)$  разгледаме *единичния допирателен вектор*  $\vec{e}(t)$  :

$$\vec{e}(t) = \frac{\vec{l}(t)}{|\vec{l}(t)|} = \left( \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

(Аналогична е формулата и в  $\mathbb{R}^3$ ).

---

\*Това лесно се вижда непосредствено като следствие от теорема 2.

От теорема 2 и твърдение 3 следва:

**Твърдение 5.** *Единичният допирателен вектор  $\vec{e}(t)$  не зависи от параметричното представяне на кривата, а само от посоката, която то определя.*

Лесно се вижда, че ако изберем друго параметрично представяне на кривата, задаващо противоположна посока, единичният допирателен вектор  $\vec{e}(t)$  се заменя с противоположния вектор  $-\vec{e}(t)$ .

От значение е и *единичният нормален вектор  $\vec{n}(t)$* , получен от  $\vec{e}(t)$  чрез завъртане на ъгъл  $\pi/2$  по часовниковата стрелка:

$$\vec{n}(t) = \left( \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, -\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

**Директорни косинуси на вектор.** Нека  $\vec{e}$  е единичен вектор в  $\mathbb{R}^3$ , и нека означим с  $\alpha, \beta, \gamma$  ъглите, които  $\vec{e}$  сключва с координатните вектори  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ . Тогава проекциите на  $\vec{e}$  върху координатните оси съвпадат с косинусите на тези ъгли, и получаваме

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Компонентите на  $\vec{e}$  се наричат още негови директорни косинуси. Очевидно е изпълнено равенството

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Специално, за единичният допирателен вектор  $\vec{e}(P)$  в точката  $P$  означаваме съответните ъгли с  $\alpha(P), \beta(P), \gamma(P)$ , и записваме

$$\vec{e}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P), \cos \gamma(P)).$$

Аналогично записване може да се направи и в  $\mathbb{R}^2$ , но там то не е особено съдържателно, тъй като тогава  $\beta = \pi/2 - \alpha$ .

**Дължина на крива.** За удобство тук ще повторим дефиницията и формулата за пресмятане на дължината на крива, дадени в §4.4 на част I. Нека е дадена параметрично зададената крива  $\Gamma$  с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ , и нека  $\prec$  е наредбата, определена от параметричното представяне и задаваща посоката на  $\Gamma$ . Ще казваме, че е зададено

разбиване  $\tau$  на  $\Gamma$ , ако за дадени краен брой точки  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$ , така че  $P_0 = A$ ,  $P_n = B$ , и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$ . Да означим

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} |\overline{P_{i-1}P_i}|.$$

Под  $L_\tau$  ще разбираме начупената линия, съставена от отсечките  $\overline{P_{i-1}P_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  (точките  $P_i$  се наричат възли на начупената). В такъв случай ще казваме също, че начупената линия  $L_\tau$  е вписана в  $\Gamma$ .

Лесно се вижда, че понятието "вписана начупена линия" не зависи от избора на наредбата. Наистина, за да получим начупената линия, всеки от тези възли трябва да свържем с отсечки с двата възела, които са му съседни според дадената наредба. Ако сменим тази наредба с противоположната, съседни на дадената точка ще бъдат същите две точки, както и преди това.

**Дефиниция 1.** *Дължина на дадена крива ще наричаме точната горна граница на дължините на вписаните в нея начупени линии.*

Кривата се нарича *ректифицируема*, ако дължината и е крайна, т.е. дължините на всички вписани в нея начупени линии са ограничени отгоре. Пример на неректифицируема непрекъсната крива ни дава графиката на функцията  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  в интервала  $[0, 1]$  (допълнена с условието  $f(0) = 0$ ).

**Дефиниция 2.** *Дължина на дадена крива наричаме границата на дължините на начупените линии  $L_\tau$ , когато  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .*

**Теорема 6.** *Двете дефиниции са еквивалентни. По-точно, всяка крива, която притежава дължина по първата дефиниция, притежава такава и по втората, като двете дължини съвпадат.*

Доказателството може да се види в §4.4 на част I.

**Пресмятане на дължината на гладка крива.**

**Теорема 7.** *Нека кривата  $\Gamma$  е еднократно гладка, т.е. притежава координатно представяне*

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

в която функциите  $x(t)$  и  $y(t)$  са диференцируеми и имат непрекъснати производни. Тогава за дължината на кривата  $\Gamma$  е в сила формулата\*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Забележка.** Понякога тази формула се записва във вида

$$l(\Gamma) = \int_a^b |\vec{l}(t)| dt.$$

**Доказателство.** Ще използваме втората дефиниция. Нека  $\tau$  е разбиране, определено от точките  $P_0, \dots, P_n$ , като  $P_i = \vec{P}(t_i)$ , и нека  $L_\tau$  е съответната начупена линия. Тогава за нейната дължина  $l(L_\tau)$  получаваме

$$l(L_\tau) = \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Използувайки теоремата за крайните нараствания, можем да запишем този израз във вида

$$\begin{aligned} l(L_\tau) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

където  $\xi_i$  и  $\tilde{\xi}_i$  са подходящи точки от интервала  $(t_{i-1}, t_i)$ .

Можем да забележим, че горният израз наподобява риманова сума за съответния интеграл. Единственото различие се състои в това, че в горната сума фигурират две различни междинни точки  $\xi_i$  и  $\tilde{\xi}_i$ .

---

\* Читателят лесно ще съобрази как изглежда тази формула за криви в  $\mathbb{R}^3$ .

Ще видим, че това различие не е съществено. Наистина, да разгледаме римановата сума

$$R_\tau = \sum_{i=1}^n \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}),$$

съответстваща на разбиването  $\tilde{\tau} : a = t_0 < \dots < t_n = b$  и междинните точки  $\xi_i$ . Ясно е, че  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  точно тогава, когато  $\text{diam } \tilde{\tau} \rightarrow 0$ .

Ще покажем, че

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} (R_\tau - l(L_\tau)) = 0.$$

За да оценим разликата между  $l(L_\tau)$  и  $R_\tau$ , ще използваме неравенството

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \tilde{b}^2} \right| = \left| \frac{b + \tilde{b}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + \tilde{b}^2}} (b - \tilde{b}) \right| \leq |b - \tilde{b}|.$$

Прилагайки това неравенство почленно, получаваме

$$|R_\tau - l(L_\tau)| \leq \sum_{i=1}^n \left| y'(\xi_i) - y'(\tilde{\xi}_i) \right| (t_i - t_{i-1}).$$

Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Да изберем  $\delta > 0$  такава, че от  $|t' - t''| < \delta$ ,  $t', t'' \in [a, b]$  да следва  $|y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon$ . Тогава, ако  $\text{diam } \tilde{\tau} = \max(t_i - t_{i-1}) < \delta$ , ще имаме  $|R_\tau - l(L_\tau)| < \varepsilon(b - a)$ , т.е. разликата  $R_\tau - l(L_\tau)$  може да бъде направена произволно малка.

Тъй като  $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  е граница на римановите суми  $R_\tau$  при  $\text{diam } \tilde{\tau} \rightarrow 0$ , същото е вярно и за дължините на начупените  $l(L_\tau)$ . ■

Ситуацията, до която стигнахме в горната теорема, ще се среща много пъти в по-нататъшния текст. Тук ще я формализираме, т.е. ще я представим като частен случай на обща теорема. Нека с  $\tau$  означаваме разбиване на интервала  $[a, b]$ , т.е. съвкупността от делящи точки  $t_i$  и междинни точки  $\xi_i$ , и нека за всяко разбиване  $\tau$  са дадени сумите

$$R_\tau = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\tau) (t_i - t_{i-1}), \text{ и } \tilde{R}_\tau = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i(\tau) (t_i - t_{i-1}).$$

**Лема 8.** *Да предположим, че*

$$\max_i |\alpha_i(\tau) - \tilde{\alpha}_i(\tau)| \rightarrow 0 \text{ при } \text{diam } \tau \rightarrow 0.$$

*Тогавя  $R_\tau - \tilde{R}_\tau$  също клони към нула.*

**Доказателство.** *Предположението на лемата означава, че за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$  такава, че при  $\text{diam } \tau < \delta$  да имаме  $|\alpha_i(\tau) - \tilde{\alpha}_i(\tau)| < \varepsilon$  за всяко  $i$ . Следователно за такива  $\tau$  ще имаме*

$$\left| R_\tau - \tilde{R}_\tau \right| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i(\tau) - \tilde{\alpha}_i(\tau)| (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon(b - a). \blacksquare$$

Очевидно аналогични твърдения са в сила и за двойни и тройни интеграли.

Читателят сам ще съобрази, че втората част от доказателството на теорема 7 представлява частен случай на настоящата лема.

### Упражнения.

1. Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка регулярна крива в равнината. За всяка точка  $P \in \Gamma$  да нанесем отсечка с дължина  $\varepsilon$  от точката  $P$  по нормалата  $\vec{n}(P)$ , и нека  $D_\varepsilon$  е обединението на всички такива отсечки. Докажете, че

$$l(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mu(D_\varepsilon).$$

**Упътване.** Достатъчно е да докажем равенството за параметрично зададена крива. Нека  $P = P(t) = (x(t), y(t))$  е параметрично представяне за  $\Gamma$ , като  $t \in [a, b]$ . Нека  $\Delta$  да е правоъгълника  $[a, b] \times [0, \varepsilon]$ . Да разгледаме изображението  $\Phi : \Delta \rightarrow D_\varepsilon$ , зададено с формулите

$$\Phi(t, \tau) = \vec{P}(t) + \tau \vec{n}(t) = (x(t) - \tau \sin \alpha(t), y(t) + \tau \cos \alpha(t)).$$

Тук  $\vec{n}(t)$  означава нормалата в точката  $P(t)$ , а  $\alpha(t)$  е ъгълът, който допирателният вектор  $\vec{l}(t)$  в същата точка сключва с абсцисната ос. В §4.4 на част I е показано, че

$$\alpha'(t) = k(t) \cdot \left| \vec{l}(t) \right|,$$

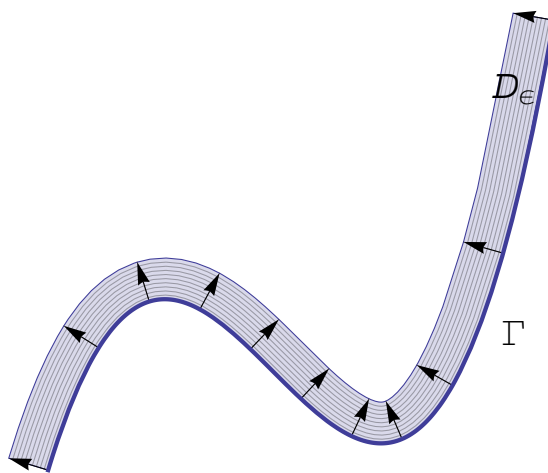
където  $k(t)$  е кривината на  $\Gamma$ . За якобиана на изображението  $\Phi$  получаваме

$$J_\Phi(t, \tau) = \frac{D(x, y)}{D(t, \tau)} = \begin{vmatrix} x' - \tau \alpha' \cos \alpha & y' + \tau \alpha' \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \left| \vec{l}(t) \right| (1 - \tau k(t)).$$

Използвайки формулата за смяна на променливите, за лицето на  $D_\varepsilon$  получаваме

$$\begin{aligned}\mu(D_\varepsilon) &= \iint_{D_\varepsilon} dx dy = \int_a^b \int_0^\varepsilon |J_\phi(t, \tau)| d\tau dt = \\ &= \varepsilon \int_a^b |\vec{l}(t)| dt - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_a^b |\vec{l}(t)| k(t) dt = \varepsilon l(\Gamma) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_\Gamma k(P) dl,\end{aligned}$$

откъдето следва твърдението.



Чертеж към задача 1.

**2.** Докажете, че най-краткото разстояние между две точки в пространството е по свързващата ги отсечка.

**Упътване.** Нека са дадени точките  $P_1$  и  $P_2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Тъй като дължината на кривата не зависи от избора на ортогонална координатна система в пространството, ние можем така да изберем координатната система, че и двете точки да лежат на оста  $x$ . Можем да считаме, че  $P_1 = (0, 0, a)$  и  $P_2 = (0, 0, b)$ .

Нека е дадена еднократно гладка крива  $\Gamma$ , зададена с уравнения

$$P = P(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

която свързва точките  $P_1$  и  $P_2$  (това значи, че  $P(\alpha) = P_1$ ,  $P(\beta) = P_2$ ). По формулата за дължина на крива имаме

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |x'(t)| dt \geq \\ &\geq \left| \int_{\alpha}^{\beta} x'(t) dt \right| = |x(\beta) - x(\alpha)| = |b - a|. \end{aligned}$$

С други думи, дължината на  $\Gamma$  е по-голяма или равна на дължината на отсечката, свързваща точките  $P_1$  и  $P_2$ .

**3.** Нека  $\varrho$  и  $\theta$  са полярните координати в равнината (виж §1.9 на част II), и нека кривата  $\Gamma$  е зададена с полярните уравнения

$$\varrho = \varrho(t), \theta = \theta(t), t \in [a, b].$$

Уравненията в декартови координати са

$$x = \varrho(t) \cos \theta(t), y = \varrho(t) \sin \theta(t), t \in [a, b].$$

Докажете, че дължината  $l(\Gamma)$  се дава с формулата

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\varrho'(t)^2 + \varrho(t)^2 \theta'(t)^2} dt.$$

**4.** Нека  $\varrho$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  са сферичните координати в  $\mathbb{R}^3$  (виж §1.9 на част II), и нека уравненията на  $\Gamma$  в тези координати са

$$\varrho = \varrho(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t \in [a, b].$$

За уравненията в декартови координати получаваме

$$x = \varrho(t) \cos \theta(t) \sin \varphi(t), y = \varrho(t) \sin \theta(t) \sin \varphi(t), z = \varrho(t) \cos \varphi(t), t \in [a, b].$$

Докажете, че дължината  $l(\Gamma)$  се дава с формулата

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\varrho'(t)^2 + \varrho(t)^2 (\sin^2 \varphi(t) \theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2)} dt.$$



**5.** Докажете, че най-краткото разстояние между две точки върху сферата е по дъга от голямата окръжност, минаваща през точките.

**Пояснение.** Под *голяма окръжност* върху сферата се разбира такава окръжност, чиито радиус е равен на радиуса на сферата. През всеки две точки минава точно една голяма окръжност – тя се получава като сечение на сферата с равнината, определена от тези две точки и центъра на сферата.

**Упътване.** Нека  $P_1$  и  $P_2$  са точки върху сферата  $S_R$  с център в началото и радиус  $R$ . Можем да изберем координатната система по такъв начин, че точките  $P_1$  и  $P_2$  да лежат на един меридиан (който ще съвпада с единствената голяма окръжност, минаваща през точките). Това означава, че в сферични координати имаме

$$P_1 = (R, \theta, \varphi_1), \quad P_2 = (R, \theta, \varphi_2).$$

Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка крива върху  $S_R$ , свързваща точките  $P_1$  и  $P_2$ , с уравнения в сферични координати

$$\varrho = R, \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

По формулата от задача 3 (имайки пред вид, че  $\varrho'(t) = 0$ ), получаваме:

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= R \int_a^b \sqrt{\sin^2 \varphi(t) \theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2} dt \geq R \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2} dt \geq \\ &\geq R \left| \int_a^b \varphi'(t) dt \right| = R |\varphi(b) - \varphi(a)| = R |\varphi_2 - \varphi_1|, \end{aligned}$$

което е точно разстоянието между  $P_1$  и  $P_2$  по меридиана.

**Забележка.** Нека имаме два града от северното полукълбо, които лежат на един и същи паралел. Тогава най-кратката линия между тези градове минава значително по на север от този паралел. Така например самолетите, летящи между София и Ню-Йорк, минават близо до южния бряг на Гренландия.

## 1.2 Криволинеен интеграл от първи вид

### Криволинеен интеграл от първи вид.

**Физическо обосноваване.** Ще започнем с механичната задача за маса на материална крива. По-точно, нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива (в равнината или пространството), и нека за точките  $P \in \Gamma$  е зададена неотрицателната функция  $f(P)$ , играеща ролята на *линейна плътност*. Ако си представим например тел с променлива дебелина и материален състав, извита по формата на  $\Gamma$ , линейната плътност  $f(P)$  е отношението на масата към дължината за малка дъга от кривата, съдържаща точката  $P$ :

$$f(P) \approx \frac{m(\Delta\Gamma)}{l(\Delta\Gamma)},$$

където  $\Delta\Gamma$  е такава малка дъга,  $m(\Delta\Gamma)$  е нейната маса, а  $l(\Delta\Gamma)$  – нейната дължина.

Същото понятие може да се дефинира и по-точно. Ако  $P_1$  и  $P_2$  са точки от кривата, а  $P_0$  се намира между тях (т.е.  $P_1 \prec P_0 \prec P_2$  относно някоя наредба), а с  $\Gamma_{P_1P_2}$  означим дъгата, съставена от всички точки, лежащи между  $P_1$  и  $P_2$ , то

$$f(P_0) = \lim_{P_1, P_2 \rightarrow P_0} \frac{m(\Gamma_{P_1P_2})}{l(\Gamma_{P_1P_2})}.$$

Да се опитаме сега да пресметнем масата на цялата крива  $\Gamma$ . Нека  $\tau$  е разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$  (т.е.  $P_0$  съвпада с началната точка на кривата,  $P_n$  – с крайната, и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$ ). Да означим с  $\Gamma_i$  дъгата, състояща се от точките между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ , и нека  $Q_i$  е произволна точка от тази дъга. Имайки пред вид равенството

$$f(Q_i) \approx \frac{m(\Gamma_i)}{l(\Gamma_i)},$$

получаваме за масата  $m(\Gamma)$  приблизителния израз

$$m(\Gamma) = \sum_{i=1}^n m(\Gamma_i) \approx \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i).$$

Ясно е, че колкото по-ситно е разбиването  $\tau$ , толкова по-точна е горната формула, и затова е естествено да получим масата на материалната крива като граница на израза отдясно при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .

**Дефиниция и пресмятане на криволинейният интеграл от I вид.** Сега можем да преминем към дефиницията на криволинеен интеграл от първи вид. Фактически ние възпроизвеждаме, с известни изменения, дефинициите, използвани при въвеждането на определения интеграл в част I:

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е параметрично зададена крива с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ . Ще казваме, че  $\tau$  е разбиване на  $\Gamma$ , ако са зададени точките  $P_0, \dots, P_n$ , като  $P_0 = A$ ,  $P_n = B$ , и  $P_0 < \dots < P_n$  (ще ги наричаме делящи точки, и по една точка  $Q_i \in \Gamma_i$ , лежаща в дъгата  $\Gamma_i$ , ограничена от точките  $P_{i-1}$  и  $P_i$  (ще ги наричаме междинни точки). Диаметър на разбиването  $\tau$  ще наричаме израза

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} |\overline{P_{i-1}P_i}|.$$

**Дефиниция.** Нека  $\tau$  е разбиване на ректифицируемата крива  $\Gamma$ , и  $f(P)$  е функция, дефинирана върху  $\Gamma$ . Под риманова сума за  $f$ , съответстваща на разбиването  $\tau$ , разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i).$$

Ще отбележим, че дефиницията на разбиване, а следователно и следващата дефиниция, не зависят от избора на посока върху параметрично зададената крива.

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е ректифицируема параметрично зададена крива, и  $f(P)$  е функция върху  $\Gamma$ . Под криволинеен интеграл от първи вид от функцията  $f$  върху кривата  $\Gamma$  ще разбираме числото

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f).$$

Ще казваме, че  $f(P)$  е интегруема върху  $\Gamma$ , ако горната граница съществува.

Във всички важни за нас случаи горната граница съществува, както се вижда от следното твърдение:

**Теорема 8.** Нека  $\Gamma$  е непрекъсната и ректифицируема параметрично зададена крива, и  $f(P)$  е непрекъсната функция върху  $\Gamma$ . Тогава  $f(P)$  е интегрируема върху  $\Gamma$ .

Тук няма да доказваме горната теорема в пълната и общност. За нас е достатъчно да разгледаме случая на еднократно гладка крива:

**Теорема 9.** Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка крива, зададена с параметричните уравнения

$$\vec{P} = \vec{P}(t) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

и нека  $f(P)$  е непрекъсната функция върху  $\Gamma$ . Тогава  $f(P)$  е интегрируема върху  $\Gamma$ , и е валидна формулата

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Формално, можем да запомним равенството

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

**Доказателство.** Нека  $\tau$ , както по-горе, е разбиване на  $\Gamma$ , като  $P_i = \vec{P}(t_i)$ ,  $Q_i = \vec{P}(\xi_i)$ . Тогава дялящите точки  $t_0, \dots, t_n$  и междинните точки  $\xi_1, \dots, \xi_n$  образуват разбиване на интервала  $[a, b]$ . За дължините на дъгите  $\Gamma_i$  използвайки формулата за дължина на крива и теоремата за средните стойности за интегралите, получаваме

$$l(\Gamma_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}),$$

където  $\tilde{\xi}_i$  е подходяща точка в интервала  $(t_{i-1}, t_i)$ .

Тогава

$$R_{\tau}(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot l(\Gamma_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x(\xi_i), y(\xi_i)) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

И тук сме в ситуация, подобна на срещнатата в доказателството на теорема 7 от предния параграф: изразът вдясно наподобява риманова сума за интересувания ни интеграл, обаче в него фигурират две различни междинни точки  $\tilde{\xi}_i, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Да образуваме друг израз:

$$\tilde{R}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(x(\tilde{\xi}_i), y(\tilde{\xi}_i)) \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

Тогава  $\tilde{R}_\tau(f)$  е риманова сума, и при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  клони към търсения интеграл  $\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ .

Остава да докажем, че  $R_\tau(f) - \tilde{R}_\tau(f) \rightarrow 0$  при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Това следва от лема 8 в предния параграф, но за улеснение ще го докажем отново. Да изберем  $\varepsilon > 0$ . Тъй като функцията  $f(\vec{P}(t))$  е непрекъсната функция на параметъра  $t$ , можем да намерим  $\delta > 0$  такава, че ако  $|\xi - \xi'| < \delta$ , то  $|f(\vec{P}(\xi)) - f(\vec{P}(\xi'))| < \varepsilon$ . Нека  $C$  е една горна граница за функцията  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  в интервала  $[a, b]$ . Тогава

$$\begin{aligned} |R_\tau(f) - \tilde{R}_\tau(f)| &< \sum_{i=1}^n |f(\vec{P}(\xi)) - f(\vec{P}(\tilde{\xi}))| \sqrt{x'(\tilde{\xi}_i)^2 + y'(\tilde{\xi}_i)^2} (t_i - t_{i-1}) < \\ &< c\varepsilon \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = C\varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

и може да бъде направено произволно малко. ■

**Забележка.** От горното доказателство лесно се вижда, че криволинейният интеграл от първи вид може да се представи и като граница на сумите

$$\tilde{R}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \left\| \overrightarrow{P_{i-1}P_i} \right\|,$$

т.е. границата не се променя, ако заменим дължината на дъгата  $\Gamma_i$  с дължината на отсечката  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ .

**Свойства на криволинейния интеграл от първи вид.** Свойствата на този интеграл дословно съвпадат със свойствата на обикновения риманов интеграл, и ще бъдат дадени накратко. Ще разглеждаме само непрекъснати функции и непрекъснати ректифицируеми криви.

**Свойство 1 (Линейност).**

$$\int_{\Gamma} (f(P) + g(P)) dl = \int_{\Gamma} f(P) dl + \int_{\Gamma} g(P) dl, \quad \int_{\Gamma} \lambda f(P) dl = \lambda \int_{\Gamma} f(P) dl.$$

Наистина, достатъчно е в очевидните равенства

$$R_{\tau}(f + g) = R_{\tau}(f) + R_{\tau}(g), \quad R_{\tau}(\lambda f) = \lambda R_{\tau}(f)$$

да направим граничен преход при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .

**Свойство 2 (Позитивност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq 0, \text{ то } \int_{\Gamma} f(P) dl \geq 0.$$

Това следва от очевидното равенство  $R_{\tau}(f) \geq 0$ .

**Свойство 3 (Монотонност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq g(P), \text{ то } \int_{\Gamma} f(P) dl \geq \int_{\Gamma} g(P) dl.$$

(с други думи, неравенствата може да се интегрират).

Наистина, от неравенството  $f(P) - g(P) \geq 0$  и свойства 1 и 2 следва, че

$$\int_{\Gamma} f(P) dl - \int_{\Gamma} g(P) dl = \int_{\Gamma} (f(P) - g(P)) dl \geq 0.$$

**Свойство 4.**

$$\left| \int_{\Gamma} f(P) dl \right| \leq \int_{\Gamma} |f(P)| dl.$$

Получава се чрез интегриране на неравенствата

$$-|f(P)| \leq f(P) \leq |f(P)|.$$

**Свойство 5.**

$$\int_{\Gamma} 1 \, dl = l(\Gamma).$$

**Свойство 6. (Теорема за средните стойности).** Съществува точка  $P_0 \in \Gamma$  такава, че

$$\int_{\Gamma} f(P) \, dl = f(P_0) l(\Gamma)$$

(Числото  $f(P_0)$  се нарича *средна стойност* на функцията  $f$  върху  $\Gamma$ ).

**Доказателство.**

Очевидно всяка параметрично зададена непрекъсната крива е компактно подмножество на равнината (тя е непрекъснат образ на компактният интервал  $[a, b]$ ). От теоремите на Вайерштрас за непрекъснати функции върху компактни множества следва, че  $f(P)$  достига максималната и минималната си стойности върху  $\Gamma$  (да ги означим съответно  $M$  и  $m$ ). С други думи, съществуват точки  $P_{\min} = \vec{P}(t_{\min})$ ,  $P_{\max} = \vec{P}(t_{\max})$  от  $\Gamma$  такива, че за всяко  $P \in \Gamma$  имаме

$$m = f(P_{\min}) \leq f(P) \leq f(P_{\max}) = M.$$

Интегрирайки горните неравенства, вземайки пред вид свойство 5, и разделяйки неравенствата на  $l(\Gamma)$ , получаваме

$$m \leq \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) \, dl \leq M.$$

Функцията  $f(\vec{P}(t))$  е непрекъсната в  $[a, b]$ , и горното неравенство показва, че числото  $\frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) \, dl$  лежи между стойностите на тази функция в точките  $t_{\min}$  и  $t_{\max}$ . По теоремата за междинните стойности тази

стойност се достига в някоя точка  $t_0 \in [a, b]$ . Полагайки  $P_0 = \vec{P}(t_0)$ , получаваме

$$f(P_0) = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f(P) dl. \blacksquare$$

**Свойство 7. (Аддитивност).** Нека  $\Gamma_1$  е крива с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ , а  $\Gamma_2$  – крива с начална точка  $B$  и крайна точка  $C$ . Да означим с  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  кривата с начална точка  $A$  и крайна точка  $C$ , получена от съединяването на тези две криви (лесно се вижда, че  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  е също непрекъснатата параметрично задена крива). Тогава

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f(P) dl = \int_{\Gamma_1} f(P) dl + \int_{\Gamma_2} f(P) dl.$$

Твърдението се вижда лесно, ако така избираме римановите суми за интеграла отдясно, че точката  $B$  да фигурира между делящите точки.

**Забележка.** Дефиницията и свойствата на криволинейния интеграл от първи вид се пренасят без изменение в случая на криви, разположени в пространство с три или повече измерения. В  $\mathbb{R}^3$  например равенството от теорема 9 добива вида

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

## Приложения на криволинейния интеграл от първи вид.

**1. Маса и център на тежестта на материална крива.** Задачата за намиране на масата на материална крива беше мотивираща при въвеждането на криволинейния интеграл от първи вид. Ако тук означим плътността с  $\varrho(P)$  (вместо с  $f(P)$ , както беше по-горе), получихме за масата  $m(\Gamma)$  на материалната крива  $\Gamma$  формулата:

$$m(\Gamma) = \int_{\Gamma} \varrho(P) dl.$$



Следващото приложение е за пресмятане на център на тежестта на материална крива. Ще повторим разсъжденията, използвани в част II, §2.7 за намиране на центъра на тежестта на материална фигура. Нека са дадени точките  $P_1, \dots, P_n$  (в  $\mathbb{R}^2$  или  $\mathbb{R}^3$ ), с маси съответно  $m_1, \dots, m_n$ . Под център на тежестта на тази система разбираме точката

$$\vec{P}_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Ако точките  $\vec{P}_i$  имат координати  $(x_i, y_i)$ , то за координатите  $(x_*, y_*)$  на точката  $\vec{P}_*$  получаваме формулите

$$x_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Нека, както по-горе,  $\tau$  е разбиване на  $\Gamma$  с делящи точки  $P_i = (x_i, y_i)$  и междинни точки  $Q_i = (\xi_i, \eta_i) \in \Gamma_i$ , където  $\Gamma_i$  е дъгата, състояща се от точките между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . За да получим приблизителен израз за центъра на тежестта  $P_* = (x_*, y_*)$  на кривата  $\Gamma$ , ще считаме, че плътността е постоянна върху  $\Gamma_i$  и е равна на  $\rho(Q_i)$  и следователно масата  $m(\Gamma_i)$  е равна на  $\rho(Q_i) l(\Gamma_i)$ . Ще смятаме също, че тази маса е съсредоточена в точката  $Q_i$ . Тогава получаваме приблизителните формули

$$P_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \rho(Q_i) l(\Gamma_i) \cdot Q_i,$$

т.е.

$$x_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) l(\Gamma_i), \quad y_* \approx \frac{1}{m(\Gamma)} \sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) l(\Gamma_i).$$

Не е трудно да разпознаем в тези изрази римановите суми за съответните криволинейни интеграли. При  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  получаваме вече точните формули за координатите на центъра на тежестта на  $\Gamma$ :

$$x_* = \frac{1}{m(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \rho(x, y) dl, \quad y_* = \frac{1}{m(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \rho(x, y) dl$$

(в тримерния случай формулата за  $z_*$  изглежда по същия начин.

По-специално, в хомогенния случай (т.е. когато  $\rho(P) \equiv 1$ ) тези формули добиват вида

$$x_* = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \, dl, \quad y_* = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \, dl.$$

**Пример.** Нека  $\Gamma$  е горната полуокръжност на окръжност с център в началото и радиус  $R$ . Ще намерим нейния център на тежестта. (Читателят сам ще съобрази защо не търсим центъра на тежестта на цялата окръжност.) Очевидно  $\Gamma$  се параметризира с уравненията

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, \pi], \quad \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = R.$$

За координатите  $x_*, y_*$  на центъра на тежестта получаваме  $x_* = 0$  (очевидно) и

$$y_* = \frac{1}{\pi R} \int_{\Gamma} y \, dl = \frac{1}{\pi R} \int_0^{\pi} R^2 \sin t \, dt = \frac{2}{\pi} R.$$

### Първа теорема на Гулдин\*

В §2.7 на част II беше изведена формула за лицето на повърхнината  $S_f$ , получена от въртенето около оста  $x$  на графика на функцията  $f(x)$ , дефинирана в интервала  $[a, b]$ :

$$\mu(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx.$$

Ако сега  $\Gamma$  е еднократно гладка параметрично зададена крива, лежаща в горната полуравнина на  $\mathbb{R}^2$ , ще осначаваме с  $S_{\Gamma}$  повърхнината, образувана от въртенето на  $\Gamma$  около абсцисната ос. Както ще видим

---

\* Втората теорема на Гулдин се отнася за обема на ротационното тяло и е доказана в §2.7 на част II.

\* Формулата беше изведена на основата на интуитивната представа за лице на повърхнина. По-долу ние ще дадем точна дефиниция на това понятие.

по-долу, за лицето на тази повърхнина може да се напише формула, обобщаваща горната:

$$\mu(S_\Gamma) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_\Gamma y(t) dl.$$

Сравнявайки тази формула с изведената по-горе формула за  $y$ -координатата  $y_*$  на хомогенната материална крива  $\Gamma$ , ние получаваме първата теорема на Гулдин:

$$\mu(S_\Gamma) = 2\pi y_* \cdot l(\Gamma).$$

С други думи, лицето на ротационната повърхнина  $S_\Gamma$  е равно на дължината на  $\Gamma$ , умножена с дължината на окръжността, която центърът на тежестта описва при въртенето.

Например, при въртене на полуокръжност се получава сфера, и читателят лесно може да види връзката между координатите на центъра на тежестта ѝ, получени в предния пример, и лицето на сферата.

**Пример: Лице на тора.** Нека  $0 < r < R$ . Да означим с  $S$  окръжността с радиус  $r$  и център в точката  $(0, R)$ . Повърхността  $T$ , получена от въртенето на  $S$  около абсцисната ос, се нарича тор. В §2.7 на част II втората теорема на Гулдин беше използвана за намиране на обема на тялото, ограничено от  $T$  (т.нар. запълнен тор). Тук чрез първата теорема на Гулдин ще намерим лицето на  $T$ . Очевидно центърът на тежестта на една окръжност съвпада с нейния център, и следователно за лицето на тора  $T$  получаваме формулата

$$\mu(T) = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

**2. Околна повърхнина на криволинеен цилиндър.** Тримерният аналог на криволинейния трапец в тримерното пространство е криволинейният цилиндър. Под криволинеен цилиндър в  $\mathbb{R}^3$  разбираме тялото, определено с условията

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

където  $D$  е измеримо подмножество в равнината,  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  са непрекъснати функции, дефинирани в  $D$  и удовлетворяващи неравенството  $f(x, y) \leq g(x, y)$ . Долната и горната основа на криволинейния цилиндър съвпадат с графиките на функциите  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , и тяхното лице може да бъде намерено по известните формули (ние ще ги изведем още веднаж по-нататък). Тук ще намерим лицето на околната повърхност на  $V$ . Ще предполагаме, че границата на  $D$  съвпада с простата ректифицируема крива  $\Gamma$  (или, с други думи,  $D$  съвпада с вътрешността на  $\Gamma$ )\*.

Да вземем, както по-горе, разбиване  $\tau$  на кривата  $\Gamma$ , състоящо се от дялящи точки  $P_1, \dots, P_n$  и междинни точки  $Q_i \in \Gamma_i$ , като  $\Gamma_i$  означава частта от кривата, разположена между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . Нека  $S_{\text{ок}}$  е цялата околна повърхнина на  $V$ , а  $S_i$  е нейната част, разположена над  $\Gamma_i$ . Повърхнината  $S_i$  е близка до правоъгълник с основа, равна на  $l(S_i)$  и височина, равна на  $g(Q_i) - f(Q_i)$ . Получаваме приблизителен израз за лицето  $\mu(S)$ :

$$\mu(S_{\text{ок}}) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i) \approx \sum_{i=1}^n (g(Q_i) - f(Q_i)) l(S_i),$$

откъдето при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  получаваме точната формула

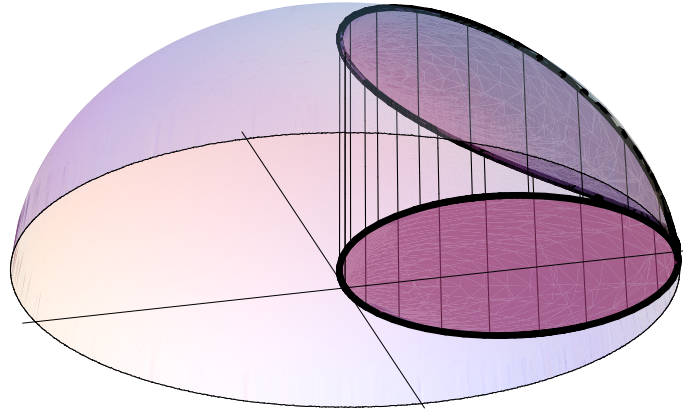
$$\mu(S_{\text{ок}}) = \int_{\Gamma} (g(P) - f(P)) dl.$$

**Пример: (Тяло на Вивиани).** Така се нарича сечението на горното полукълбо с център в началото и радиус  $R$  с вертикален прав кръгов цилиндър с радиус на основата  $R/2$  и център на основата в точката  $(R/2, 0)$ . Ако означим с  $D$  основата на цилиндъра, т.е. кръга с радиус  $R/2$  и център в  $(R/2, 0)$ , то тялото  $V$  се представя като криволинеен цилиндър с условията:

$$V = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

---

\*И тук ще се основаваме на интуитивната дефиниция за лице на повърхност. По-нататък, в §???, ние ще дадем строга дефиниция на това понятие и ще проверим отново изведените тук формули.



Тяло на Вивиани.

Окръжността, ограничаваща  $D$ , се параметризира с формулите

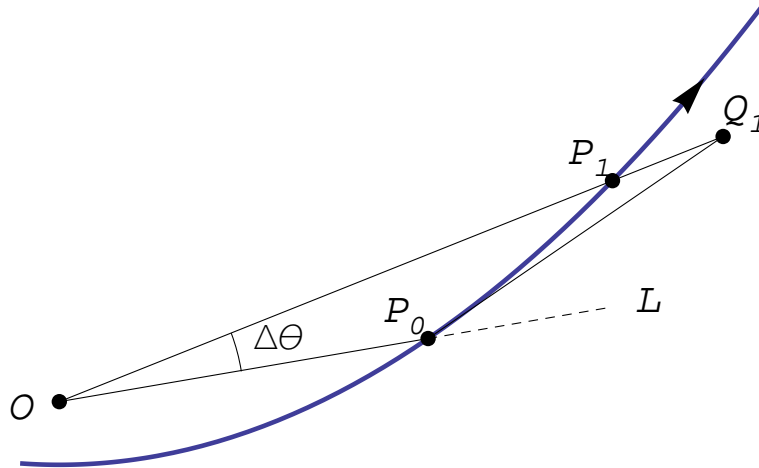
$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{R}{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

откъдето за лицето на околната повърхнина получаваме

$$\begin{aligned} \mu(S_{\text{ок}}) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}(1 + \cos t)\right)^2 - \left(\frac{R}{2} \sin t\right)^2} \cdot \frac{R}{2} dt = \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2R^2. \end{aligned}$$

От горните пресмятания се вижда следният геометричен факт: ако си представим, че околната повърхност на тялото на Вивиани е направена от хартия, и развием тази хартия, ще получим фигурата, заградена отдолу от абсцисната ос, а отгоре - от графика на синусоидата  $R \sin\left(\frac{x}{2R}\right)$ , като  $x$  се изменя в интервала  $[0, 2\pi R]$ .

**3. Интеграл на Гаус в равнината.** Нека имаме равнинна крива, която не минава през дадена точка. Гаус си е поставил следната задача: да се намери ориентиранят ъгъл, под който кривата се вижда от точката. Под ориентиран ъгъл тук се разбира ъгълът, разглеждан със знака си; при промяна на ъгъла в посока срещу часовниковата стрелка ъгълът нараства, а в противната посока – намалява. Следователно тук има значение и посоката на кривата; ако сменим посоката с противоположната, ъгълът, под който тя се вижда, ще смени знака си.



Интеграл на Гаус.

Да означим с  $O$  точката, от която гледаме. Ще пресметнем приблизително промяната  $\Delta\theta$  на търсения ъгъл, съответстваща на достатъчно малка дъга от кривата  $\Gamma$ , лежаща между точките  $P_0$  и  $P_1$ . Да прекараме допирателната към  $\Gamma$  в точката  $P_0$ , и да означим с  $Q_1$  пресечната точка на допирателната с продължението на отсечката  $\overline{OP_1}$ . Можем да считаме, че дължината на отсечката  $\overline{P_0Q_1}$  е близка до дължината  $\Delta l$  на дъгата  $P_0P_1$ \* Ще приложим синусовата теорема към триъгълника

\* Може да се докаже, че дължината на отсечката  $\overline{P_0Q_1}$  е от порядъка  $\Delta l^2$ , откъдето следва, че грешката, която допускаме при това предположение, е от същия порядък и не оказва влияние на окончателната формула.

$\triangle OP_0Q_1$ . Получаваме

$$\begin{aligned}\Delta\theta \approx \sin(\Delta\theta) &= |P_0Q_1| \frac{\sin \sphericalangle(OP_0Q_1)}{|OQ_1|} \approx \Delta l \frac{\sin \sphericalangle(OP_0Q_1)}{|OP_0|} = \\ &= \Delta l \frac{\sin \sphericalangle(\vec{OP}_0, \vec{e}(P_0))}{|OP_0|},\end{aligned}$$

където с  $\vec{e}(P_0)$  сме означили единичния допирателен вектор в точката  $P_0$ , съответстващ на посоката на кривата.

Нека сега  $\tau$  е разбиване на кривата  $\Gamma$ , и  $\Delta\theta_i$  е нарастването на ъгъла, съответстващо на дъгата  $\Gamma_i$ . За търсения ъгъл  $\Theta$  получаваме

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{\sin \sphericalangle(\vec{OP}_i, \vec{e}(P_i))}{|OP_i|} l(\Gamma_i).$$

Това е риманова сума за криволинеен интеграл от първи вид, и за ориентирания ъгъл получаваме формулата

$$\Theta = \int_{\Gamma} \frac{\sin \sphericalangle(\vec{OP}, \vec{e}(P))}{|\vec{OP}|} dl,$$

който се нарича *интеграл на Гаус*.

Ако точката  $O$  съвпада с началото на координатите, интегралът добива вида

$$\Theta = \int_{\Gamma} \frac{\sin \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|} dl.$$

**Пример.** Нека  $\Gamma_R$  е окръжността с център в началото и радиус  $R$ , ориентирана в положителна посока, т.е. срещу часовниковата стрелка. Тогава навсякъде върху нея имаме  $|\vec{P}| = R$  и  $\sin \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P)) = 1$ , откъдето за интеграла на Гаус получаваме

$$\Theta = \frac{1}{R} \int_{\Gamma_R} dl = \frac{l(\Gamma_R)}{R} = 2\pi,$$

както и трябваше да се очаква.

**4. Закон на Био-Савар.** Законът на Био-Савар описва силата, с която електрическият ток действа върху магнит (на това се основава работата на електромоторите). Нека токът тече със сила  $I$  между точката  $\vec{P}$  и близката до нея точка  $\vec{Q}$ . Да означим  $\vec{\Delta l} = \vec{PQ}$ . Тогава силата  $\vec{\Delta F}$ , с която токът действа на единичен магнитен товар, разположен в началото  $\vec{O}$  на координатите, приблизително се дава с формулата

$$\vec{\Delta F} \approx I \cdot \frac{\vec{P} \times \vec{\Delta l}}{|\vec{P}|^3}.$$

(тук знакът  $\times$  означава векторното произведение в  $\mathbb{R}^3$ ). Ако точките  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$  лежат в равнината  $Oxy$ . Тогава силата  $\vec{\Delta F}$  е насочена по оста  $z$ , т.е.  $\vec{\Delta F} = \Delta F \cdot \vec{z}$ , като

$$F \approx I \cdot \frac{\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|^2} |\vec{\Delta l}|.$$

Нека сега токът тече със сила  $I$  по равнинната крива  $\Gamma$ , и  $\tau$  е нейно разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n$ . Прилагайки горната формула за всяка от частите  $\Gamma_i$ , получаваме, че токът действа на единичен магнитен товар в началото със сила  $\vec{F} = F \cdot \vec{z}$ , и е в сила приблизителната формула

$$F \approx \sum_{i=1}^n \Delta F_i \approx \sum_{i=1}^n I \cdot \frac{\sin \angle(\vec{P}_i, \vec{e}(P_i))}{|\vec{P}_i|^2} |P_{i-1}P_i|.$$

След граничен преход получаваме точната формула за силата на въздействие:

$$F = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{\sin \angle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|^2} dl.$$

**5. Поток на течност през равнинна крива.** Нека е дадено стационарно (не зависещо от времето) течение на течност в равнината,



зададено с векторното поле на скоростта във всяка точка  $P$ :

$$\vec{V}(P) = (V_x(P), V_y(P)).$$

Нека  $\Gamma$  е ориентирана крива в равнината,  $\vec{e}(P)$  е единичният допирателен вектор в точката  $P$ , и  $\vec{n}(P)$  е единичният нормален вектор към  $\Gamma$ , получен чрез въртене на  $\vec{e}(P)$  на ъгъл  $\pi/2$  в отрицателна посока (както беше прието в §1.1).

Искаме да пресметнем количеството течност, което минава през  $\Gamma$  за единица време. При това течността, която минава в посока на  $\vec{n}(P)$ , ще броим със знак "+", а в противната – със знак "-".

Нека, както в предната точка, отсечката  $\vec{\Delta}l = \vec{PQ}$  съединява близките точки  $P$  и  $Q$ , и  $\vec{n}$  е единичният нормален вектор към нея. Ще допуснем, че векторът на скоростта навсякъде върху отсечката е постоянен и равен на  $\vec{e}(P)$ . Количеството на протеклата течност  $\Delta U$  за единица време е равно на произведението на дължината на отсечката с проекцията на скоростта върху нормалата:

$$\Delta U \approx |\vec{V}(P)| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{V}(P), \vec{n}) \cdot |\vec{\Delta}l| = |\vec{V}(P)| \cdot \sin \sphericalangle (\vec{V}(P), \vec{\Delta}l) \cdot |\vec{\Delta}l|.$$

Както и в предишната точка, можем да разбием  $\Gamma$  на малки дъги, и всяка дъга да заменим със съответната хорда. Разсъждавайки както по-горе, достигаме до формулата за количеството  $U_\Gamma$  на протеклата за единица време течност през  $\Gamma$ :

$$U_\Gamma = \int_\Gamma |\vec{V}(P)| \sin \sphericalangle (\vec{V}(P), \vec{e}(P)) \, dl.$$

### 1.3 Криволинеен интеграл от втори вид

**Физическо обосноваване.** Ще разгледаме задачата за работа на материална точка в силово поле. Нека  $\Gamma$  е ориентирана\* крива в  $\mathbb{R}^3$ , и нека

$$\vec{F}(P) = (A(P), B(P), C(P))$$

е векторно поле, дефинирано в околност на  $\Gamma$ . За да пресметнем извършваната работа, първо ще разгледаме най-простия случай, когато векторното поле не зависи от  $P$ , т.е.  $\vec{F}(P) = \vec{F}$ , а кривата  $\Gamma$  е отсечка, която ще означим с  $\vec{l}$ . Както знаем, работата е равна на силата, умножена по изминатия път. Под сила тук трябва да се разбира обаче проекцията на вектора на силата върху вектора на пътя, т.е. тангенциалната компонента на силата. Така получаваме формулата

$$A = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{l}\| \cdot \cos \angle (\vec{F}, \vec{l}) = \langle \vec{F}, \vec{l} \rangle.$$

Да разгледаме общия случай. Нека както и в предния параграф,  $\tau$  е разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$  (т.е.  $P_0$  съвпада с началната точка на кривата,  $P_n$  – с крайната, и  $P_0 \prec \dots \prec P_n$ ), като  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ . Нека  $Q_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  е произволна точка от дъгата  $\Gamma_i$ , състояща се от всички точки, лежащи между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . За приблизително пресмятане на работата ще заменим дъгата  $\Gamma_i$  с отсечката  $P_{i-1} \vec{P}_i$ , и ще смятаме, че навсякъде върху тази отсечка силата  $\vec{F}(P)$  е постоянна и е равна на  $\vec{F}(Q_i)$ . Така, за работата получаваме

$$\begin{aligned} A \approx R_\tau &= \sum_{i=1}^n \langle \vec{F}(Q_i), P_{i-1} \vec{P}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n (A(Q_i)(x_i - x_{i-1}) + B(Q_i)(y_i - y_{i-1}) + C(Q_i)(z_i - z_{i-1})). \end{aligned}$$

Точната стойност на работата, извършена от материалната точка при движение по кривата  $\Gamma$ , е равна на границата на  $R_\tau$  при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Това ни подсказва да въведем следната дефиниция.

---

\*Това означава, че върху  $\Gamma$  е избрана посока: виж §1.

**Дефиниция и пресмятане на криволинейния интеграл от II вид.** Нека отново  $\Gamma$  е ориентирана крива в  $\mathbb{R}^3$ , и функциите  $A(P)$ ,  $B(P)$ ,  $C(P)$  са дефинирани в околност на  $\Gamma$ . Удобно е тези три функции да бъдат обединени в един, засега чисто формален, израз

$$\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz.$$

Нека отново  $\tau$  е разбиване, определено от точките  $P_0, \dots, P_n \in \Gamma$ , където  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ , и  $Q_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  е произволна точка от дъгата  $\Gamma_i$ .

**Дефиниция.** Под риманова сума за  $\omega$ , съответстваща на разбиването  $\tau$ , разбираме израза

$$R_\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n (A(Q_i)(x_i - x_{i-1}) + B(Q_i)(y_i - y_{i-1}) + C(Q_i)(z_i - z_{i-1})).$$

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е ориентирана крива в  $\mathbb{R}^3$ , и  $A(P)$ ,  $B(P)$ ,  $C(P)$  са функция върху  $\Gamma$ . Под криволинеен интеграл от втори вид от израза  $\omega$  върху кривата  $\Gamma$  ще разбираме числото

$$\int_{\Gamma} A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f).$$

**Теорема.** Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка параметрично зададена крива с уравнения

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a, b],$$

и нека функциите  $A(P)$ ,  $B(P)$ ,  $C(P)$  са непрекъснати. Тогава криволинейният интеграл от  $\omega$  върху  $\Gamma$  съществува и се дава с формулата

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz = \\ & = \int_a^b [A(x(t), y(t), z(t))x'(t) + B(x(t), y(t), z(t))y'(t) + C(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

**Забележка.** Както се вижда, означенията са така подбрани, че да подсказват формулата: трябва само  $dx$  да се замени с  $x'(t)dt$ , и т.н.

В равнината дефиницията на интеграла и формулата за неговото пресмятане изглеждат аналогично, като подинтегралният израз има вида  $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ , а формулата за неговото пресмятане е

$$\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_a^b [A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

В частност, ако  $\Gamma$  е явно зададена уравнението  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , формулата добива вида

$$\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_a^b [A(x, f(x)) + B(x, f(x))f'(x)] dx.$$

**Доказателство на теоремата.** Достатъчно е да разгледаме случая, когато  $B(P) = C(P) = 0$ , т.е.  $\omega = A(x, y, z) dx$ . Ако равенството бъде доказано в този случай, доказателството може да се пренесе и за  $\omega = B(x, y, z) dx$  и  $\omega = A(x, y, z) dx$ . Събирайки получените резултати, ще получим равенството на теоремата.

Нека  $\tau$  е разбиване на  $\Gamma$ , като  $P_i = \vec{P}(t_i)$ ,  $Q_i = \vec{P}(\xi_i)$ . Прилагайки теоремата за крайните нараствания за функцията  $x(t)$  в интервала  $[t_{i-1}, t_i]$ , получаваме

$$x_i - x_{i-1} = x'(\tilde{\xi}_i)(t_i - t_{i-1}),$$

където  $\tilde{\xi}_i$  е подходяща точка от интервала  $[t_{i-1}, t_i]$ . За римановата сума  $R_{\tau}(\omega)$  получаваме

$$R_{\tau}(\omega) = \sum_{i=1}^n A(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) x'(\tilde{\xi}_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Ситуацията е същата както и в предния параграф: наличието на две различни междинни точки  $\xi_i, \tilde{\xi}_i$  пречи на  $R_{\tau}(\omega)$  да бъде риманова сума

за интеграла отъясно. Ние ще заменим във втория множител междинната точка  $\tilde{\xi}_i$  с  $\xi_i$ , т.е. ще разгледаме израза

$$\tilde{R}_\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n A(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) x'(\xi_i) (t_i - t_{i-1}),$$

то лесно се доказва, че

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} \left( \tilde{R}_\tau(\omega) - R_\tau(\omega) \right) = 0.$$

Сега вече изразът  $\tilde{R}_\tau(\omega)$  е риманова сума за интеграла по  $t$ , и следователно

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} \tilde{R}_\tau(\omega) = \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt. \quad \blacksquare$$

**Забележка.** Лесно се вижда, че теоремата е вярна и в по-общия случай на частично гладка крива, т.е. крива, която може да се раздели на краен брой еднократно гладки криви.

**Изразяване на криволинейният интеграл от II вид чрез криволинейен интеграл от I вид.** В много случаи е важно да се знае връзката между двата вида криволинейни интеграла. Да се върнем към началото на параграфа, където пресмятахме работа на точка в силово поле. Да означим отново с  $\vec{F}(P)$  векторното поле с компоненти  $A(P)$ ,  $B(P)$ ,  $C(P)$ . Тогава за римановата сума имаме формулата

$$R_\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n \left\langle \vec{F}(Q_i), P_{i-1} \vec{P}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \vec{F}(Q_i), \frac{P_{i-1} \vec{P}_i}{\|P_{i-1} \vec{P}_i\|} \right\rangle \cdot \|P_{i-1} \vec{P}_i\|.$$

Векторът  $\frac{P_{i-1} \vec{P}_i}{\|P_{i-1} \vec{P}_i\|}$  представлява единичен вектор, еднопосочен с вектора, съединяващ  $P_{i-1}$  с  $P_i$ . Очевидно той е близък с единичния допирателен вектор в коя да е точка на дъгата  $\Gamma_i$ , например в точката  $Q_i$ . За всяка точка  $P \in \Gamma$  означаваме с  $\vec{e}(P)$  единичният допирателен вектор в тази точка (еднопосочен с избраната посока върху  $\Gamma$ ) Така горната риманова сума може да бъде заменена с друга:

$$\bar{R}_\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n \left\langle \vec{F}(Q_i), \vec{e}(Q_i) \right\rangle \cdot \|P_{i-1} \vec{P}_i\|.$$

Лесно се вижда, че

$$\lim_{\text{diam}_{\tau \rightarrow 0}} (\bar{R}_\tau(\omega) - R_\tau(\omega)) = 0.$$

(виж лема 8 от §2.)

От друга страна, от забележката след теорема 9 от предния параграф се вижда, че  $\bar{R}_\tau(\omega)$  представлява риманова сума за криволинеен интеграл от първи вид, откъдето получаваме равенството

$$\int_{\Gamma} A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz = \int_{\Gamma} \langle \vec{F}(P), \vec{e}(P) \rangle dl.$$

Най-често това равенство се записва в друга форма. Да означим, както в §1, с  $\alpha(P)$ ,  $\beta(P)$ ,  $\gamma(P)$  ъглите, които векторът  $\vec{e}(P)$  сключва с координатните оси  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ . Тъй като векторът  $\vec{e}(P)$  е с единична дължина, неговите компоненти съвпадат с директорните косинуси

$$\vec{e}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P), \cos \gamma(P)).$$

Така достигаме до окончателната форма на равенството, свързващо криволинейните интегралите от първи и втори род:

**Теорема.** При горните означения е налице равенството

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\Gamma} (A(P) \cos \alpha(P) + B(P) \cos \beta(P) + C(P) \cos \gamma(P)) dl. \end{aligned}$$

**Забележка.** Възможно е и обратното – да изразим интеграла от първи вид чрез интеграла от втори вид. Нека  $f(P)$  е непрекъснатата функция върху  $\Gamma$ . Полагайки в равенството на теоремата

$$A(P) = f(P) \cos \alpha(P), \quad B(P) = f(P) \cos \beta(P), \quad C(P) = f(P) \cos \gamma(P),$$

и използвайки тъждеството  $\cos^2\alpha(P) + \cos^2\beta(P) + \cos^2\gamma(P) \equiv 1$ , стигаме до формулата:

$$\int_{\Gamma} f(P) dl = \int_{\Gamma} f(P) (\cos \alpha(P) dx + \cos \beta(P) dy + \cos \gamma(P) dz).$$

**Свойства на криволинейния интеграл от втори вид.** Свойствата на този интеграл значително се различават от свойствата на интеграла от първи вид. Тук не съществува свойство, аналогично на свойството позитивност (свойство 2 от предния параграф), както и на произтичащите от него свойства 3, 4, 5 и 6. Лесно е да се състави пример, в който функциите  $A$ ,  $B$  и  $C$  са положителни, но стойността на интеграла е отрицателна – това се дължи на факта, че координатните разлики, с които се умножават стойностите на функциите, могат да имат произволни знаци.

Преди формулиране на свойствата ще въведем необходимата терминология. Използваният по-горе израз от вида

$$\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

се нарича диференциална форма от първа степен в  $\mathbb{R}^3$ . В равнината съответният израз би имал вида  $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ , и т.н. Функциите  $A$ ,  $B$  и  $C$  се наричат *коэффициенти* на дадената диференциална форма.

Множеството от всички диференциални форми от първа степен, дефинирани в подмножеството  $U$  на даденото евклидово пространство ще бележим с  $\Omega^1(U)$ . Това множество има структурата на линейно пространство, т.е. върху него по очевиден начин са дефинирани операциите събиране и умножение с число. По-подробно, ако са дадени формите  $\omega_1 = A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz$ ,  $\omega_2 = A_2 dx + B_2 dy + C_2 dz$ , и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то

$$\omega_1 + \omega_2 = (A_1 + A_2) dx + (B_1 + B_2) dy + (C_1 + C_2) dz.$$

$$\lambda \cdot \omega_1 = \lambda A_1 dx + \lambda B_1 dy + \lambda C_1 dz.$$

Оттук идва първото от дадените тук свойства на криволинейния интеграл от втори вид:

**Свойство 1 (Линейност).**

$$\int_{\Gamma} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\Gamma} \omega_1 + \int_{\Gamma} \omega_2, \quad \int_{\Gamma} \lambda \cdot \omega = \lambda \int_{\Gamma} \omega.$$

Тези равенства са очевидни за римановите суми, и чрез граничен преход се пренасят и за интегралите.

Следващите означения, които трябва да се въведат, се отнасят за ориентираните криви. Ако  $\Gamma$  е такава крива, то с  $-\Gamma$  ще означаваме същата крива с противоположна ориентация (виж §1, твърдение 3). Непосредствено от дефиницията на интеграла следва

**Свойство 2.**

$$\int_{-\Gamma} \omega = - \int_{\Gamma} \omega.$$

Наистина, при промяна на посоката на кривата всички координатни разлики приемат противоположен знак, и следователно римановата сума се умножава с  $-1$ .

**Забележка.**

Нека  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  са две ориентиранни криви, като крайната точка на  $\Gamma_1$  съвпада с началната точка на  $\Gamma_2$ . С  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  ще означим ориентираната крива, получена чрез обединяването на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . По-точно, началната точка на  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  съвпада с началната точка на  $\Gamma_1$ , а крайната – с крайната точка на  $\Gamma_2$ . Ако  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  са гладки криви, то  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  е частично гладка.

**Свойство 3 (Адитивност).** Имаме

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega.$$

Да изберем разбивания на  $\Gamma_1$  и на  $\Gamma_2$ . Взети заедно, те образуват разбиване на  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ . За съответните риманови суми равенството очевидно е изпълнено, откъдето следва верността му и за интегралите.



**Свойство 4 (Смяна на променливите).** Нека  $U$  и  $V$  са области в  $\mathbb{R}^2$ , и нека  $\Phi : U \rightarrow V$  е взаимно еднозначно регулярно изображение, зададено с координатите

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Нека

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

е диференциална форма от първи ред върху  $E$ .

**Дефиниция.** Ще определим обратен образ на формата  $\omega$  чрез  $\Phi$  с формулата

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega &= A(x(u, v), y(u, v)) dx(u, v) + B(x(u, v), y(u, v)) dy(u, v) = \\ &= A(x'_u du + x'_v dv) + B(y'_u du + y'_v dv) = (Ax'_u + By'_u) du + (Ax'_v + By'_v) dv. \end{aligned}$$

Така получената  $\Phi^*\omega$  е диференциална форма от първи ред в  $U$ , и ние получихме изображение

$$\Phi^* : \Omega_1(V) \rightarrow \Omega_1(U).$$

**Теорема.** Нека  $\Gamma$  е гладка крива в  $U$ . Тогава е в сила равенството

$$\int_{\Gamma} \Phi^*\omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega.$$

**Доказателство.** Нека  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  е параметризация на  $\Gamma$ ,  $t \in [a, b]$ ; тогава кривата  $\Phi(\Gamma)$  се параметризира с формулите  $x(t) = x(u(t), v(t))$ ,  $y(t) = y(u(t), v(t))$ . Имаме

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(\Gamma)} \omega &= \int_a^b (A \cdot x'(t) + B \cdot y'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (A \cdot (x'_u \cdot u'(t) + x'_v \cdot v'(t)) + B \cdot (x'_u \cdot u'(t) + x'_v \cdot v'(t))) dt, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \Phi^* \omega &= \int_{\Gamma} \Phi^* \omega = \int_{\Gamma} (A.x'_u + B.y'_u) du + (A.x'_v + B.y'_v) dv = \\ &= \int_a^b ((A.x'_u + B.y'_u) u'(t) + (A.x'_v + B.y'_v) v'(t)) dt. \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че в двата случая получихме идентични изрази. ■

Равенството от теоремата е вярно и за изображения на  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Нека  $U$  и  $V$  са отворени множества съответно в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ . Нека  $\Phi : U \rightarrow V$  е изображение, зададено с формулите

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

което е регулярно, т.е. векторите  $\Phi'_u$  и  $\Phi'_v$  не се анулират едновременно. Отново имаме операцията обратен образ:  $\Phi^* : \Omega_1(V) \rightarrow \Omega_1(U)$ . За  $\omega = A dx + B dy + C dz$  обратният образ се задава с формулата

$$\Phi^* \omega = A dx(u, v) + B dy(u, v) + C dz(u, v).$$

Повтаряйки дословно доказателството на теоремата, получаваме, че и в този случай е налице равенството  $\int_{\Gamma} \Phi^* \omega = \int_{\Phi(\Gamma)} \omega$ .

Същото равенство е вярно и за изображения на  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. за криволинейна координатна система в  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема на Гаус – Грин.** Следната теорема играе основна роля в теорията на криволинейните интегралите от втори вид в равнината.

Нека  $D$  е ограничена област в равнината, чиито контур  $bD$  се състои от една или няколко затворени параметрично зададени криви  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ . Под индуцирана ориентация на всяка от тези криви разбираме такава посока, при движението по която областта  $D$  остава *отляво*. При така избраните посоки пишем

$$bD = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots$$

и

$$\int_{bD} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \dots$$

**Пример.** Нека  $0 < r < R$ . Нека, както по-горе, с  $\Gamma_R$  да означим окръжността с център в началото и радиус  $R$ , насочена срещу часовниковата стрелка (и, разбира се, аналогично за  $\Gamma_r$ ). Нека  $D$  е пръстенът, ограничен от окръжностите  $\Gamma_R$  и  $\Gamma_r$ , т.е. множеството от всички точки в равнината, за които разстоянието до началото е между  $r$  и  $R$ . Тогава, за да остава областта  $D$  отляво, трябва да се движим по  $\Gamma_R$  срещу, а по  $\Gamma_r$  – по часовниковата стрелка (виж чертежа три страници по-нататък). Следователно, в този случай имаме

$$bD = \Gamma_R - \Gamma_r.$$

Нека сега  $D$  е област, чиито контур се състои от краен брой гладки или частично гладки криви, а  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  са еднократно гладки функции на две променливи, дефинирани в околност на  $D$ . Ще разгледаме диференциалната форма

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy.$$

Ще докажем следната

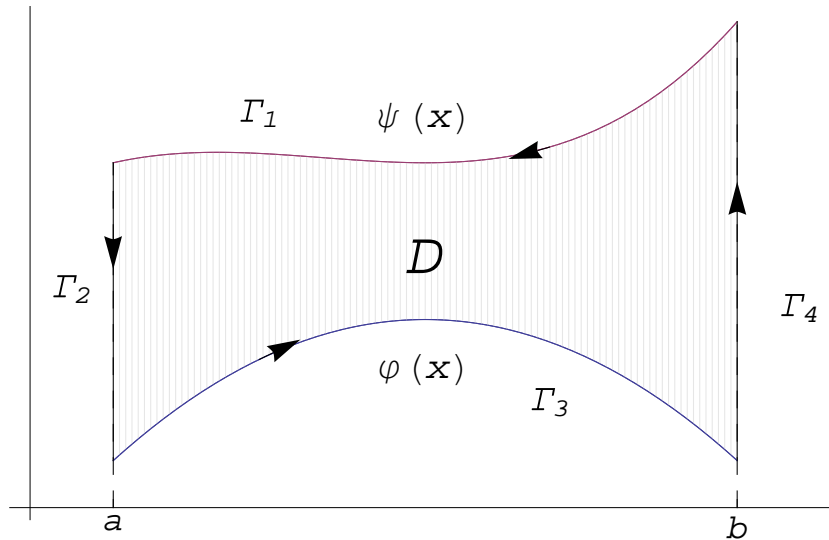
**Теорема на Гаус – Грин.** *В сила е равенството*

$$\int_{bD} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \iint_D (B'_x - A'_y) dx dy.$$

**Доказателство.** Най-напред ще отбележим, че е достатъчно да докажем теоремата в частния случай  $\omega = A(x, y) dx$  и аналогичният му  $\omega = B(x, y) dy$ , а след това да съберем получените резултати. Ще докажем теоремата на няколко етапа.

**Етап 1.** Ще предпологаме, че  $\omega = A(x, y) dx$ , а областта  $D$  е криволинеен трапец по  $x$ , т.е. се задава с неравенствата

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),$$

Криволинеен трапец по  $x$ .

$\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – непрекъснати и еднократно гладки в интервала  $[a, b]$ .

Тогава границата на  $D$  е частично гладка и може да се раздели на четири гладки криви  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$  (виж чертежа).

Да означим с  $\Gamma_\varphi$  графиката на функцията  $\varphi(x)$  с посока, определена от нарастването на параметъра  $x$ , и аналогично за  $\Gamma_\psi$ . Тогава очевидно  $\Gamma_3 = \Gamma_\varphi$  и  $\Gamma_1 = -\Gamma_\psi$  (пробягва се в посока, обратна на посоката по  $x$ ). Кривите  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$  представляват вертикални отсечки и се параметризират с координатата  $y$ . Върху  $\Gamma_2$  координатата  $x$  е постоянна и равна на  $a$ , и следователно  $dx = 0$ . Същото е вярно и върху  $\Gamma_4$ , и следователно

$$\int_{\Gamma_2} A(x, y) dx = \int_{\Gamma_4} A(x, y) dx = 0.$$

Така

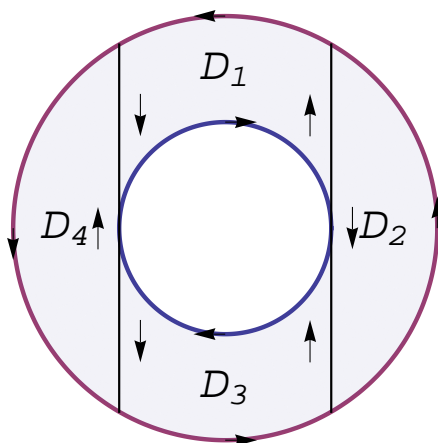
$$\int_{\partial D} A(x, y) dx = \int_{\Gamma_\varphi} A(x, y) dx - \int_{\Gamma_\psi} A(x, y) dx =$$

$$= \int_a^b A(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b A(x, \psi(x)(x)) dx.$$

От друга страна, като използваме формулата за пресмятане на двоен интеграл по криволинеен трапец, както и формулата на Лайбниц-Нютон, можем да пресметнем дясната част на равенството от теоремата:

$$\begin{aligned} \iint_D (-A'_y(x, y)) dx dy &= - \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A'_y(x, y) dy \right) dx = \\ &= - \int_a^b (A(x, \psi(x)(x)) - A(x, \varphi(x)(x))) dx, \end{aligned}$$

и в този случай формулата е доказана.



Разрязване на пръстена на криволинейни трапеци.

**Етап 2.** Отново разглеждаме формата  $\omega = A(x, y) dx$ , а за областта  $D$  ще препологаме, че може да бъде разрязана на чрез вертикални разрези на краен брой криволинейни трапеци по  $x$ . Например показаният на рисунката кръгов пръстен не е криволинеен трапец, но с два вертикални разреза може да бъде разделен на четири криволинейни трапеца.

Нека  $D = \cup_{i=1}^k D_i$  е въпросното разрязване. За всеки от криволинейните трапеци  $D_i$  можем да приложим частния случай на теоремата, доказан в етап 1, откъдето получаваме

$$\iint_D (-A'_y(x, y)) \, dx dy = \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} (-A'_y(x, y)) \, dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{bD_i} A(x, y) \, dx.$$

Да разгледаме по-подробно границите  $\Gamma_i = bD_i$  на областите  $D_i$ . Това са частично гладки криви. От всяка такава крива една част се съдържа в границата  $\Gamma = bD$  на  $D$ , като посоките им съвпадат. Останалата част се съдържа в допълнително направените разрези. Важно е да се отбележи обаче, че всеки от тези разрези се отчита два пъти, тъй като участва в границите на областите, разположени вляво и вдясно от него, като двата пъти се пробягва в противоположни направления. От свойство 2 на криволинейния интеграл от втори вид се вижда, че съответните криволинейни интеграли са равни по модул и имат противоположни знаци, и при сумирането те се унищожават. Следователно в сумата участват само частите от  $\Gamma$ , които се пробягват по веднъж в правилната посока. Така получаваме равенството

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i,$$

и следователно

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} A(x, y) \, dx = \int_{bD} A(x, y) \, dx,$$

което доказва етап 2.

**Етап 3: Доказателство на теоремата.** Ще предположим, че областта  $D$  може да бъде разрязана на краен брой криволинейни трапеци както по  $x$ , така и по  $y$  (съответно с вертикални или хоризонтални разрези). За такава област доказахме, че

$$-\iint_D A'_y(x, y) \, dx dy = \int_{bD} A(x, y) \, dx.$$

Можем обаче да разменим местата на координатите  $x$  и  $y$  и да повторим разсъжденията от етапи 1 и 2 за формата  $B(x, y) dy$ . По този начин получаваме равенството

$$\iint_D B'_x(x, y) dx dy = \int_{bD} B(x, y) dy$$

(обяснете защо в тази формула не се появява знакът минус!) Събирайки двете получени формули, получаваме равенството на теоремата. ■

**Забележка 1.** От формулировката и от доказателството на теоремата виждаме, че променливите  $x$  и  $y$  в нея не са равноправни; по-точно, при размяната на местата им двойният интеграл отдясно си сменя знака. Причината за това ще бъде обяснена по-късно.

**Забележка 2.** Основният момент в доказателството на теоремата е използването в етап 1 на формулата на Лайбниц-Нютон:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Това не е случайно: формулата на Гаус-Грин може да се разглежда като двумерен аналог на горната формула. Наистина, при Лайбниц-Нютон имаме едномерна област, т.е. интервал  $[a, b] \in \mathbb{R}$ , чиято граница се състои от двете гранични точки  $a$  и  $b$ , и формулата свързва интеграла от  $f'$  върху дадения интервал с "интеграла" от  $f$  върху неговата граница.

По-долу ние ще дадем обобщения на формулата на Лайбниц-Нютон за по-високи размерности.

## 1.4 Условия за пълен диференциал

**Пълен диференциал.** В предния параграф ние въведохме понятието *диференциална форма от първи ред* в равнината или пространството. В един често срещан случай такава форма може да се получи чрез диференциране на дадена функция.

**Дефиниция.** Нека  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$  е гладка функция в  $\mathbb{R}^n$ . Под пълен диференциал на функцията  $\Phi$  ще разбираме диференциалната форма

$$d\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

**Дефиниция.** Нека

$$\omega = \sum_{i=1}^n A_i(x) dx_i$$

е диференциална форма от първи ред в  $\mathbb{R}^n$ . Ще казваме, че  $\omega$  е пълен диференциал, ако съществува гладка функция  $\Phi(x)$  такава, че

$$\omega = d\Phi, \text{ т.е. } A_i(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) \text{ за } i = 1, \dots, n.$$

Функцията  $\Phi(x)$  ще наричаме примитивна на формата  $\omega$ .

**Забележка.** Лесно се доказва, че ако областта е линейно свързана в  $\mathbb{R}^n$ , то примитивната функция е единствена с точност до добавяне на константа (виж зад. 2).

В частност, в равнината  $\mathbb{R}^2$  формата

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

е пълен диференциал, ако съществува гладка функция  $\Phi(x, y)$  такава, че

$$A(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y), \quad B(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y).$$

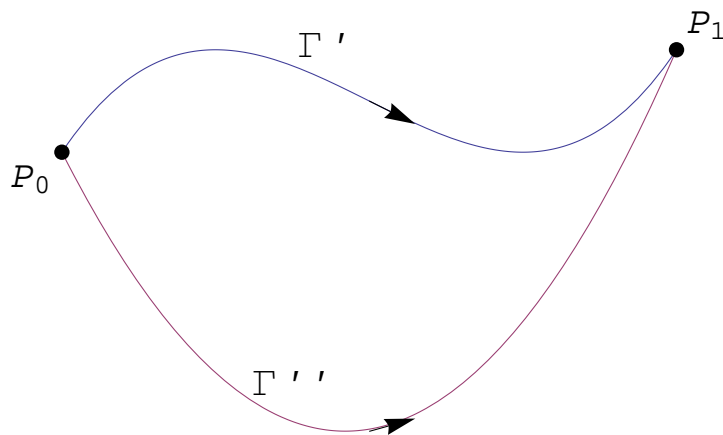


**Характеризация на пълните диференциали в равнината.**

Нека  $U$  е отворена област в  $\mathbb{R}^2$ . В този раздел ще дадем още две условия, еквивалентни на това дадената форма да е пълен диференциал. Нека  $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$  е диференциална форма от първи ред, дефинирана в областта  $U \in \mathbb{R}^2$ , като функциите  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  са еднократно гладки.

**Условие 1/ (независимост на интеграла от пътя.** Нека  $P_0$  и  $P_1$  са две произволни точки от  $U$  и нека  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  са криви в  $U$  с начало в  $P_0$  и край в  $P_1$  (виж чертежа). Тогава

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_{\Gamma''} \omega.$$



Независимост на интеграла от пътя.

Това условие може да се формулира и по малко по-различен начин:

**Условие 1'/.** *Интегралът от  $\omega$  по всяка затворена крива е равен на нула.*

Еквивалентността на тези две условия се вижда лесно. Наистина, нека е изпълнено условието 1/ и  $\Gamma$  е затворена крива с начало и край в

$P_0$ . Ако означим с  $\Gamma_0$  изродената крива, състояща се само от точката  $P_0$  (т.е. кривата, зададена с уравнението  $P(t) \equiv P_0$ ), то очевидно  $\int_{\Gamma_0} \omega = 0$ , и според 1/ същото е вярно и за  $\int_{\Gamma} \omega$ .

Обратно, нека е изпълнено 1'/, и кривите  $\Gamma'$ ,  $\Gamma''$  започват в  $P_0$  и завършват в  $P_1$ . Да означим

$$\Gamma = \Gamma' - \Gamma'',$$

т.е. кривата  $\Gamma'$  се пробягва в права посока, а кривата  $\Gamma''$  – в обратна. Тогава  $\Gamma$  е затворена крива, следователно интегралът по нея е нула, и от формулата

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma'} \omega - \int_{\Gamma''} \omega$$

веднага следва 1/.

**Условие 2. (пълен диференциал)** *Формата  $\omega$  е пълен диференциал, т.е.  $\omega = d\Phi$ . В подробен запис това означава, че*

$$A = \Phi'_x \quad \text{и} \quad B = \Phi'_y.$$

В такъв случай ще казваме още, че  $\omega$  е точна форма, а функцията  $\Phi$ , както казахме по-горе, се нарича примитивна функция на формата  $\omega$ .

**Условие 3. (затвореност).** *Ще казваме, че  $\omega$  е затворена форма, ако навсякъде в областта  $U$  е изпълнено равенството*

$$B'_x = A'_y.$$

Ще изследваме връзките между тези три условия. Ще докажем, че 1/ и 2/ са еквивалентни, от 2/ следва 3/ (което очевидно следва от равенството на смесените производни), а от 3/ следва 1/ при някои условия върху дефиниционната област  $U$ .

**Теорема 1.** *Условията 1/ и 2/ са еквивалентни.*

С други думи, една форма е пълен диференциал точно тогава, когато интегралът от нея не зависи от пътя, а само от началната и крайната му точка.

**Доказателство.** Ще започнем с по-лесната импликация  $1 \Rightarrow 2$ . Нека  $\omega = d\Phi$ . Нека  $\Gamma$  е еднократно гладка крива, зададена с уравнението

$$x = x(t), y = y(t), t \in [a, b],$$

с начална точка  $P_0 = (x(a), y(a))$  и крайна точка  $P_1 = (x(b), y(b))$ . Тогава

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A dx + B dy &= \int_a^b [A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)] dt = \\ &= \int_a^b [\Phi'_x(x(t), y(t))x'(t) + \Phi'_y(x(t), y(t))y'(t)] dt. \end{aligned}$$

Да въведем функцията  $F(t) = \Phi(x(t), y(t))$ . Тогава по теоремата за диференциране на съставна функция имаме

$$F'(t) = \Phi'_x(x(t), y(t))x'(t) + \Phi'_y(x(t), y(t))y'(t),$$

което е точно подинтегралния израз в последния интеграл. Следователно

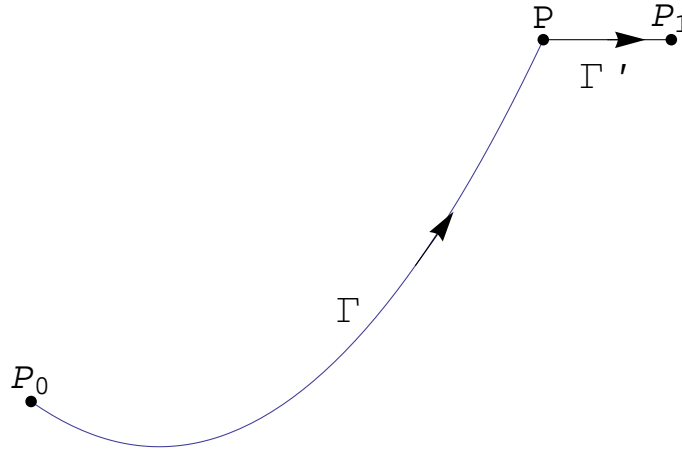
$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = \Phi(P_1) - \Phi(P_0),$$

и следователно интегралът не зависи от пътя, съединяващ точките  $P_0$  и  $P_1$ .

Малко по-сложно се доказва обратната импликация  $2 \Rightarrow 1$ . Дадено е, че  $\int_{\Gamma} \omega$  не зависи от пътя  $\Gamma$ , а само от началната и крайната му точка. Трябва да конструираме еднократно гладка функция  $\Phi(P)$  такава, че  $\omega = d\Phi$ . Да фиксираме точка  $P_0 \in U$  и да положим

$$\Phi(P) = \int_{\Gamma} \omega,$$

където  $\Gamma$  е произволна крива с начало в  $P_0$  и край в  $P$ . По предположение стойността на интеграла не зависи от избора на  $\Gamma$ .



Доказателство на факта, че  $\Phi'_x = A$ .

Ще докажем, че така дефинираната функция  $\Phi$  е примитивна за  $\omega$ , т.е. че са изпълнени равенствата  $\Phi'_x = A$  и  $\Phi'_y = B$ . Ще започнем с първото. Нека  $P = (x, y)$  е произволна точка от  $U$ , а  $\Gamma$  е произволна крива, съединяваща  $P_0$  с  $P$ . Нека  $h$  е достатъчно малко число. Да означим с  $P_1$  точката с координати  $(x + h, y)$ , и с  $\Gamma'$  – хоризонталната отсечка, свързваща  $P$  с  $P_1$ . Нека  $\Gamma_1 = \Gamma + \Gamma'$ . Тогава  $\Gamma_1$  свързва  $P_0$  с  $P_1$ , и от дефиницията на  $\Phi$  имаме

$$\Phi(P_1) = \int_{\Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma} \omega + \int_{\Gamma'} \omega = \Phi(P) + \int_{\Gamma'} \omega.$$

Последният интеграл вдясно се смята лесно. Кривата  $\Gamma'$  се параметризира с формулите

$$x(t) = x + t.h, \quad y(t) = y, \quad t \in [0, 1],$$

откъдето с използване на теоремата за средните стойности получаваме

$$\int_{\Gamma'} \omega = \int_0^1 A(x + ht, y) h dt = h \cdot A(x + \theta_h h, y),$$

за подходящо избрано  $\theta_h \in (0, 1)$ , и следователно

$$\frac{\Phi(P_1) - \Phi(P)}{h} = A(x + \theta_h h, y).$$

За интересуващата ни производна получаваме

$$\Phi'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + h, y) - \Phi(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} A(x + \theta_h h, y) = A(x, y).$$

Първото от двете равенства е доказано. Второто равенство:  $\Phi'_y = B$ , се доказва по същия начин, като изберем точката  $P_1 = (x, y + k)$ , и отсечката  $\Gamma'$  е вертикална. ■

Ще изследваме връзката на еквивалентните условия 1/ и 2/ с условието 3/ :  $B'_x = A'_y$ . Оказва се, че тук е от значение геометрията на областта  $U$  (дефиниционната област на формата  $\omega$ ).

**Дефиниция.** Нека  $U$  е област в  $\mathbb{R}^2$ . Ще казваме, че областта  $U$  е едносвързана, ако заедно с всяка проста затворена крива  $\Gamma \subset U$  областта  $U$  съдържа и нейната вътрешност  $\text{int } U$ .

Ще поясним това с примери. Лесно се вижда, че цялата равнина, кръгът, правоъгълникът и др. са едносвързани области\*. Ако обаче от равнината махнем една точка  $P_0$ , то получената област  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$  не е едносвързана. Наистина, ако вземем окръжност с център  $P_0$ , то тя се съдържа в  $U$ , но ограденият от нея кръг не се съдържа там.

**Теорема 2.** От условието 2/ винаги следва условието 3/. От условието 3/ следва 1/ (а следователно и 2/), ако областта  $U$  е едносвързана.

**Доказателство.** Ако формата  $\omega$  удовлетворява 2/, т.е.  $A = \Phi'_x$ ,  $B = \Phi'_y$ , то от равенството на смесените производни веднага следва, че  $A'_y = B'_x$ .

\*И тук пропускаме формалните доказателства, които не са лесни.

Нека е изпълнено  $3/$ , и дефиниционната област  $U$  е едносвързана. Ще докажем условието  $1'/$ , т.е. че интегралът от  $\omega$  по всяка проста затворена крива  $\Gamma \subset U$  е равен на нула. Това следва веднага от формулата на Гаус-Грин: наистина, ако означим  $D = \text{int}\Gamma$ , то от условието за едносвързаност на  $U$  следва, че  $D$  също се съдържа в  $U$ . Следователно, за  $D$  и  $\Gamma$  можем да приложим теоремата на Гаус-Грин, която ни дава

$$\int_{\partial D} \omega dy = \iint_D (B'_x - A'_y) dx dy = 0. \blacksquare$$

Ще покажем, че за области, които не са едносвързани, импликацията  $3/ \Rightarrow 1'/$  не винаги се изпълнява. Ще разгледаме случая  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ . Да дефинираме в  $U$  диференциалната форма  $\omega_0$  с формулата

$$\omega_0 = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Лесно се проверява равенството\*

$$\left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x,$$

т.е. формата  $\omega_0$  е затворена. От друга страна, нека  $\Gamma_R$  е окръжността с център в началото и радиус  $R$ . Директното пресмятане показва, че

$$\int_{\Gamma_R} \omega_0 = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Подобни примери могат да бъдат дадени и за произволна неедносвързана дефиниционна област.

Ще изследваме по-подробно диференциалните форми върху областта  $U$ . За произволна област  $U \subset \mathbb{R}^2$  да означим с  $Z^1(U)$  пространството от всички затворени форми върху  $U$ , т.е. формите, удовлетворяващи условието  $3/$ :  $A'_y = B'_x$ , и с  $B^1(U)$

---

\*Това пресмятане може да бъде спестено, ако забележим, че локално  $\omega_0 = d\theta(x, y)$ , където  $\theta(x, y)$  е полярният ъгъл на точката  $(x, y)$  – виж началото на следващия параграф.

- пространството на всички точни форми, т.е. пълните диференциали. Очевидно  $Z^1(U)$  и  $B^1(U)$  са линейни пространства, и  $B^1(U) \subset Z^1(U)$ . Фактор-пространството  $H^1(U) = Z^1(U)/B^1(U)$  се нарича *първа група на кохомологиите* на областта  $U$ .

**Теорема 3.** Ако  $U$  е равнината с избодена точка:  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , то  $H^1(U)$  е едномерно линейно пространство, т.е.  $H^1(U) = \mathbb{R}$ .

**Доказателство.** Нека  $\omega$  е затворена диференциална форма в  $U$ . Ще означим с  $res_0 \omega$  (чете се *резидуум на  $\omega$  в т. 0*) числото

$$res_0 \omega = \int_{\Gamma} \omega,$$

където  $\Gamma$  е проста затворена крива, съдържаща т. 0 във вътрешността си. Ще докажем, че дефиницията е коректна.

**Лема 1.** Числото  $res_0 \omega$  не зависи от избора на кривата  $\Gamma$ .

Наистина, нека  $\Gamma$  е крива, удовлетворяваща горните условия. Нека  $D_\varepsilon$  е кръг с център в началото и радиус  $\varepsilon$ , и нека  $\Gamma_\varepsilon$  е окръжността, която го ограничава. При  $\varepsilon$  достатъчно малко имаме  $D_\varepsilon \subset int \Gamma$ . Да означим  $D = int \Gamma \setminus D_\varepsilon$ . Тогава

$$bD = \Gamma - \Gamma_\varepsilon.$$

Прилагайки теоремата на Гаус-Грин за формата  $\omega$  и областта  $D$ , получаваме, че криволинейният интеграл от  $\omega$  върху  $bD$  е равен на нула, и следователно

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega.$$

По същия начин се доказва, че  $\int_{\Gamma_\varepsilon} \omega$  не зависи от  $\varepsilon$ , което доказва лемата.

Ще докажем, че числото  $res_0 \omega$  определя класа на  $\omega$  във фактор-пространството  $H^1(U)$ . По-точно, имаме

**Лема 2.** Затворената форма  $\omega$  в  $U$  е точна тогава и само тогава, когато  $res_0 \omega = 0$ .

Наистина, по-горе доказахме, че формата  $\omega$  е точна (т.е. удовлетворява условието 2/) точно тогава, когато удовлетворява условието 1') – интегралът по всяка проста затворена крива да е равен на нула. Следователно всяка точна форма има резидуум нула.

Обратно, нека  $\omega$  е затворена и  $res_0 \omega = 0$ . Тогава, ако  $\Gamma$  е проста затворена крива в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , то  $\int_{\Gamma} \omega = 0$ . Ако вътрешността на  $\Gamma$  съдържа нулата, това е точно въпросния резидуум; в противен случай това следва от затвореността на  $\omega$ .

Сега можем да докажем теоремата. Ще използваме затворената форма  $\omega_0$ , дефинирана по-горе. Както видяхме, нейният резидуум в нулата е равен на  $2\pi$ . Ако  $\omega$  е произволна затворена форма в  $U$ , то формата

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{\text{res}_0 \omega}{2\pi} \omega_0$$

е също затворена и има резидуум в нулата, равен на нула, т.е. е точна. С други думи, всяка форма  $\omega \in Z^1(U)$  се представя във вида

$$\omega = \tilde{\omega} + \frac{\text{res}_0 \omega}{2\pi} \omega_0, \quad \tilde{\omega} \in H^1(U).$$

Следователно, фактор-пространството  $H^1(U) = Z^1(U)/B^1(U)$  е едномерно линейно пространство с образуваща, съответстваща на  $\omega_0$ . ■

По същия начин, ако  $P_0 = (x_0, y_0)$  е точка от равнината, и  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ , то линейното пространство  $H^1(U)$  е едномерно, с образуваща, представена от затворената форма

$$\omega_{P_0} = \frac{-(y - y_0) dx + (x - x_0) dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

По-общо, ако  $P_1, \dots, P_n$  са точки от  $\mathbb{R}^2$ , и  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ , по същият начин може да се докаже, че  $H^1(U) = \mathbb{R}^n$ , като образуващите съответстват на диференциалните форми  $\omega_{P_1}, \dots, \omega_{P_n}$ .

Това твърдение е вярно и в по-обща ситуация. Нека  $K$  е компактно подмножество на равнината, което е обединение на краен брой линейно свързани компоненти  $K_1, \dots, K_n$ , и нека  $U = \mathbb{R}^2 \setminus K$ . Ако изберем по една точка  $P_i \in K_i$  във всяко от тях, се доказва, че  $H^1(U) = \mathbb{R}^n$ , като за образуващи в това пространство отново могат да се вземат формите  $\omega_{P_1}, \dots, \omega_{P_n}$ .

### Упражнения.

**1.** Нека  $U$  е линейно свързана област в  $\mathbb{R}^n$  и  $F(x_1, \dots, x_n)$  е  $n$ -кратно гладка функция в  $U$ , на която всички първи производни са тъждествено равни на нула. Докажете че функцията  $F$  е константа.

**Упътване.** Докажете, че ограничението на  $F$  върху всяка  $n$ -кратно гладка параметрично зададена крива е константа.

**2.** Докажете като следствие от зад. 1, че ако  $U$  е линейно свързана област и формата  $\omega$  в  $U$  притежава примитивна, то тази примитивна е единствена с точност до добавяне на константа.



**3.** Нека  $\mathbf{U}$  е отворен правоъгълник в  $\mathbb{R}^2$  и  $\omega = A dx + B dy$  е затворена форма в  $\mathbf{U}$ . Докажете, че примитивната функция  $\Phi(x, y)$  на  $\omega$  може да бъде зададена с формулата

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x A(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y B(x, t) dt.$$

Покажете, че тази формула съответства на конструкцията, използвана при доказателството на импликацията  $2 \Rightarrow 1$ , при подходящ избор на кривата  $\Gamma$ . Напишете съответната формула в тримерния случай.

## 1.5 Индекс на крива относно точка

По-горе беше разгледана диференциалната форма

$$\omega_0 = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

дефинирана в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Лесно се вижда, че тази форма е затворена, т.е. имаме  $d\omega_0 = 0$ . Това се получава с директно пресметване, но следва и от факта, че локално е изпълнено

$$\omega_0 = d\theta(x, y),$$

където  $\theta(x, y)$  е някаква функция, дефинираща локално полярният ъгъл в равнината. Можем да положим например

$$\theta(x, y) = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right) \text{ при } x \neq 0, \text{ или } \theta(x, y) = \operatorname{arccotg} \left( \frac{x}{y} \right) \text{ при } y \neq 0.$$

(Докажете, че във всеки от четирите отворени квадранти тези две функции се различават с някаква константа).

Не е възможно обаче функцията  $\theta(x, y)$  да бъде дефинирана като непрекъснатата в цялата прободена равнина  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Следователно локалното равенство  $\omega_0 = d\theta(x, y)$  не доказва, че формата е точна, т.е. че се представя като пълен диференциал от някаква функция. Тя и не е такава: ако  $\Gamma_R$  е окръжността с център в нулата и радиус  $R$ , то лесно се пресмята, че

$$\int_{\Gamma_R} \omega_0 = 2\pi,$$

докато за пълен диференциал отговорът би трябвало да е нула.

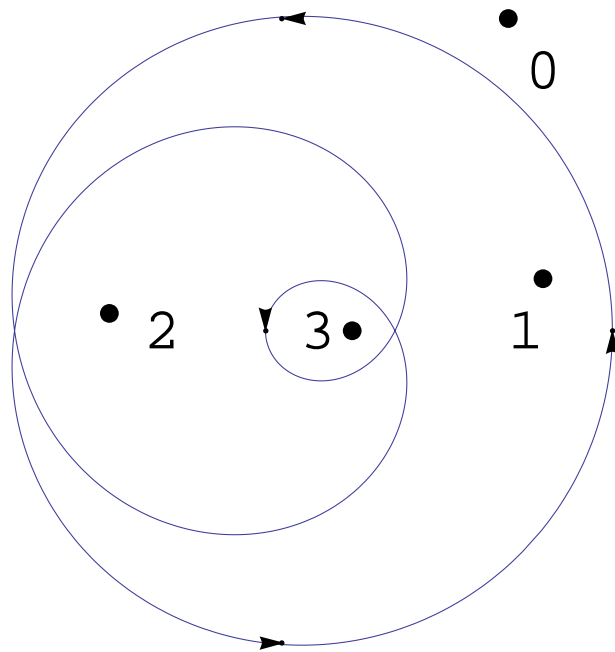
**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е ориентирана частично гладка затворена крива в равнината, която не минава през началото. Под индекс  $\operatorname{Ind}_0 \Gamma$  на кривата  $\Gamma$  относно началото разбираме числото

$$\operatorname{Ind}_0 \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_0.$$

Аналогично, ако  $P_0 = (x_0, y_0)$  е точка от равнината,  $P_0 = (x_0, y_0)$ , и кривата  $\Gamma$  не минава през  $P_0$ , то дефинираме

$$\text{Ind}_{P_0} \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_{P_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{-(y - y_0) dx + (x - x_0) dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Ще обясним смисъла на дефиницията. Както пресметнахме по-горе, ако  $\Gamma$  е окръжност с център в началото, пробягвана в положителна посока (срещу часовниковата стрелка), то  $\text{Ind}_0 \Gamma = 1$ . Ако посоката е отрицателна, индексът става равен на  $-1$ . Ако кривата обикаля окръжността два пъти, индексът е равен на 2 и т.н. В крайна сметка индексът показва колко пъти кривата обикаля около дадената точка.



Индекси на кривата относно различните точки.

На приложения чертеж имаме затворена крива, разделяща равнината на четири части (включително и безкрайната част). Да изберем по една точка във всяка част (както ще видим по-долу, точният избор на

такава точка не е от значение). Числата на чертежа означават индекса на кривата относно съответната точка.

**Пример.** Нека  $\Gamma$  е проста затворена и регулярна крива, ограничаваща областта  $D \subset \mathbb{R}^2$  и снабдена с индуцираната ориентация. Тогава при  $P_0 \in D$  имаме

$$\text{Ind}_{P_0} \Gamma = \begin{cases} 1 & \text{при } P_0 \in D, \\ 0 & \text{при } P_0 \notin \overline{D}. \end{cases}$$

**Доказателство.** Ако  $P_0$  е външна за  $D$ , то формата  $\omega_{P_0}$  е затворена в  $D$  и по теоремата на Гаус-Грин  $\int_{\Gamma} \omega_{P_0} = 0$ .

Нека  $P_0$  е вътрешна за  $D$  и  $D_\varepsilon$  е кръг с център в  $P_0$  и радиус  $\varepsilon$ , съдържащ се в  $D$ . Нека  $\Gamma_\varepsilon$  е ограничаващата го окръжност, ориентирана в положителна посока. Да означим  $\tilde{D} = D \setminus D_\varepsilon$ . Имаме

$$b\tilde{D} = \Gamma - \Gamma_\varepsilon.$$

Използвайки теоремата на Гаус-Грин за  $\tilde{D}$ , получаваме, че

$$\int_{\Gamma} \omega_{P_0} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \omega_{P_0} = 2\pi. \blacksquare$$

В горния пример получихме, че индексът е цяло число; за да бъде дадената дефиниция коректна, ние трябва да докажем това и в общия случай.

**Теорема 1.** *Индексът на крива относно точка е цяло число.*

**Доказателство.** За опростяване ще разгледаме случая  $P_0 = (0, 0)$ . Нека  $\Gamma$  е затворена еднократно гладка крива, не минаваща през началото, с уравнения

$$P = P(t) : x = x(t), y = y(t), t \in [a, b].$$

Както отбелязахме по-горе, не е възможно да се въведат полярните координати (и по-специално полярният ъгъл) в цялата прободена равнина. Това може обаче да се направи, в известен смисъл, върху кривата.

Да означим с  $\Gamma[a, t]$  тази част от  $\Gamma$ , която се получава при изменение на параметъра в интервала  $[a, t]$ . Нека  $P(a) = (x(a), y(a))$  е началната точка на кривата. В полярни координати можем да напишем

$$P(a) = (\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0).$$

**Лема.** Нека  $\rho(t)$ ,  $\theta(t)$  са функциите, определени с равенствата

$$\rho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2},$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{\Gamma[a,t]} \omega_0 = \theta_0 + \int_a^t \frac{-y(\tau)x'(\tau) + x(\tau)y'(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau.$$

Тогава за всяко  $t \in [a, b]$  са изпълнени равенствата

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t).$$

**Доказателство на лемата.** Да означим временно

$$\tilde{P}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)).$$

Ще докажем, че точките  $P(t)$  и  $\tilde{P}(t)$  съвпадат за всяко  $t$ .

Наистина, можем да разделим кривата  $\Gamma$  на краен брой дъги  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , така че върху всяка от дъгите  $\Gamma_i$  поне една от двете координати ( $x$  или  $y$ ) не се анулира. Нека това разбиване е определено от разделящите точки  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . Да означим  $P_i = P(t_i) = (x_i, y_i)$ , и нека  $\Gamma_i$  е дъгата, съставена от всички точки, лежащи между  $P_{i-1}$  и  $P_i$ . Ще допуснем, че равенството  $P(t) = \tilde{P}(t)$  е изпълнено за всички точки, лежащи на дъгите  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{i-1}$ , и ще го докажем върху дъгата  $\Gamma_i$ .

Можем да считаме, че върху  $\Gamma_i$  например  $x(t) \neq 0$ . Лесно се пресмята, че тогава

$$\frac{d}{d\tau} \left( \operatorname{arctg} \frac{y(\tau)}{x(\tau)} \right) = \frac{-y(\tau)x'(\tau) + x(\tau)y'(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2}.$$

Следователно за всяко  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  имаме

$$\theta(t) - \theta(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^t \frac{-y(\tau)x'(\tau) + x(\tau)y'(\tau)}{x(\tau)^2 + y(\tau)^2} d\tau = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} - \operatorname{arctg} \frac{y_{i-1}}{x_{i-1}},$$

откъдето

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} + \left( \theta(t_{i-1}) - \operatorname{arctg} \frac{y_{i-1}}{x_{i-1}} \right).$$

Според индуктивното предположение ъглите  $\theta(t_{i-1})$  и  $\operatorname{arctg} \frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}$  имат един и същ тангенс (равен на  $\frac{y_{i-1}}{x_{i-1}}$ ) и следователно тяхната разлика е целочислено кратно на  $\pi$ . Оттук следва, че в интервала  $[t_{i-1}, t_i]$  е изпълнено равенството

$$\operatorname{tg} \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

С други думи, в този интервал са изпълнени равенствата

$$\left| \tilde{P}(t) \right| = |P(t)| \text{ и } \frac{\tilde{y}(t)}{\tilde{x}(t)} = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

и следователно навсякъде в него имаме

$$\tilde{P}(t) = \pm P(t).$$

(докажете!)

Поради непрекъснатостта на участващите функции знакът в горната формула трябва да е един и същ в целия интервал  $[t_{i-1}, t_i]$ . Тъй като по индуктивното предположение в точката  $t_{i-1}$  знакът е  $+$ , то навсякъде в интервала имаме  $P(t) = \tilde{P}(t)$ .

Аналогично, ако върху  $\Gamma_i$  имаме  $y(t) \neq 0$ , горните разсъждения вървят с размяна на местата на координатите  $x(t)$  и  $y(t)$ , като вместо функцията  $\operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$  вземем  $\operatorname{arccotg} \frac{x(t)}{y(t)}$ .

Продължавайки по този начин, получаваме, че  $P(t) = \tilde{P}(t)$  навсякъде върху  $\Gamma$ . ■

Да довършим доказателството на теоремата. Тъй като кривата е затворена, то  $P(b) = P(a)$ . Така ъглите  $\theta(b)$  и  $\theta(a)$  имат един и същ

синус и косинус и следователно се различават с целочислено кратно на  $2\pi$ . Оттук следва, че числото

$$k = \frac{1}{2\pi} (\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_0 = \text{Ind}_0 \Gamma$$

е цяло, и доказателството на теоремата е завършено. ■

За приложенията, които следват, са важни т.н. непрекъснати фамилии от криви. Нека в уравненията на кривата въведем допълнителен параметър  $s \in [\alpha, \beta]$ . Това означава, че за всяко такова  $s$  е дефинирана кривата  $\Gamma_s$  с уравнения

$$\Gamma_s : x = x(s, t), y = y(s, t), s \in [\alpha, \beta], t \in [a, b].$$

Ще казваме, че  $\{\Gamma_s\}$  е непрекъснатата фамилия от еднократно гладки криви, ако функциите  $x = x(s, t)$ ,  $y = y(s, t)$  са непрекъснати по  $s$  и еднократно гладки по  $t$ . Кривите  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_\beta$  ще се наричат съответно *начална и крайна крива* на фамилията.

**Следствие 1 от теоремата.** *Нека  $P_0 = (x_0, y_0)$  е точка от равнината. Нека  $\{\Gamma_s\}$ ,  $s \in [\alpha, \beta]$ , е непрекъснатата фамилия от еднократно гладки затворени криви, като никоя от тях не минава през  $P_0$ .*\* Тогава

$$\text{Ind}_{P_0} \Gamma_\alpha = \text{Ind}_{P_0} \Gamma_\beta.$$

**Доказателство.** От формулата

$$\text{Ind}_{P_0} \Gamma_s = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{-(y(s, t) - y_0) x'_t(s, t) + (x(s, t) - x_0) y'_t(s, t)}{(x(s, t) - x_0)^2 + (y(s, t) - y_0)^2} dt$$

се вижда, че числото  $\text{Ind}_{P_0} \Gamma_s$  е непрекъснатата функция на параметъра  $s \in [\alpha, \beta]$ . От горната теорема знаем, че стойностите на тази функция са цели числа, и следователно тя е константа. ■

---

\* В такъв случай се казва, че кривите  $\Gamma_\alpha$  и  $\Gamma_\beta$  са хомотопни в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ .

**Забележка.** Вместо да движим кривата, ние можем да движим точката, относно която се взема индекса. Така получаваме, че ако точката  $P$  е в достатъчно малка околност на  $P_0$ , то

$$\text{Ind}_P \Gamma = \text{Ind}_{P_0} \Gamma.$$

Оттук се вижда и фактът, отбелязан на чертежа по-горе: ако кривата  $\Gamma$  разрязва равнината на свързани компоненти, то  $\text{Ind}_P \Gamma$  не зависи от точката  $P$ , а само от компонентата, в която тя се намира.

Горното следствие ни позволява да дефинираме понятието индекс на крива относно точка за произволна *непрекъсната* крива, не минаваща през точката (а не само за частично гладките криви, както беше досега).

**Дефиниция.** Нека  $\Gamma$  е ориентирана непрекъсната затворена крива в равнината, която не минава през точката  $P_0$ . Под  $\text{Ind}_{P_0} \Gamma$  ще разбираме цялото число  $\text{Ind}_{P_0} \tilde{\Gamma}$ , където  $\tilde{\Gamma}$  е произволна частично гладка затворена крива, достатъчно близка до кривата  $\Gamma$ .

Разбира се, трябва да се докаже коректността на горната дефиниция. Знаем, че всяка непрекъсната функция може равномерно да се апроксимира с еднократно гладки функции, и следователно всяка непрекъсната крива може да се апроксимира с еднократно гладки криви. Следващото твърдение показва, че индексът не зависи от избора на апроксимираща крива.

Нека  $\Gamma$  е непрекъсната затворена крива в равнината, не минаваща през точката  $P_0$ , с уравнение  $P = P(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , и нека  $\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$  са затворени еднократно гладки криви, с уравнения съответно  $P = \tilde{P}_0(t)$  и  $P = \tilde{P}_1(t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

**Следствие 2.** Да означим

$$d = \min_{P \in \Gamma} \rho(P, P_0), \quad \varepsilon = \frac{1}{4} d.$$

Ако за всяко  $t \in [a, b]$  да са изпълнени неравенствата  $|P(t) - \tilde{P}_0(t)| < \varepsilon$  и  $|P(t) - \tilde{P}_1(t)| < \varepsilon$ , то

$$\text{Ind}_{P_0} \tilde{\Gamma}_0 = \text{Ind}_{P_0} \tilde{\Gamma}_1.$$



**Доказателство.** Ще разгледаме непрекъснатата фамилия  $\tilde{\Gamma}_s$ , състояща се от затворени еднократно гладки криви с уравнения  $* P = \tilde{P}_s(t)$ , където

$$\tilde{P}_s(t) = s \tilde{P}_1(t) + (1-s) \tilde{P}_0(t) = \tilde{P}_0(t) + s \left( \tilde{P}_1(t) - \tilde{P}_0(t) \right).$$

Очевидно при  $s = 0$  и  $s = 1$  получаваме съответно кривите  $\tilde{\Gamma}_0$  и  $\tilde{\Gamma}_1$ . За да можем да приложим Следствие 1, трябва да докажем, че никоя от кривите  $\tilde{\Gamma}_s$  не минава през точката  $P_0$ .

Наистина, от неравенството на триъгълника получаваме

$$\left| \tilde{P}_s(t) - P_0 \right| \geq \left| \tilde{P}_0(t) - P_0 \right| - s \left| \tilde{P}_1(t) - \tilde{P}_0(t) \right|.$$

Очевидно имаме

$$\left| \tilde{P}_1(t) - \tilde{P}_0(t) \right| < 2\varepsilon$$

и

$$\left| \tilde{P}_0(t) - P_0 \right| \geq |P(t) - P_0| - \left| \tilde{P}_0(t) - P(t) \right| \geq d - \varepsilon = 3\varepsilon,$$

откъдето

$$\left| \tilde{P}_s(t) - P_0 \right| > 3\varepsilon - 2s\varepsilon \geq \varepsilon > 0.$$

Следователно следствие 1 може да бъде приложено, което доказва следствие 2, както и коректността на горната дефиниция. ■

**Забележка.** Сега вече лесно се вижда, че твърдението на следствие 1 е валидно не само за фамилии от еднократно гладки криви, но и за фамилии от непрекъснати криви.

**Комплексна форма на формулата за индекса.** Формата  $\omega_0$  може да бъде написана и в комплексен вид. Да въведем в равнината комплексната променлива  $z = x + iy$  и аналогично  $dz = dx + i dy$ . Нека  $\omega$  е комплекснозначната форма, дефинирана с равенството

$$\omega = \frac{dz}{z}.$$

---

\*Така построената фамилия от криви се нарича *линейна хомотопия* между кривите  $\tilde{\Gamma}_s$  и  $\tilde{\Gamma}_1$ .

Лесно се вижда, че

$$\omega = \frac{\bar{z} dz}{|z|^2} = \frac{(x - iy)(dx + i dy)}{|z|^2} = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \omega_1 + i \omega_0,$$

където  $\omega_0$  е както по-горе, а

$$\omega_1 = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = d \left( \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) \right)$$

е точна форма в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ . Тъй като интегралът от точна форма по затворен контур е нула, имаме

$$\text{Ind}_0 \Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z}.$$

Аналогично, ако  $P_0 = (x_0, y_0)$  е точка от равнината и означим  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то

$$\text{Ind}_{P_0} \Gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

В по-нататъшния текст ние ще използваме както реалното, така и комплексното написване на формулата за индекс на крива относно точка.

**Приложения.** С помощта на развития в този параграф апарат могат да бъдат доказани две дълбоки теореми с огромно значение за съвременната математика.

**1. Основна теорема на алгебрата.** Под това име е известна следната теорема, доказана от Гаус.

*Всеки полином притежава поне един комплексен корен.*

**Доказателство.** Нека е даден полиномът от  $n$ -та степен

$$\mathcal{P}(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n,$$

(без ограничение на общността можем да смятаме, че коефициентът пред старшия член  $z^n$  е равен на 1). Ще предположим, че  $\mathcal{P}(z) \neq 0$  за

всяко  $z$ . Да означим, както обикновено, с  $\Gamma_R$  окръжността с център в началото и радиус  $R$ , и нека  $G_R = \mathcal{P}(\Gamma_R)$  е нейния образ чрез полинома  $\mathcal{P}$ . В комплексни координати затворената крива  $G_R$  се параметризира с формулата

$$z(t) = \mathcal{P}(R \cos t + iR \sin t) = \mathcal{P}(R e^{it}), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Според нашето предположение никоя от кривите  $G_R$  не минава през нулата. Ще покажем, че оттук следва, че  $\text{Ind}_0 G_R = 0$  за всяко  $R > 0$ .

Наистина, ако разгледаме непрекъснатата фамилия от криви  $G_s = \mathcal{P}(\Gamma_s)$ ,  $0 \leq s \leq R$ , то от следствието по-горе следва, че  $\text{Ind}_0 G_R = \text{Ind}_0 G_0$ . Но кривата  $G_0$  се състои само от точката  $\mathcal{P}(0)$ , съответните координатни функции са константи, и следователно въпросният индекс е равен на нула.

Доказахме, че ако полиномът  $\mathcal{P}$  не се анулира, то  $\text{Ind}_0 G_R = 0$ . Ще покажем обаче, че при достатъчно големи стойности на  $R$  това не е възможно. Полагаме

$$\mathcal{P}_0(z) = z^n, \quad \mathcal{Q}(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Да означим с  $G_R^0$  кривата  $G_R^0 = \mathcal{P}_0(\Gamma_R)$ . Параметричното и представяне е  $z(t) = e^{int}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , и за нейния индекс получаваме

$$\text{Ind}_0 G_R^0 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(e^{int})}{e^{int}} = \frac{in}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dt = n.$$

Ще видим, че за достатъчно големи  $R$  кривата  $G_R$  има същия индекс, като използваме конструкция, аналогична на тази от следствие 2 по-горе.

Нека  $|z| = R$ . Имаме

$$\frac{|\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}_0(z)|}{|\mathcal{P}_0(z)|} = \frac{|\mathcal{Q}(z)|}{R^n} \leq \frac{|a_1|}{R} + \dots + \frac{|a_n|}{R^n}.$$

Очевидно дясната страна клони към нула при  $R \rightarrow \infty$ , и ние можем да изберем  $R$  толкова голямо, че тя да не надминава  $1/2$ . Тогава при  $|z| = R$  ще имаме

$$|\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}_0(z)| \leq \frac{1}{2} |\mathcal{P}_0(z)|.$$

Аналогично на доказателството на следствие 2, ще разгледаме непрекъснатата фамилия от криви  $G_R^s$ ,  $s \in [0, 1]$ , с параметрично представяне

$$\begin{aligned} z_s(t) &= s \mathcal{P}(R e^{it}) + (1-s) \mathcal{P}_0(R e^{it}) = \\ &= \mathcal{P}_0(R e^{it}) + s (\mathcal{P}(R e^{it}) - \mathcal{P}_0(R e^{it})), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

При  $s = 1$  получаваме кривата  $G_R$ , а при  $s = 0$  - кривата  $G_R^0$ .

Ще покажем, че нито една от кривите  $G_R^s$  не минава през нулата. Наистина, за всяко  $s$  и  $t$  имаме по неравенството на триъгълника

$$\begin{aligned} |z_s(t)| &\geq |\mathcal{P}_0(R e^{it})| - s |\mathcal{P}(R e^{it}) - \mathcal{P}_0(R e^{it})| \geq \\ &\geq |\mathcal{P}_0(R e^{it})| - s \cdot \frac{1}{2} |\mathcal{P}_0(R e^{it})| = \\ &= (1-s/2) |\mathcal{P}_0(R e^{it})| \geq \frac{1}{2} |\mathcal{P}_0(R e^{it})| = \frac{R}{2} > 0. \end{aligned}$$

Следователно, можем да използваме следствието и да получим, че

$$\text{Ind}_0 G_R = \text{Ind}_0 G_R^0 = n \neq 0.$$

Полученото противоречие доказва основната теорема на алгебрата. ■

**Забележка.** В теорията на аналитичните функции се доказва, че цялото число  $\text{Ind}_0 G_R$  съвпада с броя на корените (смятани с техните кратности), лежащи в кръга  $D_R = \{z : |z| \leq R\}$ . (Виж задачи 2 и 3.) Доказахме, че за достатъчно големи  $R$  този индекс е равен на  $n$ , и следователно всеки полином от  $n$ -та степен има точно  $n$  комплексни корени, броени с кратностите\*.

Нещо повече, от горните разсъждения може да се оцени колко голям трябва да бъде радиусът  $R$  (в зависимост от коефициентите на полинома) така че кръгът  $D_R$  да съдържа всички корени на полинома  $\mathcal{P}$ . За целта е достатъчно да изберем  $R$  толкова голямо, че

$$\frac{|a_1|}{R} + \dots + \frac{|a_n|}{R^n} < 1.$$

---

\*Този факт лесно следва и непосредствено от основната теорема на алгебрата.

(В доказателството на лемата числото  $1/2$  може да бъде заменено с произволно число, по-малко от единица.) За целта е достатъчно например да вземем

$$R > \max(1, |a_1| + \dots + |a_n|).$$

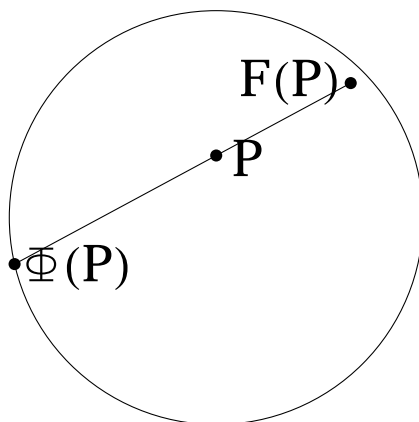
(Докажете!) Такива оценки имат приложно значение.

**Теорема на Брауер за неподвижната точка.** Друга важна теорема, която ще докажем, е следната теорема за неподвижната точка:

**Теорема.** *Нека  $F$  е непрекъснато изображение на затворения единичен кръг  $D$  в себе си. Тогава  $F$  притежава неподвижна точка, т.е. съществува точка  $P \in D$  такава, че  $F(P) = P$ .*

**Доказателство.** Както и в предното твърдение, ще предположим, че неподвижна точка не съществува, и ще стигнем до противоречие.

Наистина, да предположим, че  $F(P) \neq P$  за всяко  $P \in D$ . Нека  $S$  е границата на кръга  $D$ , т.е. единичната окръжност. Да прекараме права през точките  $P$  и  $F(P)$ , и да означим с  $\Phi(P)$  едната от двете пресечни точки на тази права с единичната окръжност - по-точно тази, която лежи от страната на  $P$  (виж чертежа).



Конструкция на изображението  $\Phi : D \rightarrow S$ .

Ние получихме изображение  $\Phi(P)$  на кръга  $D$  в себе си със след-

ните свойства\* :

- 1/ Изображението  $\Phi$  е непрекъснато,
- 2/ Образът на  $\Phi$  се съдържа в единичната окръжност  $S$ , и
- 3/ Всяка точка от  $S$  при изображението  $\Phi$  остава на мястото си.

Свойствата 2/ и 3/ следват непосредствено от конструкцията. Непрекъснатостта на  $\Phi$  е интуитивно ясна, и ние няма да даваме точното доказателство. Основните му моменти са дадени в задача 1. Ще отбележим, че в него съществено се използва предположението, че  $F(P) \neq P$ .

Следната лема приключва доказателството на теоремата:

**Лема.** *Не съществува изображение  $\Phi : D \rightarrow S$ , удовлетворяващо свойствата 1/, 2/, 3/.*

Това твърдение е интуитивно ясно. Да си представим каучукова мембрана, опъната върху рамка с формата на окръжност. Не можем да разтеглим мембраната така, че тя да попадне изцяло върху рамката, без да скъсаме мембраната поне в една точка, т.е. да нарушим непрекъснатостта.

**Доказателство на лемата.** Да предположим, че такова изображение  $\Phi$  съществува. Отново ще разгледаме непрекъснатата фамилия от криви  $G_s = \Phi(\Gamma_s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , където  $\Gamma_s$  е окръжността с център в началото и радиус  $s$ . Поради свойството 3/ кривата  $G_1$  съвпада с единичната окръжност  $\Gamma_1 = S$  и следователно  $\text{Ind}_0 G_1 = 1$ . От друга страна, както отбелязахме по-горе, кривата  $G_0$  се изражда в точка, и следователно  $\text{Ind}_0 G_0 = 0$ . И тук получаваме противоречие със следствие 1 от теорема 1. Това противоречие доказва лемата, а заедно с нея и теоремата за неподвижната точка. ■

**Забележка.** По-нататък ние ще видим, че теоремата за неподвижната точка е валидна и за по-високите размерности, като единичният кръг се заменя с единичното кълбо в  $\mathbb{R}^n$ . Това твърдение може да се обобщи и за изпъкнали компактни подмножества на безкрайномерни банахови пространства – т.нар. принцип на Шаудер, който се използва в много приложни задачи.

### Упражнения.

---

\* В топологията се в такъв случай се казва, че  $\Phi$  е *ретракция* на  $D$  върху неговото подмножество  $S$ .

1. Докажете непрекъснатостта на изображението  $\Phi$ , използвано в доказателството на теоремата за неподвижната точка.

**Упътване.** От конструкцията имаме векторното равенство  $\Phi(P) = P + \lambda(F(P) - P)$ , където  $\lambda \leq 0$ . Точната стойност на  $\lambda$  се определя от условието  $|\Phi(P)| = 1$ .

Нека  $P = (x, y)$  е точка от  $D$  (т.е.  $x^2 + y^2 \leq 1$ ). Да означим координатите на  $F(P)$  с  $(f(x, y), g(x, y))$ . Тогава векторът  $F(P) - P$  има координати  $u(x, y) = f(x, y) - x$ ,  $v(x, y) = g(x, y) - y$ . По предположение винаги имаме  $u(x, y)^2 + v(x, y)^2 > 0$ . Тогава  $\lambda$  се определя от квадратното уравнение

$$(x + \lambda u(x, y))^2 + (y + \lambda v(x, y))^2 = 1.$$

Докажете, че това уравнение има винаги два различни реални корена, и следователно търсената стойност на  $\lambda$  се дава с формулата

$$\lambda(x, y) = \frac{1}{u^2 + v^2} \left( -x.u - y.v - \sqrt{(x.u + y.v)^2 + (u^2 + v^2)(1 - x^2 - y^2)} \right).$$

(Тук сме писали  $u$  и  $v$  вместо  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ .)

Оттук се вижда, че скаларната функция  $\lambda(x, y)$ , а следователно и векторната функция  $\Phi(P)$ , са непрекъснати функции на променливите  $x$  и  $y$ .

2. Нека точката  $z_0$  е корен с кратност  $k$  на полинома  $\mathcal{P}(z)$ . С други думи, имаме представянето

$$\mathcal{P}(z) = (z - z_0)^k \mathcal{Q}(z), \quad \mathcal{Q}(z_0) \neq 0.$$

Нека  $D_\varepsilon$  е кръг с център  $z_0$ , не съдържащ други корени на  $\mathcal{P}(z)$ ,  $\Gamma_\varepsilon$  е неговата граница, и  $G_\varepsilon = \mathcal{P}(\Gamma_\varepsilon)$ . Докажете, че  $\text{Ind}_0 G_\varepsilon = k$ .

**Упътване.** Окръжността  $\Gamma_\varepsilon$  се параметризира с формулата

$$z = z_0 + \varepsilon e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

За  $G_\varepsilon$  получаваме параметризацията

$$z = \mathcal{P}(z_0 + \varepsilon e^{it}) = \varepsilon^k e^{ikt} \mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it}).$$

Оттук имаме

$$\begin{aligned} \text{Ind}_0 G_\varepsilon &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{d(\mathcal{P}(z_0 + \varepsilon e^{it}))}{\mathcal{P}(z_0 + \varepsilon e^{it})} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^k d(e^{ikt} \mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it}))}{\varepsilon^k e^{ikt} \mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it})} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it}) \cdot ik e^{ikt} + e^{ikt} \cdot i\varepsilon e^{it} \mathcal{Q}'(z_0 + \varepsilon e^{it})}{e^{ikt} \mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it})} dt = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} \mathcal{Q}'(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\mathcal{Q}(z_0 + \varepsilon e^{it})} dt. \end{aligned}$$

Първото събираемо е равно на  $k$  и не зависи от  $\varepsilon$ . Според резултатите на този параграф числото  $\text{Ind}_0 G_\varepsilon$  също не зависи от  $\varepsilon$  при  $\varepsilon$  достатъчно малко, и следователно това е вярно и за второто събираемо. Лесно се вижда, че второто събираемо клони към нула при  $\varepsilon \searrow 0$ , и следователно то винаги е нула. Получихме, че при достатъчно малки  $\varepsilon$  имаме  $\text{Ind}_0 G_\varepsilon = k$ .

**3.** Нека, както в текста по-горе, да означим с  $D_R$  кръга с център в началото и радиус  $R$ , с  $\Gamma_R$  - ограничаващата го окръжност и нека полиномът  $\mathcal{P}(z)$  няма нули върху окръжността  $\Gamma_R$ . Да означим  $G_R = \mathcal{P}(\Gamma_R)$ . Тогава числото  $\text{Ind}_0 G_R$  е равно на броя на всички нули на  $\mathcal{P}(z)$  в кръга  $D_R$ , като всяка от тях се брои толкова пъти, колкото е нейната кратност.

**Упътване.** Нека  $z_1, \dots, z_p$  са нулите на  $\mathcal{P}(z)$  в кръга  $D_R$ , с кратности съответно  $k_1, \dots, k_p$ . За  $i = 1, \dots, p$  да означим с  $D_i$  достатъчно малък кръг с център  $z_i$ ,  $\Gamma_i = \partial D_i$ , и  $G_i = \mathcal{P}(\Gamma_i)$ . Нека

$$\tilde{D} = D_R \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_p) \quad \text{и} \quad \tilde{E} = \mathcal{P}(\tilde{D}).$$

Тогава

$$b\tilde{D} = \Gamma_R - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_p \quad \text{и} \quad b\tilde{E} = G_R - G_1 - \dots - G_p.$$

Тъй като  $\mathcal{P}(z)$  няма нули в  $\tilde{D}$ , то от формулата на Гаус-Грин следва, че

$$\int_{b\tilde{E}} \omega_0 = 0,$$



и следователно

$$\text{Ind}_0 G_R = \sum_{i=1}^p \text{Ind}_0 G_i = k_1 + \dots + k_p$$

(виж предната задача).

4. Нека  $\Gamma$  е регулярна затворена крива в  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \in \Gamma$ , и  $\vec{e}$  е вектор, неколинеарен на допирателния вектор  $\vec{e}(P_0)$ . Нека  $\vec{n}(P_0)$  е нормалният вектор, получен чрез завъртане на  $\vec{e}(P_0)$  на ъгъл  $\pi/2$  в отрицателна посока. Нека

$$P_\varepsilon^+ = P_0 + \varepsilon \cdot \vec{e}, \quad P_\varepsilon^- = P_0 - \varepsilon \cdot \vec{e}.$$

Покажете, че

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} (\text{Ind}_{P_\varepsilon^-} \Gamma - \text{Ind}_{P_\varepsilon^+} \Gamma) = \pm 1,$$

където знакът е "+", когато ъгълът между  $\vec{e}$  и  $\vec{n}(P_0)$  е остър, и "-" – когато този ъгъл е тъп.

**Упътване.** 1. Нека  $\Gamma_0$  е достатъчно малка част от  $\Gamma$ , съдържаща  $P_0$ , и нека  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_0$ . Покажете, че

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\tilde{\Gamma}} (\omega_{P_\varepsilon^-} - \omega_{P_\varepsilon^+}) = 0.$$

2. Нека  $P$  и  $Q$  да са съответно началната и крайната точка на кривата  $\Gamma_0$ . Нека  $\Gamma'$  е затворената крива, получена чрез добавяне към  $\Gamma_0$  на насочените отсечки (виж чертежа)  $\vec{OP}$  и  $\vec{QO}$ :

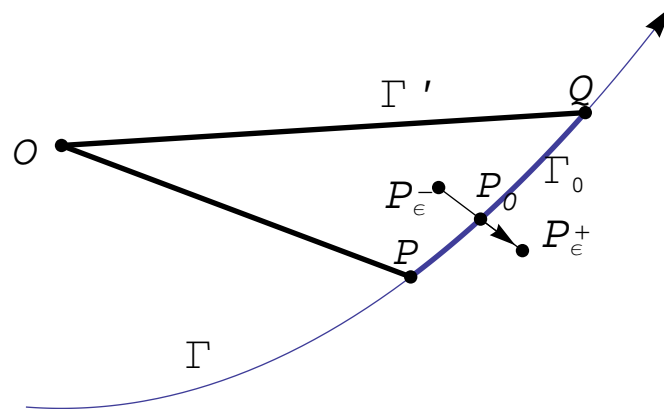
$$\Gamma' = \vec{OP} + \Gamma_0 + \vec{QO}.$$

Аналогично на точка 1, покажете, че

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\vec{OP}} (\omega_{P_\varepsilon^-} - \omega_{P_\varepsilon^+}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\vec{QO}} (\omega_{P_\varepsilon^-} - \omega_{P_\varepsilon^+}) = 0,$$

и следователно

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Gamma_0} (\omega_{P_\varepsilon^-} - \omega_{P_\varepsilon^+}) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\Gamma'} (\omega_{P_\varepsilon^-} - \omega_{P_\varepsilon^+}).$$



Чертеж към зад.4.

3. Ще използваме, че кривата  $\Gamma'$  ограничава област  $K$  от равнината (т.нар. криволинеен сектор).

Нека ъгълът между  $\vec{e}$  и  $\vec{n}(P_0)$  е остър. Тогава точката  $P_\epsilon^+$  е външна за  $K$ , а точката  $P_\epsilon^-$  – вътрешна. (Ако ъгълът е тъп, то е вярно обратното). Тогава твърдението на задачата следва от точки 1 и 2 и от примера в началото на параграфа.

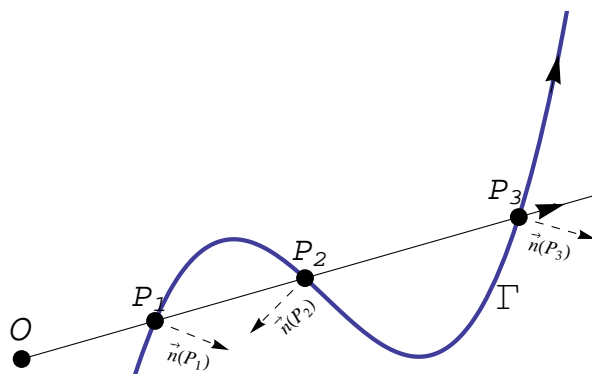
**5. (Геометрична дефиниция на индекса)** Нека  $\Gamma$  е затворена регулярна крива в  $\mathbb{R}^2$ , не минаваща през началото  $O$  на координатите, с параметрично уравнение  $P = P(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Нека  $\vec{l}(t)$  е съответният допирателен вектор, и  $\vec{n}(t)$  е нормалният вектор, получен чрез завъртане на  $\vec{l}(t)$  на ъгъл  $-\pi/2$ .

Нека  $L$  е лъч с начало в  $O$ , породен от вектора  $\vec{e}$ . Ще предположим, че  $L$  се пресича с  $\Gamma$  в краен брой различни точки  $P_i = P(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и във всяка от тях допирателният вектор  $\vec{l}(t_i)$  не е колинеарен с  $\vec{e}^*$ . Всяка от точките  $P_i$  ще бъде наречена "+" – точка, ако ъгълът  $\sphericalangle(\vec{e}, \vec{n}(t_i))$  е остър, и "-" – точка, ако този ъгъл е тъп. Нека  $n_+$  е броят на "+" – точките, и съответно  $n_-$  – на "-" – точките. Тогава

$$\text{Ind}_0 \Gamma = n_+ - n_-.$$

\*Това винаги може да бъде постигнато с малки деформации на кривата  $\Gamma$  и на вектора  $e$ .

(На чертежа точките  $P_1$  и  $P_3$  са "+" – точки, а  $P_2$  "–" – точка.)



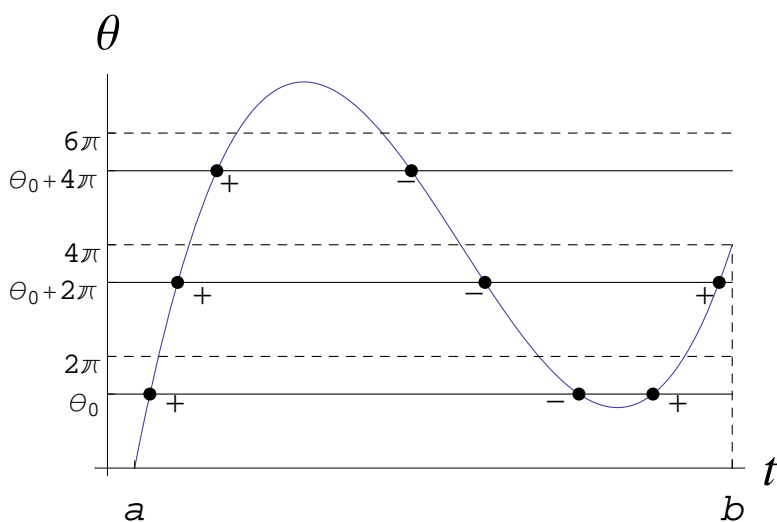
Чертеж към зад.5.

**Упътване.** Според лемата към теорема 1 можем да считаме, че  $\Gamma$  е зададена с уравненията

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = \rho(t) \sin \theta(t), \quad t \in [a, b].$$

Можем да считаме, че  $\theta(a) = 0$  и  $\theta(b) = 2k\pi$ , където  $k = \text{Ind}_0\Gamma$ . За удобство ще предполагаме, че  $k > 0$ . Ако  $\theta_0$  е полярният ъгъл, съответстващ на лъча  $L$ , то пресечните точки на  $\Gamma$  с  $L$  съответстват на онези стойности на параметъра  $t$ , за които  $\theta(t) = \theta_l = \theta_0 + 2l\pi$ , като  $l$  е цяло число. Можем да допуснем, че тези точки са краен брой и във всяка от тях е изпълнено  $\theta'(t) \neq 0$ . Очевидно "+"-точки са тези, в които графиката на  $\theta(t)$  пресича правата  $\theta = \theta_l$ , монотонно нараствайки (отдолу нагоре), а "–"-точки – в които това става отгоре надолу. Изследвайки по метода на интервалите функцията  $\theta(t) - \theta_l$ , виждаме, че за всяка стойност на  $l$  между 0 и  $k - 1$  разликата между "+" и "–"-точките е равна на единица, а за стойности на  $l$  извън този интервал тя е равна на нула, което доказва твърдението (виж чертежа по-долу).

За стойности на индекса  $k \leq 0$  твърдението се доказва аналогично.



Решение на зад.5.

## 1.6 Приложения на криволинейния интеграл от втори вид

В този параграф ще дадем някои приложения на криволинейния интеграл от втори вид. В частност, ще покажем, че чрез него се формулират много по-естествено някои от въпросите, изследвани в §2 с помощта на криволинейния интеграл от първи вид.

**1. Работа в силово поле.** Това беше нашият основен пример при въвеждане на криволинейния интеграл от втори вид.

Нека  $\Gamma$  е ориентирана крива в  $\mathbb{R}^3$ , и нека

$$\vec{F}(P) = (A(P), B(P), C(P))$$

е векторно поле, дефинирано в околност на  $\Gamma$ . както видяхме, работата  $A$  при движение на единична маса по кривата  $\Gamma$  се дава с формулата

$$A = \int_{\Gamma} \langle \vec{F}, \vec{l} \rangle dl = \int_{\Gamma} A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

В частност, нека  $\vec{F}$  е потенциално поле, т.е. съществува функция  $\Phi(P)$  такава, че  $\vec{F} = \text{grad} \Phi = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z)$ . Преведено на езика на диференциалните форми, това означава, че

$$d\Phi = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz.$$

Ако означим с  $P_0$  и  $P_1$  началната и крайната точки на  $\Gamma$ , то с просто пресмятане\* получаваме, че

$$A = \Phi(P_1) - \Phi(P_0).$$

**2. Лице на равнинна фигура.** Нека  $D$  е област в равнината, заградена от затворената крива  $\Gamma$ , така че да са изпълнени условията на теоремата на Гаус-Грин. Тогава, използвайки тази теорема, получаваме за лицето  $\mu(D)$  на областта  $D$  формулите

$$\mu(D) = \iint_D 1 dx dy = \int_{\Gamma} x dy = - \int_{\Gamma} y dx.$$

Понякога се използва и по-симетричната формула

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx).$$

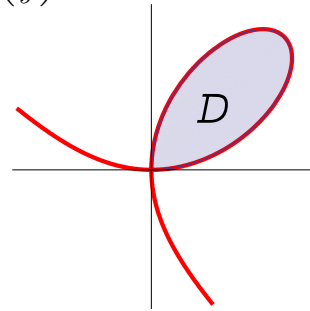
При използването на последната формула е удобно да се използват равенствата

$$x dy - y dx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = -y^2 d\left(\frac{x}{y}\right).$$

**Пример.** Равнинната крива, наречена *Декартов лист*, се определя с уравнението

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0.$$

Да се намери лицето на фигурата  $D$ , заградена от частта на кривата в първи квадрант (виж чертежа).



\* Виж доказателството на теорема 1 от §1.4.

**Решение.** Декартовият лист (както и доста широк клас от равнинни криви) се параметризира с полагането  $t = \frac{y}{x}$ . Получаваме формулите

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

От геометрични съображения се вижда, че точките от първи квадрант се получават при  $t \in (0, +\infty)$ . Нека  $\Gamma$  е съответната крива. По третата формула от точка 2 получаваме

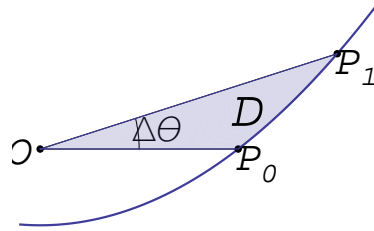
$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x(t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2} a^2.$$

**Забележка.** Ние използвахме несобствен интеграл, което формално не е предвидено във формулата. Направените изчисления обаче не е трудно да се обосноват, като въведем за параметър полярният ъгъл  $\theta$  в граници от 0 до  $\pi/2$ , и след това преминем към параметъра  $t = \operatorname{tg} \theta$ .

### 3. Лице на криволинеен сектор.

Нека е дадена равнинната крива с уравнения в полярни координати

$$\varrho = \varrho(t), \quad \theta = \theta(t).$$



Нека  $\Gamma_1$  е частта от  $\Gamma$ , отговаряща на стойности на параметъра  $t \in [t_0, t_1]$ , като  $P_0 = P(t_0)$  и  $P_1 = P(t_1)$  са съответно началната и крайната точки на  $\Gamma_1$ . Под криволинеен сектор, определен от  $\Gamma_1$ , ще разбираме фигурата  $D$ , заградена от отсечките  $OP_0$ ,  $OP_1$ , и кривата  $\Gamma_1$  (виж чертежа). Ще намерим на лицето на  $D$ , като използваме третата формула от т. 2. Имаме

$$bD = \overline{OP_0} + \Gamma_1 + \overline{P_1O}.$$

Тъй като по отсечките  $\overline{OP_0}$  и  $\overline{P_1O}$  отношението  $\frac{y}{x}$  е константа, то интегралите по тях са нули, и имаме

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \varrho^2(t) \cos^2(t) d(\operatorname{tg} \theta(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \rho^2(t) d\theta(t).$$

Подобна формула беше изведена от интуитивни съображения в §4.5 на част I.

**4. Интеграл на Гаус в равнината.** Както видяхме в точка 3 на §2, ориентираният ъгъл, под който кривата  $\Gamma$  се вижда от началото на координатите, се дава с криволинейния интеграл от първи вид

$$\Theta = \int_{\Gamma} \frac{\sin \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|} dl,$$

където  $\vec{e}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P))$  означава единичния допирателен вектор към  $\Gamma$  в точката  $P$ , а  $\alpha(P)$  и  $\beta(P)$  са ъглите, които  $\vec{e}(P)$  сключва с координатните оси  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ .

За да представим този израз като криволинеен интеграл от втори вид, трябва по някакъв начин да заменим синуса с косинус. Нека  $\vec{n}(P)$  да е единичната нормала към  $\Gamma$  в точката  $P$ , получена чрез завъртане на  $\vec{e}(P)$  на ъгъл  $\pi/2$  в отрицателна посока; тогава  $\vec{n}(P) = (\cos \beta(P), -\cos \alpha(P))$ .

Имаме  $\sphericalangle(\vec{P}, \vec{n}(P)) = \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P)) - \pi/2$  и следователно

$$\sin \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P)) = \cos \sphericalangle(\vec{P}, \vec{n}(P)).$$

Тогава

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_{\Gamma} \frac{\cos \sphericalangle(\vec{P}, \vec{n}(P))}{|\vec{P}|} dl = \int_{\Gamma} \frac{\langle \vec{P}, \vec{n}(P) \rangle}{|\vec{P}|^2} dl = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{x \cos \beta(P) - y \cos \alpha(P)}{x^2 + y^2} dl, \end{aligned}$$

където с  $x$  и  $y$  сме означили координатите на точката  $P$  (и на вектора  $\vec{P}$ ). Припомняйки си връзката между криволинейните интегралите от първи и втори вид, вече можем да изразим търсеният ъгъл чрез криволинеен интеграл от втори вид:

$$\Theta = \int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Получихме, с точност до числов множител, интеграл от формата  $\omega_0$ , която играеше важна роля в разглежданията от предните параграфи.

**5. Закон на Био-Савар.** В точка 4 на §2 ние разгледахме закона на Био-Савар, описващ магнитния ефект от протичащ електрически ток. Ако токът тече със сила  $I$  по равнинната крива  $\Gamma$ , силата, с която той действа върху единичен магнитен товар в началото, е равна на  $\vec{F} = F \cdot \vec{z}$ , и нейната големина  $F$  се дава с криволинейния интеграл от първи вид

$$F = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{\sin \sphericalangle(\vec{P}, \vec{e}(P))}{|\vec{P}|^2} dl.$$

Лесно се вижда, че тази величина се изразява и чрез криволинейен интеграл от втори вид. Наистина, разсъждавайки по същия начин, както за интеграла на Гаус от предната точка, получаваме израза

$$F = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{x \cos \beta(P) - y \cos \alpha(P)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dl = \int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Ако магнитният товар е разположен в точката с координати  $(x_0, y_0)$ , то големината на действащата му сила ще се дава с формулата

$$F = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{-(y - y_0) dx + (x - x_0) dy}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}}.$$

**6. Поток на течност през равнинна крива.** В точка 5 на §2 ние разгледахме стационарно течение на течност в равнината с векторно поле на скоростта

$$\vec{V}(P) = (V_x(P), V_y(P)),$$

и изведохме формула за количеството течност  $U_{\Gamma}$ , протичащо през кривата  $\Gamma$  за единица време:

$$U = \int_{\Gamma} |\vec{V}(P)| \sin \sphericalangle(\vec{V}(P), \vec{e}(P)) dl.$$



Действайки както в предната точка, получаваме

$$\begin{aligned} U_\Gamma &= \int_\Gamma (V_x(P) \cos \beta(P) - V_y(P) \cos \alpha(P)) dl = \\ &= \int_\Gamma -V_y(x, y) dx + V_x(x, y) dy. \end{aligned}$$

Да предположим допълнително, че количеството на течността не се изменя, т.е. в равнината няма втичане и изтичане на течност. Нека  $\Gamma$  е проста затворена крива; тогава количеството на втичащата се течност в нея е равна на количеството на изтичащата, т.е. получаваме, че  $U_\Gamma = 0$ . Ако означим с  $\omega$  дифференциалната форма

$$\omega = -V_y(x, y) dx + V_x(x, y) dy,$$

оттук се вижда, че интегралът от  $\omega$  по всяка затворена крива е равен на нула (условие 1' от §1.4). От резултатите на същия параграф следва, че са изпълнени условията 2 и 3, т.е. имаме

1/ Винаги е изпълнено равенството

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \equiv 0, \text{ и}$$

2/ съществува (локално) функция  $\Psi(x, y)$  такава, че  $\omega = d\Psi$ , т.е.  $\Psi'_x = -V_y$  и  $\Psi'_y = V_x$ .

Ако  $\Gamma$  е незатворена крива с начална точка  $A$  и крайна точка  $B$ , то оттук получаваме равенството

$$U_\Gamma = \Psi(B) - \Psi(A).$$

Лесно се проверява равенството

$$\langle \vec{V}(P), \overrightarrow{\text{grad}} F(P) \rangle = 0.$$

Ще напомним, че градиентът на една функция в една точка е ортогонален на линията на ниво, минаваща през точката (виж част II,

теорема 2 от §1.5) и следователно във всяка точка векторът на полето на скоростта е перпендикулярен на съответната линия на ниво на функцията  $\Psi$ . Получихме, че

*Траекториите на частиците при движението на течността съвпадат с линиите на ниво на функцията  $\Psi(x, y)$ .*

По тази причина функцията  $\Psi(x, y)$  се нарича функция на тока, съответстваща на даденото течение.

Да предположим сега, че полето  $\vec{V}(P)$  е *потенциално*<sup>\*</sup>, т.е. съществува функция  $\Phi(x, y)$  такава, че  $\text{grad } \Phi(P) = \vec{V}(P)$ . Очевидно функциите  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяват системата от диференциални уравнения

$$\Psi'_x = -\Phi'_y, \quad \Psi'_y = \Phi'_x.$$

В частност, от тук следва, че  $\Phi$  и  $\Psi$  са хармонични функции, т.е.

$$\Delta\Phi = \Delta\Psi \equiv 0.$$

Горните уравнения се наричат *уравнения на Коши-Риман* за функциите  $\Phi$  и  $\Psi$ . В теорията на аналитичните функции се доказва, че ако  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяват горните уравнения, то комплексно-значната функция

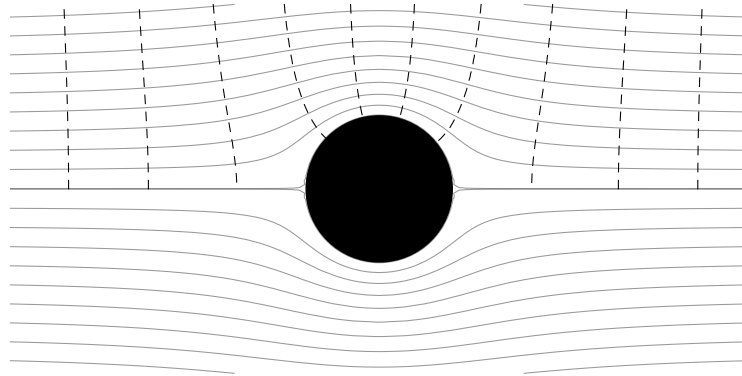
$$F(x, y) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

е *аналитична функция* на комплексната променлива  $z = x + iy$ . На това се основават приложенията на теорията на аналитичните функции към хидродинамиката. Функцията  $F(x, y)$  се нарича комплексен потенциал на даденото течение.

На следващия чертеж с плътни линии са дадени линиите на ниво на функцията  $\Psi(x, y)$ , т.е. траекториите на движение на частиците на течността, а с пунктирни – линиите на ниво на функцията  $\Phi(x, y)$ , т.е. точките с еднакъв реален потенциал. Те съединяват точките, достигнати от течността в даден момент; с други думи, всяка от частиците на течността изминава разстоянието между две пунктирни линии за еднакъв интервал от време, независимо от това, по коя траектория се движи.

---

\* По-нататък ще покажем защо това предположение е обосновано.



Обтичане на цилиндър от течност. С плътни линии са показани траекториите на движението, а с пунктирни – линиите с еднакъв потенциал.

### Упражнения.

1. (Закон на Био-Савар за пространствена крива) Нека токът тече със сила  $I$  по пространствената крива  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . Иска се да се опише действието на тока върху единичен магнитен товар, разположен в началото на координатите в  $\mathbb{R}^3$ . Използвайки формулата от §2 :

$$\Delta \vec{F} \approx I \cdot \frac{\vec{P} \times \Delta \vec{l}}{|\vec{P}|^3},$$

описваща действието на тока от малка отсечка  $\Delta \vec{l}$  от кривата, докажете, че компонентите на действащата сила

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

се изразяват чрез криволинейните интеграла от втори вид

$$F_x = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{-z dy + y dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad F_y = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{-x dz + z dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$F_z = I \cdot \int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$



## Глава 2

# Повърхности и повърхнинни интеграли

### 2.1 Параметрично зададени повърхности

От едномерните обекти в  $\mathbb{R}^n$  – кривите – ние ще преминем към двумерните – повърхнините. Като начало ние ще дадем основните дефиниции, аналогични на тези от §1.1. Най-важни за нас ще бъдат повърхнините в  $\mathbb{R}^3$ , но всичко може да се пренесе без изменения за повърхнини в  $\mathbb{R}^n$  при  $n \geq 3$ .

**Дефиниция.** *Казваме, че множеството от точки  $S$  в  $\mathbb{R}^3$  е параметрично зададена повърхнина, ако са дадени функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$ , дефинирани в измеримото свързано множество  $D \in \mathbb{R}^2$ , така че всяка точка  $(x, y, z) \in S$  се представя във вида*

$$x(u, v), y(u, v), z(u, v)$$

за някоя точка  $(u, v) \in D$ .

Тройката функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  ще наричаме параметрично представяне на  $S$ . Както и за криви, горните скаларни равенства могат да бъдат записани като едно векторно равенство

$$\vec{P} = \vec{P}(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

където сме означили  $\vec{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

**Дефиниция.** Повърхнината  $S$  ще наричаме:

- непрекъсната, ако функциите  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  са непрекъснати.

-  $n$ -кратно гладка, ако функциите  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  са  $n$ -кратно гладки, т.е. притежават непрекъснати частни производни до ред  $n$  включително.

**Дефиниция.** Повърхнината  $S$  ще наричаме явно зададена, ако тя може да се представи като графика на функция на две променливи.

Явно зададените повърхнини са частен случай от параметрично преставените. Наистина, ако повърхнината  $S$  съвпада с графиката на функцията  $z = f(x, y)$ , то за параметри могат да се изберат координатите  $x$  и  $y$ , откъдето получаваме представянето

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v).$$

И при повърхнините е налице фактът, който видяхме при кривите: възможно е параметричните функции на повърхнината да бъдат гладки, но самата повърхнина – като подмножество на  $\mathbb{R}^3$  – да не отговаря на нашата представа за гладкост. И тук въвеждаме допълнителното условие за регулярност.

**Дефиниция.** Еднократно гладката повърхнината  $S$  ще наричаме регулярна, ако за всяка точка  $(u, v) \in D$  поне една от функционалните детерминанти

$$A(u, v) = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v), \quad B(u, v) = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v), \quad C(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v)$$

е различна от нула.

Еквивалентна формулировка: навсякъде върху  $D$  е изпълнено неравенството

$$\left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 > 0.$$

По-надолу ние ще видим геометричния смисъл на понятието регулярност.

Ще отбележим, че явно зададените повърхнини са регулярни; това следва от очевидното неравенство  $\frac{D(x, y)}{D(x, y)} \equiv 1$ .

**Връзка между различните параметрични представяния.** Дадена повърхнина  $S$  (разглеждана като геометрически обект, т.е. като подмножество на  $\mathbb{R}^3$ ) може да има различни параметрични представяния. Можем да получим нови параметрични представяния чрез смяна на променливите. Така, ако

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

е дадено параметрично представяне на  $S$ , и ако изображението  $\Phi(\tilde{u}, \tilde{v})$  с компоненти

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$$

е взаимно еднозначно изображение на  $\tilde{D}$  върху  $D$ , то изображението

$$\tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

с координатни функции

$$x = \tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \stackrel{def}{=} x(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad y = \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \dots$$

дава ново параметрично представяне на  $S$ .

Ако параметричните функции  $x(u, v) \dots$  са  $n$ -кратно гладки, и функциите  $\tilde{u}, \tilde{v}$  са  $n$ -кратно гладки функции на  $u$  и  $v$ , то новото параметрично представяне също е  $n$ -кратно гладко. Нещо повече, ако функционалната детерминанта  $J_\Phi = \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})}$  е различна от нула навсякъде върху  $\tilde{D}$ , то от регулярността на старото параметрично представяне следва регулярността и на новото. Това следва непосредствено от равенствата

$$\frac{D(\tilde{y}, \tilde{z})}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})}, \dots$$

Вярно е и обратното твърдение:

**Теорема 1.** *Нека*

$$P = P(u, v) : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D$$

и

$$P = \tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) : x = \tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), y = \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}), z = \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$$

са две регулярни параметрични представяния на повърхнината  $S$ . Тогава едното параметрично представяне се получава от другото чрез смяна на променливите.

По-точно, съществува взаимно еднозначно и еднократно гладко изображение  $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$  с компоненти

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

и с функционална детерминанта  $J_\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) \neq 0$ , така че да са изпълнени равенствата

$$\tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v})).$$

Изображението  $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$  ще наричаме свързващо изображение за параметричните представяния, зададени съответно с параметрите  $(u, v)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ .

**Доказателство.** Ясно е, че съществува взаимно еднозначно изображение  $\Phi : \tilde{D} \rightarrow D$ , съпоставящо на всяка точка  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  от  $\tilde{D}$  единствената точка  $(u, v) \in D$ , за която  $\tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(u, v)$ . Очевидно равенствата на теоремата са изпълнени. От доказателство се нуждае единствено гладкостта на изображението  $\Phi$ .

Достатъчно е да докажем това локално. Да изберем произволна точка  $P_0 \in S$ :

$$P_0 = P(u_0, v_0) = \tilde{P}(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0).$$

От регулярността на параметричното представяне  $P(u, v)$  следва, че поне една от трите му функционални детерминанти в точката  $(u_0, v_0)$  не се анулира; можем да считаме, че  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$ . Тогава, по теоремата за обратното изображение, в околност на точката  $(x_0, y_0)$  можем да изразим параметрите  $u$  и  $v$  като гладки функции на координатите  $x$  и  $y$ :  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Тогава в околност на точката  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  изображението  $\Phi$  може да се зададе с еднократно гладките функции

$$u(\tilde{u}, \tilde{v}) = u(x(\tilde{u}, \tilde{v}), y(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad v(\tilde{u}, \tilde{v}) = v(x(\tilde{u}, \tilde{v}), y(\tilde{u}, \tilde{v})).$$

Лесно се проверява също така, че якобианът на това изображение е различен от нула. ■



**Общо понятие за повърхност.** Оказва се, че параметрично зададените повърхнини образуват прекалено тесен клас. Дори сферата в  $\mathbb{R}^3$  не притежава регулярна параметризация – това може да стане, ако от нея се премахне например един меридиан. Това налага да се разгледа по-общо понятие за повърхнина, като геометричен обект, който може да се параметризира локално. По-точно, имаме

**Дефиниция.** Множеството  $S \subset \mathbb{R}^3$  се нарича  $k$ -кратно гладка повърхност в  $\mathbb{R}^3$ , ако за всяка точка  $P \in S$  съществува околност  $U$  на  $P$ , така че  $S \cap U$  е  $k$ -кратно гладка регулярна параметрично зададена повърхност.

Под карта върху  $S$  ще разбираме отворено подмножество на  $S$ , което притежава регулярна параметризация. Формално, карта върху  $S$  е всяка тройка

$$(S \cap U, P(u, v), D),$$

където  $P = P(u, v)$  е параметрично представяне за  $S \cap U$  с дефиниционна област  $D$ . Множеството  $S \cap U$  се нарича образ на картата.

Под атлас за  $S$  ще разбираме съвкупност от карти, чиито образи покриват  $S$ .

Произходът на горните термини е ясен: всяка географска карта дава еднозначно съответствие между листа хартия (подмножество на  $\mathbb{R}^2$ ) и част от земната повърхност (т.е. от сферата).

В горната дефиниция на повърхност вече попадат геометрични обекти като сферата, тора и др. Ще отбележим, че една точка може да бъде в образа на няколко карти, т.е. около нея да има различни параметризации. Много от свойствата, които ще изследваме, не зависят от избора на параметризацията.

**Три начина за локално дефиниране на повърхностите.** Оказва се, че локално повърхността може да бъде дефинирана и по друг начин.

**Теорема 2.** Нека  $S$  е подмножество на  $\mathbb{R}^3$ . Тогава следните условия са еквивалентни:

1/ Локално  $S$  е  $k$ -кратно гладка регулярна параметрично зададена повърхнина (т.е. изпълнена е горната дефиниция).

2/ Локално  $S$  се представя като графика на  $k$ -кратно гладка функция, с която една от координатите се изразява чрез останалите две.

3/ Локално  $S$  се представя като множество от нулите на дадена  $k$ -кратно гладка функция  $F(x, y, z)$  на три променливи, удовлетворяваща условието  $\overrightarrow{\text{град}} F \neq \vec{0}$ .

Оставяме на читателя да съобрази как може да се представи по всеки един от тези начини например сферата.

**Доказателство.** Очевидно  $2/$  е частен случай от  $1/$ , т.е. имаме  $2/ \Rightarrow 1/$ . Очевидно имаме и  $2/ \Rightarrow 1/$ : наистина, ако локално  $S$  се представя например с равенството  $z = f(x, y)$ , то може да се напише във вида  $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ .

Ще докажем  $1/ \Rightarrow 2/$ . Нека  $P_0 \in S$ . Както отбелязахме в теорема 1, можем да считаме, че например  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$ , което позволява в близост до  $P_0$  параметрите  $u$  и  $v$  да се изразят като гладки функции на координатите  $x$  и  $y$ . Оттук получаваме локалното представяне

$$z = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Остава да се докаже, че от  $3/$  следва  $2/$ . Тъй като  $\overrightarrow{\text{град}} F(P) \neq \vec{0}$ , поне една от координатите на  $\overrightarrow{\text{град}} F$  е различна от нула в точката  $P$ , и следователно в някаква нейна околност. Нека например  $F'_z(P) \neq 0$ . Тогава по теоремата за неявната функция  $z$  може да се изрази като функция на  $x$  и  $y$ , т.е. в околност на  $P$  равенството  $F(x, y, z) = 0$  е равносилно с равенството  $z = f(x, y)$ , където  $f(x, y)$  е съответната неявна функция. ■

**Допирателно пространство и допирателна равнина към повърхност.** В случая на крива линия ние разгледахме понятията допирателен вектор и допирателна. Нека е дадена регулярна и еднократно гладка повърхност  $S$ , зададена с уравненията

$$P = P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

и нека  $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$ .

**Дефиниция.** Под параметрични допирателни вектори към  $S$  в точката  $P_0$  ще разбираме векторите

$$\vec{P}'_u(u_0, v_0) = (x'_u(u_0, v_0), y'_u(u_0, v_0), z'_u(u_0, v_0)),$$

$$\vec{P}'_v(u_0, v_0) = (x'_v(u_0, v_0), y'_v(u_0, v_0), z'_v(u_0, v_0)).$$

Сега можем да изясним геометричния смисъл на понятието “регулярно параметрично представяне”.

**Теорема 3.** *Параметричното представяне е регулярно точно тогава, когато векторите  $\vec{P}'_u$  и  $\vec{P}'_v$  са линейно независими.*

Ще ни трябва една теорема от линейната алгебра. Нека  $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k}}$  е  $k \times n$  матрица (матрица с  $k$  реда и  $n$  стълба),  $n \geq k$ . Редовете на тази матрица са  $n$ -мерни вектори, които ще означим с  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ , като

$$\vec{a}_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, k.$$

Под ранг на матрицата  $A$  се разбира максималното цяло  $p$ , за което съществува ненулева поддетерминанта на  $A$  от ред  $p$ .

Под ранг на системата от вектори  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  се разбира максималният брой линейно независими вектори измежду тях.

В линейната алгебра се доказва важната

**Теорема за ранга.** *Рангът на матрицата  $A$  е равен на ранга на системата от нейните редове  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ .*

В частност, рангът на  $A$  е максимален (равен на  $k$ ) точно тогава, когато векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  са линейно независими.

**Доказателство на теорема 3.** Ще приложим теоремата за ранга към матричната производна на изображението  $P : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$DP(u, v) = \begin{pmatrix} x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{pmatrix}.$$

Редовете на матрицата съвпадат с векторите  $P'_u(u, v)$  и  $P'_v(u, v)$ . Поддетерминантите от максимален (втори) ред са:

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v), \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v) \quad \text{и} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v).$$

По теоремата за ранга редовете са линейно независими точно когато поне една от тези три детерминанти не се анулира. ■

**Дефиниция.** Нека  $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$ . Под допирателно подпространство към  $S$  в точката  $P_0$  ще разбираме линейното подпространство, породено от векторите  $P'_u(u_0, v_0)$  и  $P'_v(u_0, v_0)$ . Ще го означаваме с  $T_{P_0}S$ .

**Теорема 4.** Допирателното подпространство не зависи от избора на регулярно параметрично представяне на  $S$ .

**Доказателство.** Нека е дадено параметричното представяне  $P = P(u, v)$  на повърхността  $S$  в околност на  $P_0$ . Нека, както в теорема 1,

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$$

е взаимно еднозначно изображение на  $\tilde{D}$  върху  $D$ . Тогава

$$\tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = P(\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}))$$

е друго параметрично представяне на  $S$ , с координатни функции

$$x = \tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = x(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad y = \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \dots$$

По теоремата за диференциране на съставни функции имаме

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \quad \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{u}} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}},$$

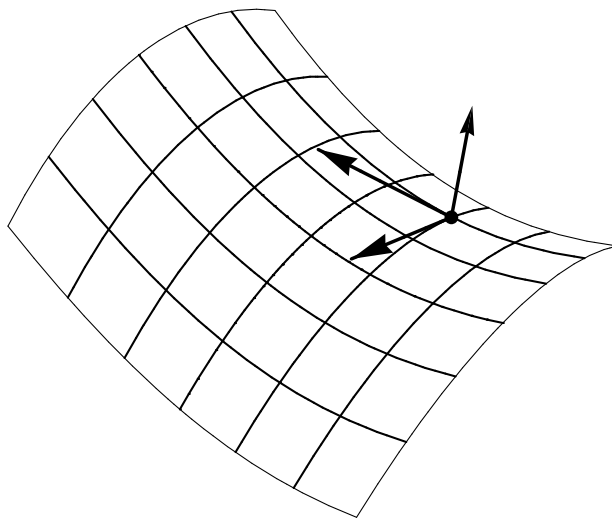
и аналогично за производните по  $\tilde{v}$ . Получените шест скаларни равенства могат да се обединят във двете векторни равенства

$$\tilde{P}'_{\tilde{u}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \cdot P'_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \cdot P'_v, \quad \tilde{P}'_{\tilde{v}} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \cdot P'_u + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \cdot P'_v.$$

Тези равенства показват, че векторите  $\tilde{P}'_{\tilde{u}}$  и  $\tilde{P}'_{\tilde{v}}$  са линейни комбинации на векторите  $P'_u$  и  $P'_v$ .

Следователно, линейните подпространства, породени от двойката вектори  $\tilde{P}'_{\tilde{u}}, \tilde{P}'_{\tilde{v}}$ , и от двойката  $P'_u, P'_v$ , съвпадат във всяка точка на повърхнината. ■

**Дефиниция: нормален вектор към повърхност.** Всеки вектор, ортогонален на допирателното пространство в дадена точка, се нарича нормален вектор към повърхността в тази точка.



### Допирателни вектори и нормален вектор към повърхност

Очевидно нормалният вектор е еднозначно определен с точност до числов множител.

Нека  $S$  е регулярна параметрично представена повърхност и  $P_0 = P(u_0, v_0) \in S$ . Да образуваме векторното произведение на допирателните вектори  $P'_u(u_0, v_0)$  и  $P'_v(u_0, v_0)$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}(P_0) &= \vec{P}'_u(u_0, v_0) \times \vec{P}'_v(u_0, v_0) = \\ &= \left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right). \end{aligned}$$

От регулярността на  $S$  следва, че този вектор не е нулев.

Понякога ще означаваме този вектор с  $\vec{N}(u, v)$  вместо с  $\vec{N}(P)$ .

Векторът  $\vec{N}(P)$  зависи от избора на параметрично представяне на  $S$ . Ако

$$P = \tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{y}(\tilde{u}, \tilde{v}), \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v})), \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \tilde{D}$$

е друго параметрично представяне в околност на  $P_0$ , и означим с  $\tilde{N}(P_0)$  получения чрез него нормален вектор, то тези два вектора се различават с ненулев числов множител. Това се вижда от равенството

$$\tilde{N}(P_0) = \frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) \cdot \vec{N}(P_0).$$

(виж равенствата преди теорема 1).

Донякъде зависимостта от параметричното представяне може да бъде отстранена, ако разгледаме единичния нормален вектор в точката  $P$ :

$$\vec{n}(P) = \frac{\vec{N}(P)}{|\vec{N}(P)|}.$$

Тогава единичните нормални вектори, съответстващи на новото и старото параметрични представяния, съвпадат с точност до знак:

$$\tilde{n}(P) = \pm \vec{n}(P),$$

като знакът в тази формула съвпада със знака на функционалната детерминанта  $\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} (\tilde{u}, \tilde{v})$ .\*

Този факт мотивира следната

**Дефиниция.** *Регулярните параметрични представяния на  $S$ , зададени с параметрите  $(u, v)$  и  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  съответно, се наричат еднакво ориентирани, ако функционалната детерминанта на свързващото ги изображение е положителна.*

*Аналогично, ще ги наричаме противоположно ориентирани, ако тази детерминанта е отрицателна.*

Очевидно две параметрични представяния са еднакво ориентирани, когато съответните им единични нормали съвпадат.

Ако означим с  $\alpha(P)$ ,  $\beta(P)$ ,  $\gamma(P)$  ъглите, които единичният нормален вектор  $\vec{n}(P)$  сключва с координатните вектори,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ , то този вектор може да се напише във вида

$$\vec{n}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P), \cos \gamma(P)).$$

---

\*Тъй като дефиниционната област  $\tilde{D}$  на параметричното представяне се предполага да е свързана, този знак е еднакъв във всички нейни точки.

Компонентите на единичния вектор  $\vec{n}(P)$  се наричат още негови директорни косинуси.

**Ориентация на повърхност.** В общия случай, две карти върху дадена повърхност, чиито образи се пресичат, могат да бъдат еднакво или противоположно ориентирани (върху сечението на образите им).

**Дефиниция.** *Казваме, че върху повърхността  $S$  е зададена ориентация, ако е зададен атлас на  $S$  такъв, че всеки две карти от него, чиито образи се пресичат, са еднакво ориентирани.*

Спомняйки си връзката между единичната нормала и параметричните представяния, получаваме еквивалентната

**Дефиниция.** *Казваме, че върху повърхността  $S$  е зададена ориентация, ако за всяка точка  $P \in S$  е зададен единичен нормален вектор  $\vec{n}(P)$ , непрекъснато зависеща от точката  $P$ .*

Наистина, ако имаме атлас от еднакво ориентирани карти, то породената от тях единична нормала във всяка точка не зависи от избора на картата.

Обратно, ако имаме непрекъснатата единична нормала върху  $S$ , можем да разгледаме само тези параметрични представяния, за които породената от тях единична нормала съвпада с дадената. Очевидно съответните карти са еднакво ориентирани и образуват атлас за  $S$ .

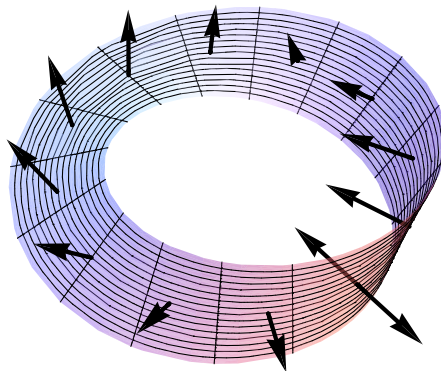
**Дефиниция.** *Казваме, че повърхността  $S$  е ориентируема, ако върху нея съществува ориентация.*

**Теорема 5.** *Всяка ориентируема свързана повърхност притежава точно две ориентации, всяка от които противоположна на другата.*

Това твърдение е интуитивно очевидно, и ние няма да го доказваме тук.

Върху сферата например ориентациите съответствуват на двата възможни избора на единичната нормала – външна нормала (сочеща навън от ограденото от сферата кълбо), и вътрешна (сочеща навътре).

**Лист на Мьобиус.** Съществуват и неориентируеми повърхности, т.е. такива, върху които не може да бъде избран непрекъснат клон на единичната нормала. Най-простият пример за такава повърхност е



Лист на Мьобиус

т.нар. лист на Мьобиус (виж чертежа). Той може да бъде получен, като вземем правоъгълна ивица хартия и съединим двата срещуположни края, като предварително завъртим единия на  $180^\circ$ .

Ако си представим, че се движим по листа на Мьобиус, то, тръгвайки от дадена точка и описвайки пълна обиколка, при връщането в началната точка, ние ще се окажем на противоположната страна на повърхността. Такива повърхности се наричат още едностранни.

**Дефиниция.** Нека  $S$  е регулярна параметрично зададена повърхност и  $P_0$  е точка от  $S$ . Под допирателна равнина към  $S$  разбираме равнината, минаваща през  $P_0$  и колинеарна с векторите  $\vec{P}'_u(P_0)$ ,  $\vec{P}'_v(P_0)$ .

Параметричното представяне на тази равнина, с параметри  $t$  и  $s$ ,



има вида

$$\vec{P}(t, s) = \vec{P}_0 + t \cdot \vec{P}'_u(P_0) + s \cdot \vec{P}'_v(P_0).$$

**Случай на явно зададена повърхност.** Ако повърхността е зададена явно, т.е. с уравнението  $z = f(x, y)$ , допирателното подпространство в точката  $(x, y, f(x, y))$  се поражда от векторите

$$\vec{P}'_x(x, y) = (1, 0, f'_x(x, y)),$$

$$\vec{P}'_y(x, y) = (0, 1, f'_y(x, y)).$$

Нормалата в точката  $(x, y, f(x, y))$  се задава с формулата

$$\vec{N}(x, y) = (-f'_x(x, y), -f'_y(x, y), 1).$$

Имаме

$$|\vec{N}(x, y)| = \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2}.$$

За единичната нормала получаваме

$$\vec{n}(x, y) = (\cos \alpha(x, y), \cos \beta(x, y), \cos \gamma(x, y)),$$

където

$$\cos \alpha(x, y) = -\frac{f'_x(x, y)}{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2},$$

$$\cos \beta(x, y) = -\frac{f'_y(x, y)}{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2},$$

$$\cos \gamma(x, y) = -\frac{1}{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2}.$$

От двата възможни избора на единична нормала това е този, който сключва остър ъгъл с координатния вектор  $\vec{z}$ , т.е.  $\langle \vec{n}(P), \vec{z} \rangle > 0$ . Явно зададената повърхност винаги е ориентируема, като обикновено върху нея се взема ориентацията, породена от така взетата единична нормала.

Допирателната равнина към явно зададена повърхност в точката  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  се дава с уравнението

$$z = l(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0).$$

**Лице на повърхност.** При определяне на понятието “дължина на крива” ние използвахме вписани в кривата начупени линии. Логично е да се опита подобен подход и в двумерния случай, т.е. да се определи лицето на повърхността като граници на лицата вписаните в нея многостени, когато диаметърът на отделните стени клони към нула.

Оказва се обаче, че този подход не води към очаквания резултат. Дори за повърхност от най-прост вид, като например прав кръгов цилиндър, тази граница може да бъде произволно число (или безкрайност) в зависимост от избора на вписаните многостени (виж т.нар. “ботуш на Шварц”, зад. ??).

Тук ще дефинираме лице само за еднократно гладки регулярни повърхности, за които разполагаме с понятието “допирателна равнина”. Предварително ще отбележим, че в случай на равнина в  $\mathbb{R}^3$  ние можем да дефинираме мярката на Пеано-Жордан (т.е. лице) по същия начин, както това се прави в  $\mathbb{R}^2$  (виж част II, §2.1).

Нека  $S$  е компактно подмножество на еднократно гладката регулярна повърхност  $\tilde{S}$ . Под разбиване  $\tau$  на  $S$  ще разбираме представянето  $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ , където  $S_1, \dots, S_k$  са измерими множества с непресичащи се вътрешности. Да изберем във всяко от тях по една точка  $P_i \in S_i$ . Нека с  $T_i$  означим допирателната равнина към  $S$  в точката  $P_i$ , и нека  $\Pi_i$  е ортогоналната проекция на пространството  $\mathbb{R}^3$  върху  $T_i$ .

Идеята на дефиницията за лице е следната: лицето на проекцията  $\Pi_i(S_i)$  е близко до лицето на повърхността  $S_i$ , като колкото по-дребно е разбиването  $\tau$ , толкова тези лица ще бъдат по-близки. Обаче  $\Pi_i(S_i)$  е подмножество на равнината  $T_i$ , и ние знаем как да дефинираме неговото лице  $\mu(\Pi_i(S_i))$ . така стигаме до следната дефиниция:

**Дефиниция.** За всяко разбиване  $\tau$  на  $S$  да положим

$$R_\tau = \sum_{i=1}^k \mu(\Pi_i(S_i)).$$

Тогава под лице на  $S$  ще разбираме числото\*

$$\mu(S) = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau.$$

---

\* По-долу ще видим, че при направените предположения тази граница съществува.

Горната дефиниция не зависи от избора на атлас върху  $S$  и на ортогонална координатна система в  $\mathbb{R}^3$ . Лесно може да се докаже (няма да го правим тук), че така въведената мярка върху  $S$  притежава основното свойство на мярката – адитивност. Ще покажем как се пресмята тази мярка за параметрично представена повърхност.

**Теорема 6.** *Нека повърхността  $S$  притежава регулярното параметрично представяне*

$$P = P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

където  $D$  е компактно подмножество на  $\mathbb{R}^2$ . Тогава е валидна формулата

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \iint_D \left| \vec{N}(u, v) \right| du dv = \\ &= \iint_D \sqrt{\left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2} du dv. \end{aligned}$$

**Доказателство.** За  $Q = (u, v) \in D$  нормалата  $\vec{N}(Q)$  е непрекъснатата функция на точката  $Q$ . Следователно, за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta > 0$ , така че от  $|Q_2 - Q_1| < \delta$  да следва  $\left| \vec{N}(Q_2) - \vec{N}(Q_1) \right| < \varepsilon$ .

Нека  $\tau : D = \cup_{i=1}^k D_i$  е разбиване на множеството  $D$  на измерими множества с непресичащи се вътрешности, с диаметър, по-малък от  $\delta$ . Нека  $S = \cup_{i=1}^k S_i$  е съответното разбиване на повърхността  $S$ , където  $S_i = P(D_i)$ . Да изберем по една точка  $Q_i \in D_i$  и нека  $P_i = P(Q_i) \in S_i$  е съответната точка от  $S$ . Както по-горе,  $T_i$  означава допирателната равнина към  $S$  в точката  $P_i$ , а  $\Pi_i$  – ортогоналната проекция върху  $T_i$ .

**Лема.** *При горните предположения е изпълнено неравенството*

$$\left| \mu(\Pi_i(S_i)) - \left| \vec{N}(Q_i) \right| \mu(D_i) \right| < \varepsilon \cdot \mu(D_i).$$

**Доказателство на лемата.** Някоя от величините, участващи във формулата, не зависи от избора на координатната система в  $\mathbb{R}^3$ . Следователно можем да считаме, че точката  $P_i$  съвпада с началото на координатите, че осите  $O\vec{x}$  и  $O\vec{y}$  лежат в допирателната равнина  $T_i$ , и че оста  $O\vec{z}$  е еднопосочна с  $\vec{N}(Q_i)$ . В тези координати проекцията  $\Pi_i$  съвпада с координатната проекция върху равнината  $Oxy$ , а векторът  $\vec{N}(Q_i)$  има вида

$$\vec{N}(Q_i) = \left(0, 0, \left|\vec{N}(Q_i)\right|\right).$$

Прилагайки теоремата за смяна на променливите в двойни интеграли и теоремата за средните стойности, получаваме

$$\begin{aligned} \mu(\Pi_i(S_i)) &= \int \int_{\Pi_i(S_i)} dx dy = \iint_{D_i} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \right| dudv = \\ &= \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(\tilde{Q}_i) \right| \mu(D_i), \text{ където } \tilde{Q}_i \text{ е подходяща точка от } D_i. \end{aligned}$$

Числото  $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(\tilde{Q}_i)$  представлява  $z$ -координатата на вектора  $\vec{N}(\tilde{Q}_i)$ . За малки  $\varepsilon$  то е положително (тъй като е близко до  $\left|\vec{N}(Q_i)\right|$ ) и следователно модулът в горната формула може да бъде пропуснат.

Разликата между  $z$ -координатите на два вектора не надминава нормата на разликата на векторите. Прилагайки това към векторите  $\vec{N}(Q_i)$  и  $\vec{N}(\tilde{Q}_i)$ , получаваме

$$\left| \left|\vec{N}(Q_i)\right| - \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(\tilde{Q}_i) \right| \leq \left| \vec{N}(Q_i) - \vec{N}(\tilde{Q}_i) \right| < \varepsilon,$$

откъдето, след умножение с  $\mu(D_i)$ , веднага следва твърдението на лемата. ■

Ще довършим доказателството на теоремата. Да положим, както по-горе,

$$R_\tau = \sum_{i=1}^k \mu(\Pi_i(S_i)),$$

и нека

$$\tilde{R}_\tau = \sum_{i=1}^k \left| \vec{N}(Q_i) \right| \mu(D_i).$$

По лемата за всяко разбиване  $\tau$  с  $\text{diam } \tau < \delta$  имаме

$$\left| R_\tau - \tilde{R}_\tau \right| < \sum_{i=1}^k \varepsilon \mu(D_i) = \varepsilon \mu(D).$$

Това означава, че

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} (R_\tau - \tilde{R}_\tau) = 0.$$

Тъй като

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} \tilde{R}_\tau = \iint_D \left| \vec{N}(u, v) \right| du dv \quad \text{и} \quad \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau = \mu(S),$$

с това теоремата е доказана. ■

Ако  $S$  е компактно подмножество на някоя регулярна повърхност  $\tilde{S}$ , то ние можем да разбием  $S$  на краен брой компактни подмножества с непресичащи се вътрешности  $S_1, \dots, S_k$ , и да изчислим лицето на  $S$ , прилагайки формулата за всяка от тях и събирайки получените резултати.

**Случай на явно зададена повърхност.** В частност, за повърхност, явно зададена с уравнението

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

получаваме доказаната в предишните части формула

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} dx dy.$$

Имайки пред вид формулите за директорните косинуси на единичната нормала, тази формула може да се напише във вида

$$\mu(S) = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

В знаменателя се взема модулът на косинуса, за да се направи формулата независима от избора на единичната нормала.

**Детерминанта на Грам. Друго записване на формулата за лицето.** Ще започнем с една конструкция от линейната алгебра. Нека  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  са два вектора в  $\mathbb{R}^3$ .

**Дефиниция.** Под детерминанта на Грам на векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ще разбираме числото

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \end{vmatrix}.$$

**Теорема 7.** *Изпълнени са равенствата*

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}).$$

**Доказателство.** Първото равенство следва от дефиницията на векторно произведение. Второто равенство следва от геометричната дефиниция на векторното и скаларното произведение: ако означим с  $\alpha$  ъгъла между векторите  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , имаме  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$  и  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ . От втората формула получаваме

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2. \blacksquare$$

Нека  $S$  е параметрично зададена повърхност. Производните на параметричното представяне  $P = P(u, v)$  са параметричните допирателни вектори  $\vec{P}'_u(u, v)$ ,  $\vec{P}'_v(u, v)$ . Да въведем означенията\*

$$E(u, v) = \langle \vec{P}'_u(u, v), \vec{P}'_u(u, v) \rangle = |\vec{P}'_u(u, v)|^2, \quad F(u, v) = \langle \vec{P}'_u(u, v), \vec{P}'_v(u, v) \rangle,$$

\*Тези функции се наричат коэффициенти на Гаус на повърхността.

$$G(u, v) = \left\langle \vec{P}'_v(u, v), \vec{P}'_v(u, v) \right\rangle = \left| \vec{P}'_v(u, v) \right|^2.$$

За детерминантата на Грам на векторите  $\vec{P}'_u(u, v)$ ,  $\vec{P}'_v(u, v)$  получаваме

$$\Gamma \left( \vec{P}'_u(u, v), \vec{P}'_v(u, v) \right) = E(u, v).G(u, v) - F(u, v)^2.$$

Използвайки теорема 7, ще напишем по друг начин формулата за лице на повърхност от теорема 6:

**Следствие 8.** *При предположенията на теорема 6 е валидна формулата*

$$\mu(S) = \iint_D \sqrt{E(u, v).G(u, v) - F(u, v)^2} \, dudv.$$

Най-често пресмятанията по тази формула са по-леки, отколкото по дадената в теорема 6.

**Пример.** Да разгледаме сфера с център в началото и радиус  $R$ , параметризирана с полярните ъгли  $\theta$  и  $\varphi$  по формулите

$$x = R \cos \theta \sin \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \varphi.$$

Лесно се пресмята, че в този случай

$$E(\theta, \varphi) = R^2, \quad G(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \varphi, \quad F(\theta, \varphi) = 0$$

(последното равенство следва от факта, че меридианите и паралелите са перпендикулярни помежду си). Оттук  $\sqrt{EG - f^2} = R^2 \sin \varphi$ .

Ако  $K$  е затворено подмножество на правоъгълника  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , и  $S_K$  е частта от сферата, отговаряща на стойности на параметрите  $(\theta, \varphi) \in K$ , то за нейното лице получаваме формулата

$$\mu(S_K) = R^2 \iint_K \sin \varphi \, d\theta d\varphi.$$

**Лице на ротационна повърхност.** В §2.7 на част II беше изведена на базата на интуитивни съображения формула за лице на ротационна повърхност. Тук ще изведем същата формула чрез използване на дадените дефиниции.

Нека повърхността  $S_f$  е получена чрез въртене около оста  $x$  на графиката на еднократно гладката функция  $f(x)$ , дефинирана в интервала  $[a, b]$ . Тази повърхност може да се параметризира, като за един от параметрите се приеме координатата  $x$ , а за втори – ъгъла на въртене  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Получаваме параметричните уравнения

$$x = x, \quad y = f(x) \cos \theta, \quad z = f(x) \sin \theta, \quad x \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Лесно се пресмята, че

$$P'_x(x, \theta) = (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta),$$

$$P'_\theta(x, \theta) = (0, -f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta).$$

Оттук получаваме

$$E(x, \theta) = 1 + f'(x)^2, \quad F(x, \theta) = 0, \quad G(x, \theta) = f(x)^2$$

и следователно

$$\begin{aligned} \mu(S_f) &= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx d\theta = \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

### Упражнения.

**1.** Нека повърхността  $S$  се представя с уравнението  $F(x, y, z) = 0$ , като  $\overrightarrow{\text{град}} F(P) \neq \vec{0}$ . Докажете, че допирателното пространство  $T_P S$  в точката  $P$  съвпада с ортогоналното допълнение към вектора  $\overrightarrow{\text{град}} F(P)$ .

**Упътване.** Нека  $P = P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  е регулярна параметризация на  $S$ . Диференцирайки тъждеството

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \equiv 0,$$

покажете, че

$$F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u \equiv 0, \quad F'_x x'_v + F'_y y'_v + F'_z z'_v \equiv 0,$$



и следователно

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} F(P), P'_u \rangle \equiv 0, \quad \langle \overrightarrow{\text{grad}} F(P), P'_v \rangle \equiv 0.$$

Докажете, че от тук следва твърдението на задачата.

**2.** Нека в условията на предната задача  $S$  е компактна повърхност, проекцията ѝ върху равнината  $Oxy$  е еднозначно изображение,  $D$  е образът на  $S$  при тази проекция, и  $F'_z \neq 0$ . Нека  $z = f(x, y)$  е неявната функция, определена върху  $D$  от уравнението  $F(x, y, z) = 0$ . Докажете, че

$$\mu(S) = \iint_D \frac{|\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y, f(x, y))|}{|F'_z(x, y, f(x, y))|} dx dy.$$

**2.** Нека  $S$  е регулярна повърхност и  $\Gamma$  е регулярна крива, разположена върху  $S$ . Докажете, че за всяка точка  $P \in \Gamma$  допирателният вектор  $\vec{l}(P)$  към  $\Gamma$  в точката  $P$  принадлежи на допирателното пространство  $T_P S$ .

**Упътване.** Нека  $\vec{P} = \vec{P}(u, v)$  е регулярна параметризация на  $S$ . Разсъждавайки както в теорема 1, покажете, че (локално) съществуват гладки функции  $u(t), v(t)$  такива, че

$$\vec{Q}(t) = \vec{P}(u(t), v(t))$$

е параметризация на кривата  $\Gamma$ . Диференцирайки, получаваме, че допирателният вектор  $\vec{l}(P(t)) = \vec{Q}'(t)$  към  $\Gamma$  се дава с формулата

$$\vec{Q}'(t) = u'(t) \cdot \vec{P}'_u(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \vec{P}'_v(u(t), v(t)),$$

т.е. векторът  $\vec{Q}'(t)$  е линейна комбинация на векторите  $\vec{P}'_u(u(t), v(t))$  и  $\vec{P}'_v(u(t), v(t))$ .

**3.** Докажете, че допирателното пространство  $T_P S$  към  $S$  в точката  $P$  се състои от допирателните вектори в тази точка към всички регулярни криви върху  $S$ , минаващи през нея.

**4.** Нека  $\vec{P} = \vec{P}(u, v)$  е регулярно параметрично представяне на повърхността  $S$ , и  $\Gamma$  е крива върху  $S$  с параметрично представяне

$$\vec{Q}(t) = \vec{P}(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b].$$

Докажете, че дължината  $l(\Gamma)$  се дава с формулата

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{E \cdot (u'(t))^2 + F \cdot u'(t)v'(t) + G \cdot (v'(t))^2} dt.$$

където  $E = E(u(t), v(t))$  и т.н.

**Упътване.** Използвайте израза за допирателния вектор към  $\Gamma$ , получен в зад. 2.

**5. (Повърхност в сферични координати.)** В пространството  $\mathbb{R}^3$  ще въведем т.нар. сферични координати  $(\rho, \theta, \varphi)$ , свързани с декартовите координати чрез формулите

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi]$$

(виж §1.9 от част II).

Нека повърхността  $S$  се задава с уравнението

$$\rho = \rho(\theta, \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in K.$$

Докажете, че коефициентите на Гаус се задават с формулите

$$E(\theta, \varphi) = (\rho'_\varphi)^2 + \rho^2, \quad F(\theta, \varphi) = \rho'_\varphi \cdot \rho'_\theta, \quad G(\theta, \varphi) = (\rho'_\theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

и

$$\mu(S) = \iint_K \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + (\rho'_\varphi)^2 \sin^2 \varphi + (\rho'_\theta)^2} \cdot \rho \, d\theta d\varphi.$$

**6.** Нека  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$  са вектори с координати

$$\vec{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n}), \quad i = 1, \dots, n,$$

и  $A$  е матрицата, съставена от тези вектори:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Докажете, че обемът  $\mu(\Pi)$  на паралелепипеда  $\Pi$ , построен върху векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , се дава с формулата

$$\mu(\Pi) = |\det A|.$$

**Упътване.** Разгледайте  $A$  като линейно изображение на  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ . Тогава  $\Pi$  се оказва образ на куба  $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ . Използвайте формулата за отношение на обемите при линейни преобразования – виж част II, §2.6, лема 1.

**7.** Нека в условията на горната задача  $B$  е матрицата, съставена от скаларните произведения на векторите  $\vec{a}_i$ :

$$B = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_n \rangle \\ \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \vec{a}_n, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Докажете, че

$$\det B = (\det A)^2,$$

и следователно

$$\mu(\Pi) = \sqrt{\det B}.$$

**Упътване.** Докажете, че  $B = A \circ A^T$ , където  $A^T$  е транспонираната матрица на  $A$ .

**7. Детерминанта на Грам в общия случай.** Нека  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$  са  $k$  на брой  $n$ -мерни вектори, като сега  $k \leq n$ . Под детерминанта на Грам на тези вектори ще разбираме детерминантата на матрицата  $B$  от предната задача:

$$\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \det \{ \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle \}_{i,j=1,\dots,k}.$$

Нека  $\Pi$  е  $k$ -мерният паралелепипед, построен върху векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ . Докажете, че  $k$ -мерният обем на  $\Pi$  се дава с формулата

$$\mu(\Pi) = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)}.$$

**Следствие.** Детерминантата на Грам на система от вектори винаги е неотрицателна. Тя е равна на нула точно тогава, когато векторите са линейно зависими.

**Упътване.** Нека с  $\mathbb{R}^k$  означим  $k$ -мерното подпространство на  $\mathbb{R}^n$ , породено от векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ , с произволна ортогонална координатна система в него. За векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^k$  използвайте резултата на зад. 3.

**8.** Нека  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$  са както в предната задача, с координати  $\vec{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ . За всеки  $k$  на брой индекса  $i_1, \dots, i_k$ , такива, че  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  да означим с  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}$  детерминантата

$$\Delta_{i_1, \dots, i_k} = \begin{vmatrix} a_{1, i_1} & a_{1, i_2} & \cdots & a_{1, i_k} \\ a_{2, i_1} & a_{2, i_2} & \cdots & a_{2, i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k, i_1} & a_{k, i_2} & \cdots & a_{k, i_k} \end{vmatrix}.$$

Докажете следното обобщение на теорема 7:

$$\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (\Delta_{i_1, \dots, i_k})^2.$$

**Забележка.** Като вземем пред вид предните задачи, можем да изкажем това твърдение така:

*Квадратът на обема на  $k$ -мерния паралелепипед е равен на сумата от квадратите на обемите на всички неговии координатни  $k$ -мерни проекции.*

По тази причина горната формула понякога се нарича *питагорова теорема за обемите*.

**Упътване.** Както често се случва в математиката, по-лесно е да докажем следното по-общо твърдение:

**8'.** Нека  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  и  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$  са две системи от  $n$ -мерни вектори. Да означим

$$\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k) = \det \left\{ \langle \vec{a}_i, \vec{b}_j \rangle \right\}_{i, j=1, \dots, k}.$$

Нека  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}$  са както по-горе, а  $\tilde{\Delta}_{i_1, \dots, i_k}$  са съответните детерминанти за векторите  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ . Докажете равенството

$$\Gamma(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k; \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Delta_{i_1, \dots, i_k} \tilde{\Delta}_{i_1, \dots, i_k}.$$

Очевидно твърдението на задача 8 се получава от задача 8', когато  $\vec{a}_1 = \vec{b}_1, \dots, \vec{a}_k = \vec{b}_k$ .

**Упътване към задача 8'.** За разлика от равенството от зад. 8, в последното равенство и двете страни зависят *линейно* от всеки от векторите  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ . Следователно, достатъчно е да се докаже равенството в случая, когато всеки един от горните вектори съвпада с някой от координатните вектори  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  в  $\mathbb{R}^n$ . С други думи, можем да считаме, че  $\vec{a}_1 = \vec{e}_{p_1}, \dots, \vec{a}_k = \vec{e}_{p_k}$  и  $\vec{b}_1 = \vec{e}_{q_1}, \dots, \vec{b}_k = \vec{e}_{q_k}$ .

1/ Нека индексите  $p_1, \dots, p_k$  са различни два по два, и  $q_1 = p_1, \dots, q_k = p_k$ . Докажете, че в този случай и двете страни на равенството са равни на единица.

2/ Нека отново индексите  $p_1, \dots, p_k$  са различни, а индексите  $q_1, \dots, q_k$  са някаква тяхна пермутация. Докажете, че и двете страни на равенството са равни на  $(-1)^\varepsilon$ , където  $\varepsilon$  е четността на въпросната пермутация.

3/ Докажете, че във всички останали случаи и двете страни са равни на нула.

**9.** Нека  $S$  е компактна част от ориентирана повърхност в  $\mathbb{R}^3$ . За всяка точка  $P \in S$  да нанесем отсечка с дължина  $\varepsilon$  от точката  $P$  по нормалата  $\vec{n}(P)$ , и нека  $V_\varepsilon$  е обединението на всички такива отсечки. Докажете, че

$$\mu(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mu(V_\varepsilon).$$

(Сравни със задача 1 от §1.1, съдържаща аналогично твърдение за крива в равнината.)

**Упътване.** Ще разсъждаваме аналогично на споменатата задача. Нека  $P = P(u, v)$ ,  $(u, v) \in K \subset \mathbb{R}^2$  е регулярно параметрично представяне на  $S$ . Да означим  $K_\varepsilon = K \times [0, \varepsilon]$ , и нека изображението  $\vec{Q}(u, v, t) : K_\varepsilon \rightarrow V_\varepsilon$  се дава, във векторен запис, с формулата

$$\vec{Q}(u, v, t) = \vec{P}(u, v) + t \cdot \vec{n}(u, v),$$

където  $\vec{n}(u, v)$  е единичната нормала в точката  $\vec{P}(u, v)$ . Матричната производна  $D\vec{Q}$  на изображението  $\vec{Q}$  представлява  $3 \times 3$ -матрица с редове  $\vec{Q}'_u = \vec{P}'_u + t\vec{n}'_u$ ,  $\vec{Q}'_v = \vec{P}'_v + t\vec{n}'_v$ ,  $\vec{Q}'_t = \vec{n}$ . От резултата на задача 3 получаваме за якобиана  $J_{\vec{Q}}$  формулата

$$|J_{\vec{Q}}| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{Q}'_u, \vec{Q}'_u \rangle & \langle \vec{Q}'_u, \vec{Q}'_v \rangle & \langle \vec{Q}'_u, \vec{n} \rangle \\ \langle \vec{Q}'_v, \vec{Q}'_u \rangle & \langle \vec{Q}'_v, \vec{Q}'_v \rangle & \langle \vec{Q}'_v, \vec{n} \rangle \\ \langle \vec{n}, \vec{Q}'_u \rangle & \langle \vec{n}, \vec{Q}'_v \rangle & \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \end{vmatrix}}.$$

От дефиницията на нормала следва, че  $\langle \vec{P}'_u, \vec{n} \rangle = 0$ . Диференцирайки твърдеството  $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$  по  $u$ , получаваме  $\langle \vec{n}'_u, \vec{n} \rangle = 0$ , и следователно  $\langle \vec{Q}'_u, \vec{n} \rangle = 0$ . Аналогично се вижда, че  $\langle \vec{Q}'_v, \vec{n} \rangle = 0$ . Следователно

$$|J_{\vec{Q}}(u, v, t)| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{P}'_u + t\vec{n}'_u, \vec{P}'_u + t\vec{n}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_u + t\vec{n}'_u, \vec{P}'_v + t\vec{n}'_v \rangle \\ \langle \vec{P}'_v + t\vec{n}'_v, \vec{P}'_u + t\vec{n}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_v + t\vec{n}'_v, \vec{P}'_v + t\vec{n}'_v \rangle \end{vmatrix}}.$$

По теоремата за смяна на променливите получаваме

$$\begin{aligned} \mu(V_\varepsilon) &= \iiint_{V_\varepsilon} 1 \, dx dy dz = \iiint_{K_\varepsilon} |J_{\vec{Q}}(u, v, t)| \, dudvdt = \\ &= \iint_K \left( \int_0^\varepsilon |J_{\vec{Q}}(u, v, t)| \, dt \right) dudv. \end{aligned}$$

Тъй като

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |J_{\vec{Q}}(u, v, t)| \, dt = |J_{\vec{Q}}(u, v, 0)| = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{P}'_u, \vec{P}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_u, \vec{P}'_v \rangle \\ \langle \vec{P}'_v, \vec{P}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_v, \vec{P}'_v \rangle \end{vmatrix}},$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mu(V_\varepsilon) = \iint_K \sqrt{\begin{vmatrix} \langle \vec{P}'_u, \vec{P}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_u, \vec{P}'_v \rangle \\ \langle \vec{P}'_v, \vec{P}'_u \rangle & \langle \vec{P}'_v, \vec{P}'_v \rangle \end{vmatrix}} \, dudv = \mu(S).$$

## 2.2 Повърхнинен интеграл от първи вид

Повърхнинният интеграл от първи вид, който сега ще разгледаме, до голяма степен повтаря свойствата на криволинейния интеграл от първи вид, въведен в §1.2, и по тази причина тук ще излагаме нещата по-накратко.

**Физическо обосноваване: маса на материална повърхност.**

Ще разгледаме механичната задача за маса на материална повърхност. По-точно, нека  $S$  е еднократно гладка компактна повърхност в  $\mathbb{R}^3$ , и  $f(P)$  е неотрицателна функция върху  $S$ , играеща ролята на *повърхностна плътност*. Тази плътност изразява отношението на масата на част от повърхността към нейното лице: ако  $\Delta S$  е малка част от повърхността  $S$ , съдържаща точката  $P$ , то

$$f(P) \approx \frac{m(\Delta S)}{\mu(\Delta S)}.$$

Да се опитаме сега да пресметнем масата на цялата повърхност. Нека

$$\tau : S = \bigcup_{i=1}^n S_i$$

е разбиване на  $S$  на краен брой непресичащи се измерими подмножества с непресичащи се вътрешности. Да изберем по една точка  $Q_i \in S_i$ . Тъй като  $f(Q_i) \approx \frac{m(S_i)}{\mu(S_i)}$ , получаваме за масата  $m(S)$  приблизителния израз

$$m(S) = \sum_{i=1}^n m(S_i) \approx \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \mu(S_i).$$

Ясно е, че колкото по-ситно е разбиването  $\tau$ , толкова по-точна е горната формула, и затова е естествено да получим масата на материалната повърхност като граница на израза отдясно при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ .

**Дефиниция и пресмятане на повърхнинният интеграл от I вид.** Сега можем да преминем към дефиницията на повърхнинен интеграл от първи вид. Фактически ние възпроизвеждаме, с известни изменения, понятията, използвани в общата дефиниция на двоен риманов интеграл в част II:

**Дефиниция.** Нека  $S$  е компактна еднократно гладка регулярна повърхност. Ще казваме, че  $\tau$  е разбиване на  $S$ , ако  $S$  е представена като обединение на краен брой непресичащи се измерими подмножества  $S_i$  с непресичащи се вътрешности, и е избрана по една точка  $Q_i \in S_i$ . Диаметър на разбиването  $\tau$  ще наричаме израза

$$\text{diam } \tau = \max_{i=1, \dots, n} \text{diam } S_i.$$

**Дефиниция.** Нека  $\tau$  е разбиване на компактна еднократно гладка регулярна повърхност  $S$ , и  $f(P)$  е функция, дефинирана върху  $S$ . Под риманова сума за  $f$ , съответстваща на разбиването  $\tau$ , разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \mu(S_i).$$

Ще отбележим, че дефиницията на разбиване, а следователно и следващата дефиниция, не зависят от ориентацията (и даже от ориентируемостта) на  $S$ .

**Дефиниция.** Нека  $S$  е компактна еднократно гладка регулярна повърхност, и  $f(P)$  е функция върху  $S$ . Под повърхнинен интеграл от първи вид от функцията  $f$  върху повърхността  $S$  ще разбираме числото

$$\iint_S f(P) d\sigma = \lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau(f).$$

Ще казваме, че  $f(P)$  е интегруема върху  $S$ , ако горната граница съществува.

Във всички важни за нас случаи горната граница съществува, както се вижда от следното твърдение:

**Теорема 1.** Нека  $S$  е компактна еднократно гладка регулярна повърхност, зададена с параметричните уравнения

$$\vec{P} = \vec{P}(u, v) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$



Нека  $f(P)$  е непрекъсната функция върху  $S$ . Тогава  $f(P)$  е интегрируема върху  $S$ , и е валидна формулата

$$\iint_{\S} f(P) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \vec{N}(u, v) \right| dudv.$$

Ще напомним, че  $\left| \vec{N}(u, v) \right|$  означава дължината на нормалния вектор  $\vec{N}(u, v)$ , въведен в предния параграф, и се дава с формулата

$$\begin{aligned} \left| \vec{N}(u, v) \right| &= \sqrt{\left( \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \right)^2} = \\ &= \sqrt{E(u, v).G(u, v) - F(u, v)^2}. \end{aligned}$$

Формално, можем да запомним равенството

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v).G(u, v) - F(u, v)^2} dudv.$$

**Доказателство.** Нека  $\tau : S = \cup_{i=1}^n S_i$  е разбиване на  $S$ ,  $D = \cup_{i=1}^n D_i$  е съответното разбиване на  $D$ . Използвайки формулата за лице на повърхност и теоремата за средните стойности за двойните интеграли, получаваме

$$\mu(S_i) = \iint_{D_i} \left| \vec{N}(u, v) \right| dudv = \left| \vec{N}(\tilde{Q}_i) \right| \mu(D_i),$$

където  $\tilde{Q}_i$  е подходяща точка от множеството  $D_i$ .

Тогава

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \mu(S_i) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \left| \vec{N}(\tilde{Q}_i) \right| \mu(D_i).$$

И тук сме в ситуация, подобна на срещнатата в доказателството на теорема 7 от §1.1: изразът вдясно наподобява риманова сума за интересувания ни двоен интеграл, обаче в него фигурират две различни "междинни" точки  $Q_i, \tilde{Q}_i \in D_i$ . Да образуваме друг израз:

$$\tilde{R}_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \cdot \mu(S_i) = \sum_{i=1}^n f(Q_i) \left| \vec{N}(Q_i) \right| \mu(D_i).$$

Тогава  $\tilde{R}_\tau(f)$  е риманова сума, и при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$  клони към търсения интеграл  $\iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \vec{N}(u, v) \right| dudv$ .

Остава да докажем, че  $R_\tau(f) - \tilde{R}_\tau(f) \rightarrow 0$  при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Аналогично доказателство е правено по-горе, и ние няма да го извършваме тук (виж лема 8 от §1,1). ■

**Свойства на повърхнинния интеграл от първи вид.** Свойствата, които обикновено се използват, изцяло съвпадат със съответните свойства на римановия интеграл (едномерен и многомерен), и на криволинейния интеграл от първи вид. Тук ще ги дадем накратко.

**Свойство 1 (Линейност).**

$$\iint_S (f(P) + g(P)) d\sigma = \iint_S f(P) d\sigma + \iint_S g(P) d\sigma, \quad \iint_S \lambda f(P) d\sigma = \lambda \iint_S f(P) d\sigma.$$

**Свойство 2 (Позитивност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq 0, \text{ то } \iint_S f(P) d\sigma \geq 0.$$

**Свойство 3 (Монотонност).**

$$\text{Ако } f(P) \geq g(P), \text{ то } \iint_S f(P) d\sigma \geq \iint_S g(P) d\sigma.$$

(с други думи, и тук неравенствата може да се интегрират).

**Свойство 4.**

$$\left| \iint_S f(P) d\sigma \right| \leq \iint_S |f(P)| d\sigma.$$

**Свойство 5.**

$$\iint_S 1 d\sigma = ().$$

**Свойство 6. (Теорема за средните стойности).** Съществува точка  $P_0 \in S$  такава, че

$$\iint_S f(P) d\sigma = f(P_0) \mu(S)$$

(Числото  $f(P_0)$  се нарича *средна стойност* на функцията  $f$  върху  $S$ ).

**Свойство 7. (Адитивност).** Нека компактната повърхност  $S$  е представена като обединение на две свои части  $S_1, S_2$  с непресичащи се вътрешности, и нека  $f(P)$  е непрекъснатата функция върху  $S$ . Тогава

$$\iint_S f(P) d\sigma = \iint_{S_1} f(P) d\sigma + \iint_{S_2} f(P) d\sigma.$$

Твърдението се доказва лесно, като се разгледат разбивания на  $S$ , породени от разбивания на  $S_1$  и  $S_2$ .

### Приложения на повърхнинния интеграл от първи вид.

**1. Маса и център на тежестта на материална повърхност.** Нека  $S$  е материална повърхност с функция на плътността  $\varrho(P)$ . Както видахме в началото на параграфа, масата на  $S$  се дава с формулата:

$$m(S) = \iint_S \varrho(P) d\sigma.$$

Аналогично на направеното в §1.1 се извеждат и формулите за център на тежестта на материална повърхност. Нека  $S = \cup_{i=1}^n S_i$  е разбиване на  $S$  на измерими подмножества и  $P_i \in S_i$ . Тогава

$$m(S_i) \approx \varrho(P_i) \mu(S_i)$$

и за центъра на тежестта  $P_* = (x_*, y_*, z_*)$  на  $S$  имаме

$$P_* \approx \frac{1}{m(S)} \sum_{i=1}^n \varrho(P_i) \mu(S_i).$$

След граничен преход получаваме формулите

$$x_* = \frac{1}{m(S)} \iint_S x(P) \varrho(P) d\sigma, \dots$$

**Пример.** Нека  $S_R^+$  е горната полусфера на сфера с център в началото и радиус  $R$ . Ще намерим нейния център на тежестта, използвайки сферичните координати. Очевидно  $x_* = y_* = 0$ . Ще намерим  $z_*$ . Както видяхме в предния параграф, имаме

$$\left| \vec{N}(\theta, \varphi) \right| = \sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi,$$

и следователно

$$z_* = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \cos \varphi \cdot R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \frac{R}{2}.$$

## 2. Гравитационен потенциал на материална повърхност.

Нека имаме маса  $m_0$ , разположена в точката  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ . Ако  $\vec{F}(P)$  е гравитационното поле в пространството, породено от тази маса, то  $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P)$ , където функцията

$$\Phi(P) = \frac{m_0}{\left| \vec{P}_0 P \right|}$$

се нарича гравитационен потенциал на материалната точка  $P_0$  (виж част II, §1.5, зад. 2 – тук изпускаме гравитационната константа). Ако  $S$  е материална повърхност, то по съображения като изложените по-горе получаваме за нейния гравитационен потенциал  $\Phi_S(Q)$  формулата

$$\Phi_S(Q) = \iint_S \frac{\varrho(P)}{\left| \vec{P} Q \right|} d\sigma,$$

а породеното от нея гравитационно поле съвпада с градиента на  $\Phi_S(Q)$ .

**Пример.** (Потенциал на хомогенна сфера). Нека  $S$  е сфера с радиус  $R$ , и  $\varrho(P) \equiv 1$ . При пресмятане на потенциала в дадена точка  $P$

можем да считаме, че тя лежи на оста  $z$ , т.е. че  $Q = (0, 0, a)$ ,  $a = |Q|$ . Нека  $P$  е точка със сферични координати  $(R, \theta, \varphi)$ . Тогава

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\varphi}.$$

За потенциала получаваме

$$\begin{aligned} \Phi_S(Q) &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \frac{\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{\pi R}{a} \int_0^\pi \frac{d(R^2 + a^2 - 2Racos\varphi)}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\varphi}} = \frac{2\pi R}{a} \sqrt{R^2 + a^2 - 2Racos\varphi} \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{2\pi R}{a} ((R+a) - |R-a|). \end{aligned}$$

Оттук получаваме, че ако  $a > R$ , т.е. ако точката  $Q$  лежи извън сферата  $S$ , то

$$\Phi_S(Q) = \frac{4\pi R^2}{a},$$

което означава, че потенциалът няма да се измени, ако съсредоточим цялата маса на сферата в нейния център.

Ако обаче  $a < R$  и следователно точката е във вътрешността на сферата, то

$$\Phi_S(Q) = 4\pi R,$$

т.е. потенциалът е константа и не зависи от положението на точката  $Q$ . За силата на привличане получаваме

$$\vec{F}_S(Q) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_S(Q) = \vec{0},$$

и следователно всяко тяло вътре в материалната сфера се намира в състояние на безтегловност – сензационен за времето си резултат на Нютон. (В зад. 9 на §2.7 от част II аналогичен резултат беше доказан за гравитационния потенциал на еднородно тяло, ограничено от две концентрични сфери.)

**3. Интеграл на Гаус в пространството.** В параграфите 1.2 и 1.5 ние разгледахме задачата за ъгъла, под който се вижда от началото на координатите дадена, не минаваща през него, крива.

Тук ще разгледаме аналогичната задача за пространствения ъгъл, под който се вижда от началото дадена повърхност в  $\mathbb{R}^3$ .

**Дефиниция.** Нека е даден конус в  $\mathbb{R}^3$  с връх в началото. Под пространствен ъгъл на този конус разбираме мярката на множеството, което той изрязва от единичната сфера с център в началото.

Тази дефиниция е аналогична на обичайната дефиниция на ъгъл в равнината. Наистина, мярката в радиани на ъгъл в равнината е равна дължината на дъгата, която той отсича от единичната окръжност. Пространственият ъгъл се измерва в *стереорадиани*, като мярката на пълния ъгъл (т.е. когато конусът съвпада с цялото пространство) е равна на  $4\pi$ .

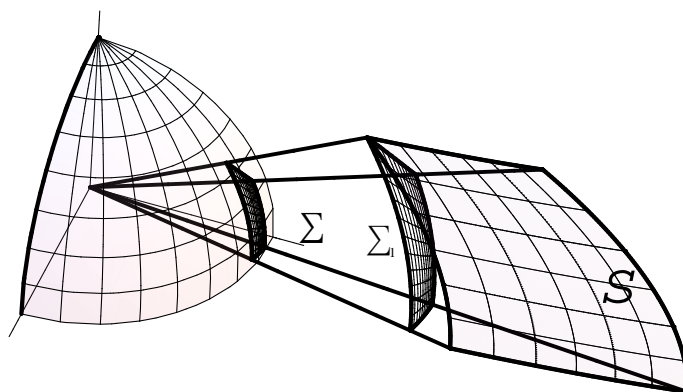
И тук, както при кривите, е необходимо разглежданата повърхнина да бъде ориентирана, т.е. върху нея да бъде избран непрекъснат клон на единичната нормала.

Нека  $S$  е малка част от дадена повърхнина и  $K_S$  е породеният от нея конус, т.е. множеството от всички лъчи в  $\mathbb{R}^3$ , започващи в началото и минаващи през точка от  $S$ . Да означим със  $\Sigma_S$  сечението на  $K_S$  с единичната сфера.

За да намерим интересуващото ни лице на  $\Sigma_S$ , нека фиксираме точка  $P \in S$ , и нека  $S_P$  е сферата с център в началото, минаваща през точката  $P$ , т.е. с радиус  $|P|$ . Нека  $\Sigma_1$  е сечението на  $K_S$  със  $S_P$ . Да си мислим за момент, че  $S$  е част от равнина. Тогава  $\Sigma_1$  е близко до проекцията на  $S$  върху допирателната равнина на  $S_P$ , т.е. върху равнината, перпендикулярна на радиус-вектора  $\vec{P}$ .

Знаем, че при проектиране лицето на проекцията е равно на лицето на първоначалната фигура, умножено с косинуса на ъгъла между равнините. Ъгълът между две равнини е равен на ъгъла между техните нормали. В случая това са нормалата  $\vec{n}(P)$  към  $S$  в точката  $P$ , и нормалата към  $S_P$  в тази точка, която съвпада с радиус-вектора  $\vec{P}$ . Получихме израза

$$\mu(\Sigma_1) \approx \cos \angle(\vec{n}(P), \vec{P}) \mu(S).$$



Ъгъл, под който се вижда повърхността.

Фигурата  $\Sigma_S$  се получава от  $\Sigma_1$  чрез хомотетия с коефициент  $1/|\vec{P}|$ . Тъй като при хомотетия лицата се умножават с квадрата на коефициента, в крайна сметка получаваме

$$\mu(\Sigma) \approx \frac{\cos \angle (\vec{n}(P), \vec{P})}{|\vec{P}|^2} \mu(S).$$

Нека сега  $S$  е произволна ориентирана повърхнина, не минаваща през началото. Нека  $\tau : S = \cup_{i=1}^n S_i$  е нейно разбиване и  $P_i \in S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Нека  $\Sigma$  е сечението на породения от  $S$  конус с единичната сфера, и  $\Sigma_i$  са съответните множества за  $S_i$ . Имаме

$$\mu(\Sigma_S) \approx \sum_{i=1}^n \mu(\Sigma_i) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\cos \angle (\vec{n}(P_i), \vec{P}_i)}{|\vec{P}_i|^2} \mu(S_i).$$

Ще отбележим, че тези части на повърхността, в които нормалата съдържа остър ъгъл с радиус-вектора на точката, дават събираеми с положителен знак, а тези, в които ъгълът е тъп – отрицателен.

Както обикновено, колкото по-ситно е разбиването  $\tau$ , толкова по-малка е грешката, и точната формула се получава при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Припомняйки си дефиницията на повърхнинен интеграл от първи вид, получаваме за пространствения ъгъл формулата

$$\mu(\Sigma_S) = \iint_S \frac{\cos \angle(\vec{n}(P), \vec{P})}{|\vec{P}|^2} d\sigma.$$

**Пример.** Нека  $S_R$  е сферата с център в началото и радиус  $R$ , ориентирана чрез външната нормала. Тогава подинтегралната функция навсякъде е равна на  $1/R^2$ , и от горната формула получаваме, че  $\mu(\Sigma_S) = 4\pi$ .



## 2.3 Повърхнинен интеграл от втори вид

**Физическо обосноваване: поток на течност през повърхност.**

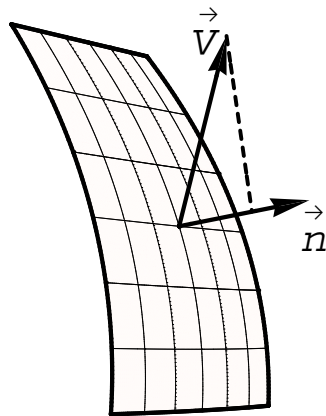
В точка 5 от §1.2 ние разгледахме задачата за поток на течност през крива линия в равнината. Тук ще разгледаме аналогичната задача в пространството. Нека

$$\vec{V}(P) = (A(P), B(P), C(P))$$

е векторно поле в  $\mathbb{R}^3$ , разглеждано като поле от скоростите на стационарно течение на течност\*. Нека  $S$  е ориентирана регулярна повърхност в  $\mathbb{R}^3$ , и

$$\vec{n}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P), \cos \gamma(P))$$

е съответния клон на единичната нормала към  $S$ .



Поток на течност през повърхност.

---

\*Тук предполагаме, че течността е с постоянна плътност, не зависи от времето и от точката.

Нека  $\Delta S$  е малка част от  $S$  и  $P \in \Delta S$ . Можем да заменим  $\Delta S$  с проекцията ѝ върху допирателната равнина в точката  $P$ , и да считаме, че върху  $\Delta S$  полето на скоростите е постоянно и равно на  $\vec{V}(P)$ . Очевидно количеството течност  $\Delta U$ , преминаващо за единица време през  $\Delta S$ , е равно на произведението на лицето на  $\Delta S$  с нормалната компонента на скоростта  $V_{\vec{n}}$ , т.е. с проекцията на  $\vec{V}(P)$  върху нормалата  $\vec{n}(P)$ . Получаваме

$$\begin{aligned} \Delta U &\approx \left| \vec{V}(P) \right| \cos \alpha \left( \vec{V}(P), \vec{n}(P) \right) \mu(\Delta S) = \left\langle \vec{V}(P), \vec{n}(P) \right\rangle \mu(\Delta S) = \\ &= (A(P) \cos \alpha(P) + B(P) \cos \beta(P) + C(P) \cos \gamma(P)) \mu(\Delta S). \end{aligned}$$

Нека сега  $S = \cup S_i$  е измеримо разбиване на  $S$  и  $P_i \in S_i, i = 1, \dots, n$ . Тогава за общото количество  $U$  на преминаващата за единица време течност получаваме

$$U = \sum_{i=1}^n \Delta U_i = \sum_{i=1}^n \left\langle \vec{V}(P_i), \vec{n}(P_i) \right\rangle \mu(S_i).$$

След граничен преход получаваме формулата

$$\begin{aligned} U &= \iint_S \left\langle \vec{V}(P), \vec{n}(P) \right\rangle d\sigma = \\ &= \iint_S (A(P) \cos \alpha(P) + B(P) \cos \beta(P) + C(P) \cos \gamma(P)) d\sigma. \end{aligned}$$

Тази формула подсказва дадената по-долу дефиниция:

**Дефиниция на повърхнинен интеграл от втори вид.** Нека  $S$  е ориентирана регулярна повърхност в  $\mathbb{R}^3$  с единична нормала  $\vec{n}(P) = (\cos \alpha(P), \cos \beta(P), \cos \gamma(P))$  и  $A(P), B(P), C(P)$  са непрекъснати функции, дефинирани в околност  $U$  на  $S$ . Да разгледаме формалния (засега) израз

$$\omega = A(P) dydz + B(P) dzdx + C(P) dxdy.$$

Израз от горния вид ще наричаме диференциална форма от втори ред (или съкратено 2-форма) в  $U$ . Множеството от всички диференциални форми от втори ред в  $U$  се бележи с  $\Omega^2(U)$ . То представлява линейно пространство, т.е. в него са дефинирани операциите "сума на два елемента" и "произведение на елемент с число".

**Дефиниция.** Под повърхнинен интеграл от втори вид от  $\omega$  разбираме величината

$$\iint_S \omega = \iint_S (A(P)\cos \alpha(P) + B(P)\cos \beta(P) + C(P)\cos \gamma(P)) d\sigma.$$

**Изразяване на повърхнинния интеграл от първи вид чрез повърхнинен интеграл от втори вид.** В горната дефиниция интегралът от втори вид се дефинира чрез интеграла от първи вид. Възможно е и обратното изразяване: имайки пред вид тъждеството  $\cos^2 \alpha(P) + \cos^2 \beta(P) + \cos^2 \gamma(P) \equiv 1$ , виждаме, че е в сила съотношението

$$\iint_S f(P) d\sigma = \iint_S f(P) (\cos \alpha(P) dydz + \cos \beta(P) dzdx + \cos \gamma(P) dxdy).$$

Формата

$$\omega_{vol} = \cos \alpha(P) dydz + \cos \beta(P) dzdx + \cos \gamma(P) dxdy$$

се нарича форма на обема върху повърхността  $S$ .

**Параметрично пресмятане на интеграла.** Нека  $S$  е параметрично зададена повърхнина с регулярно параметрично представяне

$$P = P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

**Теорема 1.** *В сила е равенството*

$$\iint_S A(P) dydz + B(P) dzdx + C(P) dxdy =$$

$$= \iint_D \left( A(u, v) \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + B(u, v) \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + C(u, v) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) dudv,$$

където сме положили  $A(u, v) = A(P(u, v))$  и т.н.

Формално погледнато, формулата се получава чрез заместване на  $dydz$  с  $\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \cdot dudv$  и аналогично за  $dzdx$  и  $dxdy$ .

**Доказателство.** Във предишния параграф показахме, че компонентите на единичната нормала  $\vec{n}(u, v)$  имат вида

$$\cos \alpha(u, v) = \frac{1}{|\vec{N}(u, v)|} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v), \quad \cos \beta(u, v) = \frac{1}{|\vec{N}(u, v)|} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v),$$

$$\cos \gamma(u, v) = \frac{1}{|\vec{N}(u, v)|} \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v).$$

Ще докажем формулата за първото събираемо. По дефиниция

$$\begin{aligned} \iint_S A(P) dydz &= \iint_S A(P) \cos \alpha(P) d\sigma = \\ &= \iint_D A(P(u, v)) \frac{1}{|\vec{N}(u, v)|} \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v) \cdot |\vec{N}(u, v)| dudv = \\ &= \iint_D A(u, v) \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v) dudv. \end{aligned}$$

За останалите две събираеми формулата се доказва аналогично. ■

**Забележка 1.** Нека повърхността  $S$  е разположена в равнината  $Oxy$  и ориентирана чрез избор на нормала, съвпадаща с координатния вектор  $\vec{z}$ , а  $C(x, y)$  е функция върху  $S$ . Тогава повърхнинния интеграл от втори вид от формата  $C dx dy$  очевидно съвпада с двойният риманов интеграл върху  $S$  от функцията  $C(x, y)$ . Ако обаче сменим ориентацията на  $S$  с противоположната (като например разменим местата на координатите  $x$  и  $y$ ), то двойният интеграл не се променя, докато повърхнинният ще смени знака си.

**Забележка 2.** Формулата от теорема 1 може да се напише и във вида

$$\begin{aligned} & \iint_S A(P) dydz + B(P) dzdx + C(P) dxdy = \\ & = \iint_D \begin{vmatrix} A(u, v) & B(u, v) & C(u, v) \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} dudv \end{aligned}$$

(докажете!)

**Втора дефиниция на интеграла.** Ние дефинирахме повърхнинния интеграл от втори вид чрез използване на повърхнинния интеграл от първи вид. Интегралът от втори вид обаче може да бъде дефиниран и директно като граница на подходящи риманови суми (аналогично на дефиницията за криволинеен интеграл от втори вид, дадена в §1.3). Достатъчно е да дадем дефиницията за едно от събираемите в интеграла, например  $\iint_S C(P) dxdy$ ; останалите две събираеми се дефинират аналогично.

Нека  $\tau : S = \cup_{i=1}^n S_i$  е измеримо разбиване на компактната регулярна повърхнина  $S$  и  $P_i \in S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Нека

$$D_i = \Pi_{Oxy}(S_i),$$

където  $\Pi_{Oxy}$  означава ортогоналната проекция върху координатната равнина  $Oxy$ . Да разгледаме сумата

$$R_\tau = \sum_{i=1}^n C(P_i) \varepsilon_i \mu(D_i),$$

където множителят  $\varepsilon_i$  е равен на  $+1$  в случая, когато нормалата  $\vec{n}(P_i)$  сключва остър ъгъл с оста  $\vec{z}$ , и на  $-1$  в противен случай.

**Теорема 2.** *Имаме*

$$\lim_{\text{diam } \tau \rightarrow 0} R_\tau = \iint_S C(P) dxdy.$$

**Доказателство.** Както знаем от §2.1,

$$\mu(S_i) \approx \frac{\mu(D_i)}{|\cos \gamma(P_i)|},$$

откъдето

$$\mu(D_i) \approx |\cos \gamma(P_i)| \cdot \mu(S_i) \text{ и } \varepsilon_i \mu(D_i) \approx \cos \gamma(P_i) \cdot \mu(S_i).$$

Да разгледаме близката до  $R_\tau$  сума

$$\tilde{R}_\tau = \sum_{i=1}^n C(P_i) \cos \gamma(P_i) \cdot \mu(S_i).$$

По стандартен път се доказва, че разликата  $\tilde{R}_\tau - R_\tau$  клони към нула при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ . Но  $\tilde{R}_\tau$  представлява риманова сума за повърхнинния интеграл от първи вид в дясната страна на равенството. ■

**Забележка.** В горното доказателство ние прескочихме случая на точките  $P$ , в които нормалата  $\vec{n}(P)$  е ортогонална на  $\vec{z}$ . Нека  $A$  е множеството от всички такива точки. Можем да считаме, че повърхнината  $S$  е параметрично зададена с параметри  $u, v$ . Тогава точката  $P(u, v)$  принадлежи на  $A$  точно тогава, когато  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) = 0$ . Прилагайки за проекцията  $\Pi_{Oxy}$  лемата на Сард (виж част II, края на §2.6) виждаме, че  $B = \Pi_{Oxy}(A)$  е пренебрежимо множество в  $\mathbb{R}^2$ . Следователно, в сумата  $R_\tau$  приносът на онези индекси  $i$ , за които  $D_i \cap B \neq \emptyset$ , клони към нула при  $\text{diam } \tau \rightarrow 0$ , и съответните членове могат да бъдат пренебрегнати.

**Свойства на криволинейния интеграл от втори вид.** Нека  $U$  е отворено подмножество на  $\mathbb{R}^3$ . С  $\Omega_2(U)$  ще означаваме линейното пространство от всички диференциални форми от втори ред в  $U$ , т.е. всички изрази от вида

$$\omega = A(x, y, z) dydz + B(x, y, z) dzdx + C(x, y, z) dxdy.$$

Следните свойства се установяват лесно:

**Свойство 1. (Линейност)** Ако  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_2(U)$ , то

$$\iint_S (\omega_1 + \omega_2) = \iint_S \omega_1 + \iint_S \omega_2, \quad \iint_S \lambda \omega_1 = \lambda \iint_S \omega_1.$$

**Свойство 2.** Нека  $S$  е ориентирана повърхност. Да означим със  $-S$  същата повърхност, но с противоположна единична нормала. Тогава

$$\iint_{-S} \omega = - \iint_S \omega.$$

**Свойство 3.** Нека повърхността  $S$  е представена като обединение на измеримите си подмножества  $S_1$  и  $S_2$  с непресичащи се вътрешности. Тогава

$$\iint_S \omega = \iint_{S_1} \omega + \iint_{S_2} \omega.$$

### Приложения на повърхнинния интеграл от втори вид.

**1. Поток на векторно поле през повърхност.** Както видяхме в началото на параграфа, ако  $\vec{V}(P) = (A(P), B(P), C(P))$  е векторно поле в пространството, то неговият поток  $U$  през повърхността  $S$  (количеството течност, преминаващо за единица време през  $S$ ) се дава с повърхнинния интеграл от втори вид

$$U = \iint_S A(x, y, z) dydz + B(x, y, z) dzdx + C(x, y, z) dxdy.$$

**2. Налягане на течност върху повърхност.** Нека  $V$  е тяло, ограничено от гладката повърхност  $S$ . В такъв случай върху  $S$  се въвежда т.нар. индуцирана ориентация, определена чрез избора на *външната* единична нормала  $\vec{n}(P)$ , т.е. нормалата, сочеща навън от  $V$ .

Да предположим, че тялото  $V$  е потопено изцяло в течност. Ще пресметнем силата, с която течността действа на това тяло. Известно е, че във всяка точка  $P \in S$  налягането е с посока, противоположна на  $\vec{n}(P)$  и с големина, равна на теглото на стълба от течност над нея.

Нека  $\rho$  е плътността на течността. Да изберем оста  $z$  да сочи отвесно надолу. Ако  $S = \cup S_i$  е разбиване на  $S$ , и  $P_i = (x_i, y_i, z_i) \in S_i$ , то силата  $\vec{F}_i$ , действаща на  $S_i$ , е равна на налягането, умножено по лицето на  $S_i$ , насочена е противоположно на нормалата в точката, и приблизително се дава с формулата

$$\vec{F}_i \approx -\rho z_i \cdot \vec{n}(P_i) \cdot \mu(S_i).$$

Ако  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  е сумарната сила, действаща на тялото, виждаме, че нейните компоненти се изразяват с повърхнинните интеграли

$$F_x = -\rho \iint_S z \, dydz, \quad F_y = -\rho \iint_S z \, dzdx, \quad F_z = -\rho \iint_S z \, dxdy.$$

По-нататък ние ще докажем, че силата  $\vec{F}$  е насочена вертикално нагоре, а големината ѝ е равна на теглото на изместената от тялото течност (закон на Архимед).

**3. Интеграл на Гаус в пространството.** Нека  $S$  е гладка повърхност в  $\mathbb{R}^3$ . Както видяхме в предния параграф, пространственият ъгъл, под който  $S$  се вижда от началото, се дава с криволинейния интеграл от първи вид

$$\begin{aligned} \mu(\Sigma_S) &= \iint_S \frac{\cos \angle(\vec{n}(P), \vec{P})}{|\vec{P}|^2} \, d\sigma = \iint_S \frac{\langle \vec{n}(P), \vec{P} \rangle}{|\vec{P}|^3} \, d\sigma \\ &= \iint_S \frac{x(P) \cos \alpha(P) + y(P) \cos \beta(P) + z(P) \cos \gamma(P)}{|\vec{P}|^3} \, d\sigma. \end{aligned}$$

Очевидно последният интеграл може да се запише и като повърхнинен интеграл от втори вид, откъдето получаваме

$$\mu(\Sigma_S) = \iint_S \frac{x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Забележка.** Формата

$$\omega_1 = \frac{x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$



участваща в горното равенство, играе в пространството същата роля, каквато формата  $\omega_0$  играе в равнината (виж §1.5).

Нека  $S_R$  е сфера с център в началото и радиус  $R$ . Тогава върху  $S_R$  формата  $R^2.\omega_1$  съвпада със съответната форма  $\omega_{vol}$  на обема (виж по-горе). Наистина, за единичната нормала имаме  $\vec{n}(P) = \vec{P}/R$ , откъдето  $\cos \alpha(P) = x(P)/R$ , и т.н., откъдето следва равенството

$$R^2.\omega_1 = \cos \alpha \, dydz + \cos \beta \, dzdx + \cos \gamma \, dxdy.$$

## 2.4 Формули на Стокс и Гаус-Остроградски

В настоящия параграф ще изведем още две формули, наподобяващи по характер формулата на Гаус-Грин от §1.3. Отново става дума за многомерни обобщения на формулата на Лайбниц-Нютон.

**Формула на Стокс.** Формулата на Гаус-Грин свързва двойния интеграл по дадена област в равнината  $D$  с криволинеен интеграл от втори вид по нейната граница  $\Gamma$ . Да си представим сега, че вместо областта  $D$  в равнината имаме област  $S$  върху някаква ориентирана повърхност в  $\mathbb{R}^3$ . Тогава криволинейният интеграл върху границата ѝ продължава да има смисъл, а вместо двойния интеграл от формулата на Гаус-Грин трябва да се разгледа подходящ повърхнинен интеграл от втори вид. Така полученото обобщение на формулата на Гаус-Грин се нарича формула на Стокс.

За да можем да напишем формулата, ще трябва и в този случай да дефинираме индуцирана ориентация на кривата  $\Gamma$ , ограничаваща повърхността  $S$ .

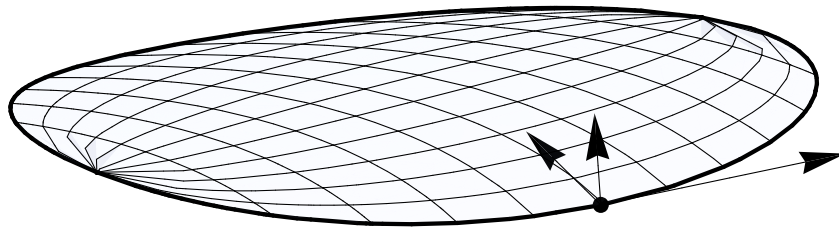
**Дефиниция.** Нека  $S$  е част от ориентирана повърхност с единичен нормален вектор  $\vec{n}(P)$ , и  $\Gamma$  е ограничаващата я крива, ориентирана от допирателния вектор  $\vec{e}(P)$ . Векторът  $\vec{n}(P) \times \vec{e}(P)$  е допирателен към  $S$  (тъй като е ортогонален на  $\vec{n}(P)$ ). Ще казваме, че кривата  $\Gamma$  е с индуцирана ориентация, ако  $\vec{n}(P) \times \vec{e}(P)$  сочи към  $S$ .

Това може да се обясни и по-нагледно: ако се движим по  $\Gamma$  така, че главата ни да сочи в посока  $\vec{n}(P)$ , то повърхността  $S$  трябва да остава отляво.

Ако  $S$  лежи в равнината  $Oxy$ , т.е. ако  $\vec{n}(P) = \vec{z}$ , получаваме ориентацията на  $\Gamma$ , използвана в теоремата на Гаус-Грин.

**Теорема 1. (Формула на Стокс).** Нека  $S \subset \mathbb{R}^3$  е ориентирана повърхност, ограничена от регулярната крива  $\Gamma$ , снабдена с индуцираната ориентация. Нека функциите  $A(x, y, z)$ ,  $B(x, y, z)$ ,  $C(x, y, z)$  са дефинирани в околност на  $S$ . Тогава е в сила формулата

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} A dx + B dy + C dz = \\ & = \iint_S (C'_y - B'_z) dydz + (A'_z - C'_x) dzdx + (B'_x - A'_y) dxdy. \end{aligned}$$



Индуцирана ориентация на крива, ограничаваща повърхност.

**Забележка.** Нека сме в ситуацията на забележка 1 след теорема 1 от предния параграф, т.е  $S$  се съдържа в равнината  $Oxy$  и единичната нормала е избрана да съвпада с координатния вектор  $\vec{z}$ . Вземайки  $A$  и  $B$ , зависещи само от  $x$  и  $y$ , и полагайки  $C \equiv 0$ , ние получаваме като частен случай формулата на Гаус-Грин.

**Доказателство на формулата на Стокс.** Ще докажем формулата за параметрично зададена повърхност  $S$ . В общия случай ние можем, както направихме това при доказателството на формулата на Гаус-Грин, да разрежем  $S$  на части, всяка от които е параметрично зададена, и да използваме това, че интегралите по разделящите криви се

унищожават взаимно.

Достатъчно е също така да проведем доказателството, когато само функцията  $A(x, y, z)$  е различна от нула. Наистина, това ще означава, че формулата е доказана за всяко от трите събираеми отляво, и общият случай се получава чрез събиране на получените три формули.

Нека повърхността  $S$  има параметричното представяне

$$P = P(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

където  $D$  е област в равнината  $Ouv$ , ограничена от регулярната крива  $L$ . Ако

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [a, b]$$

е регулярна параметризация на  $L$ , то

$$P(t) = P(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b]$$

е регулярна параметризация на  $\Gamma$ . Идеята на доказателството е да сведем търсената формула към формулата на Гаус-Грин за  $D$  и  $L$ .

Имаме да докажем равенството

$$\int_{\Gamma} A(x, y, z) dx = \iint_S A'_z dz dx - A'_y dx dy.$$

Използвайки параметричното представяне на  $\Gamma$  и равенството  $x'(t) = x'_u \cdot u'(t) + x'_v \cdot v'(t)$ , за лявата страна на равенството получаваме

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A(x, y, z) dx &= \int_a^b A(x(t), y(t), z(t)) (x'_u \cdot u'(t) + x'_v \cdot v'(t)) dt = \\ &= \int_L A \cdot x'_u du + A \cdot x'_v dv = \iint_D ((A \cdot x'_v)'_u - (A \cdot x'_u)'_v) dudv, \end{aligned}$$

като последното равенство следва от теоремата на Гаус-Грин.

Ще преработим израза в двойния интеграл:

$$\begin{aligned} (A \cdot x'_v)'_u - (A \cdot x'_u)'_v &= (A'_x \cdot x'_u + A'_y \cdot y'_u + A'_z \cdot z'_u) \cdot x'_v + A \cdot x''_{vu} - \\ &- (A'_x \cdot x'_v + A'_y \cdot y'_v + A'_z \cdot z'_v) \cdot x'_u - A \cdot x''_{uv} = \end{aligned}$$

$$= A'_z(z'_u \cdot x'_v - z'_v \cdot x'_u) - A'_y(x'_u \cdot y'_v - x'_v \cdot y'_u) = A'_z \frac{D(y, z)}{D(u, v)} - A'_y \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

От друга страна, използвайки параметричното представяне на повърхността  $S$ , получаваме за дясната страна на доказваната формула същия израз:

$$\iint_S A'_z dz dx - A'_y dx dy = \iint_D \left( A'_z \frac{D(y, z)}{D(u, v)} - A'_y \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) dudv. \blacksquare$$

**Забележка.** Тъждествеността на лявата и дясната страна на равенството, което доказахме, може да изглежда случайна. По-нататък ние ще покажем как формулата на Стокс директно следва от формулата на Гаус-Грин без допълнителни пресмятания.

**Следствие от формулата на Стокс: условия за пълен диференциал в  $\mathbb{R}^3$ .** Използвайки формулата на Стокс вместо тази на Гаус-Грин, можем да посочим условия, аналогично на §1.4, дадена 1-форма в  $\mathbb{R}^3$  да бъде пълен диференциал. Нека  $\omega = A dx + B dy + C dz$  е форма от първи ред, дефинирана в отворено множество  $U \subset \mathbb{R}^3$ . Ще въведем следните условия, аналогични на условията от §1.4:

1/ Интегралът  $\int_{\Gamma} \omega$  не зависи от кривата  $\Gamma$ , а само от началната ѝ точка. Еквивалентно: 1'/ Интегралът от  $\omega$  по всяка затворена крива е равен на нула.

2/ Формата  $\omega$  е пълен диференциал, т.е. съществува функция  $\Phi(x, y, z)$  на  $U$  такава, че  $\omega = d\Phi$ , и по-подробно  $A = \Phi'_x$ ,  $B = \Phi'_y$ ,  $C = \Phi'_z$ .

3/ Изпълнени са равенствата  $C'_y = B'_z$ ,  $A'_z = C'_x$ ,  $B'_x = A'_y$ .

Еквивалентността на условията 1/, 1'/ и 2/ се доказва по същия начин, както в §1.4, и ние ще я пропуснем. Импликацията 2/  $\Rightarrow$  3/ следва от равенството на смесените производни на функцията  $\Phi(x, y, z)$ . Остава да установим при какви условия от 3/ следва 1/. И тук е от значение условието за едносвързаност на  $U$ . Ще го формулираме за области в  $\mathbb{R}^3$ :

**Дефиниция.** Областта  $U \subset \mathbb{R}^3$  се нарича едносвързана, ако за всяка проста затворена крива  $\Gamma \subset U$  съществува ограничена регулярна повърхност  $S \subset U$  такава, че  $\Gamma = \partial S$ .

Например, ако  $U$  е пространството с избодена точка (т.е.  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ), то  $U$  е едносвързана. Ако обаче от  $\mathbb{R}^3$  премахнем цяла права, например оста  $Oz$ , оставащото пространство вече не е такова.

**Теорема 2.** *Ако областта  $U$  е едносвързана, то от условието 3/ следва условието 1'/.*

**Доказателство.** Ако  $\Gamma$  е затворена крива в  $U$  и  $S$  е повърхността, която тя ограничава, то прилагайки формулата на Стокс, получаваме, че  $\int_{\Gamma} \omega = 0$ . ■

**Следствие.** *За едносвързана област в  $\mathbb{R}^3$  условията 1/, 2/, и 3/ са еквивалентни.*

**Формула на Гаус-Остроградски.** Във формулите на Гаус-Грин и Стокс се установява връзката между интеграл върху двумерен обект (фигура в  $\mathbb{R}^2$  или повърхност в  $\mathbb{R}^3$ ) и интеграл върху неговата граница – ориентирана затворена крива. Във формулата на Гаус-Остроградски размерностите са с единица по-големи: установява се връзката между троен интеграл върху тяло в  $\mathbb{R}^3$  и повърхнинен интеграл върху ограничаващата го повърхност.

Нека  $V$  е ограничена област в  $\mathbb{R}^3$ , като нейната граница  $S = \partial V$  е регулярна повърхност. Под индуцирана ориентация на повърхността  $S$  ще разбираме тази, която е определена от външната нормала, т.е. от нормалата, сочеща навън от  $V$ . Ще смятаме, че  $S$  е снабдена с индуцираната ориентация.

Нека  $\omega$  е диференциална форма от ред 2, т.е. израз от вида

$$\omega = A(x, y, z) dydz + B(x, y, z) dzdx + C(x, y, z) dxdy,$$

където  $A(x, y, z)$ ,  $B(x, y, z)$ ,  $C(x, y, z)$  са еднократно гладки функции, дефинирани в околност на  $\bar{V}$ .

**Теорема 3 (Формула на Гаус-Остроградски).** *При горните предположения е в сила равенството*

$$\iint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \iiint_V (A'_x + B'_y + C'_z) dxdydz.$$

**Доказателство.** Аналогично на доказателството на формулата на Гаус-Грин, най-напред ще разгледаме частния случай, когато  $\omega = C dx dy$ , а  $V$  е криволинеен цилиндър  $z$ , определен с формулите

$$\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

Освен това ще предположим, че областта  $D$  е ограничена в  $\mathbb{R}^2$  от гладката или частично-гладка регулярна крива  $\Gamma$ . Да означим с  $S_\psi$ , респ.  $S_\varphi$ , графиките на функциите  $\psi$  и  $\varphi$ , а с  $S_{ok}$  – околната повърхност на  $V$ , т.е. тази част от  $S$ , която се намира над граничната крива  $\Gamma$ . Ще отбележим, че нормалата към  $S_\psi$  сочи навън от  $V$ , а тази към  $S_\varphi$  – навътре, което означава, че стандартната ориентация на  $S_\psi$  съвпада с ориентацията на  $S$ , а тази на  $S_\varphi$  ѝ е противоположна. Така получаваме равенството

$$S = S_\psi - S_\varphi + S_{ok}.$$

Ще покажем, че  $\iint_{S_{ok}} \omega = 0$ . Наистина, нека  $P = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$  е параметризация на  $\Gamma$ . Тогава повърхността  $S_{ok}$  се параметризира с параметрите  $z$  и  $t$ , изменящи се в областта  $\tilde{D}$ , определена с неравенствата

$$\tilde{D}: a \leq t \leq b, \quad \varphi(t) \leq z \leq \psi(t).$$

Тъй като координатите  $x, y$  не зависят от  $z$ , то детерминантата  $\frac{D(x, y)}{D(z, t)}$  има един нулев ред и следователно е равна на нула. Следователно интегралът по  $S_{ok}$  от формата  $\omega = C dx dy$  също се анулира.

Следователно

$$\begin{aligned} \iint_S \omega &= \iint_{S_\psi} \omega - \iint_{S_\varphi} \omega = \\ &= \iint_D C(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_D C(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_D \left( \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} C'_z(x, y, z) dz \right) dx dy = \iiint_V C'_z(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

и в дадения частен случай равенството от теоремата е доказано.

Нека  $V$  може да бъде разрязано на краен брой части, всяка от които е криволинеен трапец по  $z$ . Тогава повърхнинните интеграли по

разрязващите повърхнини се пробягват два пъти с противоположна ориентация и следователно взаимно се унищожават. Както при доказателството на формулата на Гаус-Грин в равнината, сумирайки равенствата от теоремата за всяка от частите на  $V$ , виждаме, че равенството е изпълнено и за цялата област  $V$ .

Нека сега  $\omega = A dydz + B dzdx + C dxdy$  е произволна 2-форма. Да предположим, че областта  $V$  може да бъде разрязана на краен брой криволинейни трапци по всяка от координатите  $x, y, z$ . За всяко от трите събираеми в  $\omega$ , използвайки съответното разрязване, виждаме, че теоремата е вярна. Събирайки получените равенства, получаваме валидността на теоремата в общия случай. ■

**Пример (закон на Архимед).** Ще се върнем към второто от приложенията на повърхнинния интеграл от втори вид, разгледани в предния параграф. Ние показахме, че ако имаме тяло  $V$  с граница  $S$ , потопено в течност с плътност  $\rho$ , и  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  е силата на изтласкване, с която течността му въздейства, то компонентите на тази сила се задават с формулите

$$F_x = -\rho \iint_S z dydz, \quad F_y = -\rho \iint_S z dzdx, \quad F_z = -\rho \iint_S z dxdy.$$

Да приложим към всеки от трите интеграла формулата на Гаус-Остроградски: веднага се получава, че  $F_x = F_y = 0$ , и

$$F_z = -\rho \iiint_V dxdydz = -\rho \mu(V).$$

Това означава, че силата на изтласкване е насочена вертикално нагоре и е равна по големина на теглото на изместената от тялото течност.



## 2.5 Теория на векторните полета в $\mathbb{R}^3$ .

Под векторно поле в  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^3$  (или в област  $U \subset \mathbb{R}^3$ ) ще разбираме три-мерен вектор  $\vec{F}(P)$ , дефиниран във всяка точка  $P \in U$ . Векторното поле  $\vec{F}(P)$  се определя чрез своите компоненти

$$\vec{F}(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P)).$$

Векторното поле ще бъде наричано *непрекъснато*, ако неговите компоненти  $F_x(P), F_y(P), F_z(P)$  са непрекъснати функции, и *k-кратно гладко*, ако компонентите му са k-кратно гладки функции. Аналогична е дефиницията на векторно поле в  $\mathbb{R}^n$ : това е n-мерен вектор, зависещ от точката в  $\mathbb{R}^n$ , и се определя от n на брой (скаларни) функции, които са неговите компоненти. В настоящия параграф ще разглеждаме главно векторни полета в  $\mathbb{R}^3$ .

Едно векторно поле може да бъде онагледено чрез неговите траектории, наричани още "силови линии" на полето.

**Дефиниция.** Нека  $\vec{F}(P)$  е векторно поле в  $\mathbb{R}^3$ , което не се анулира (т.е.  $\vec{F}(P) \neq \vec{0}$  за всяко  $P$ ). Казваме, че кривата  $\Gamma$  е траектория на полето  $\vec{F}(P)$ , ако за всяка точка  $P \in \Gamma$  векторът  $\vec{F}(P)$  е допирателен към  $\Gamma$  в точката  $P$ .

От теоремата за съществуване и единственост на решения на обикновени диференциални уравнения следва, че ако  $\vec{F}(P)$  е еднократно гладко векторно поле, което не се анулира никъде, то през всяка точка минава точно една негова траектория.

**Производна по направление и градиент.** Следната дефиниция е срещана нееднократно до този момент, но за удобство на читателя ще я повторим.

**Дефиниция.** Нека  $\Phi(P)$  е еднократно гладка функция, дефинирана в  $\mathbb{R}^3$ . Под градиент на функцията  $\Phi(P)$  разбираме векторното поле

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P) = (\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z).$$

Векторното поле  $\vec{F}(P)$  се нарича градиентно, ако съществува функция  $\Phi(P)$  такава, че  $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P)$ .

**Забележка.** На полето  $\vec{F}(P)$  можем да съпоставим диференциалната 1-форма

$$\omega_{\vec{F}} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Тогава равенството  $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P)$  означава, че  $\omega_{\vec{F}} = d\Phi$ .

При въвеждане на нови понятия е важно те да имат вътрешен смисъл, т.е. да не зависят от избора на ортогонална координатна система в  $\mathbb{R}^3$ . В §1.5 на част II, използвайки връзката между понятията "градиент" и "производна по направление", това е доказано и за градиента. За удобство на читателя ще повторим накратко съответните разсъждения.

Нека  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  е точка от  $\mathbb{R}^3$  и  $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$  е единичен вектор. Под *производна по направление*  $\vec{e}$  на  $\Phi(P)$  в точката  $P_0$  разбираме величината

$$\Phi'_{\vec{e}}(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\Phi(P_0 + h \cdot \vec{e}) - \Phi(P_0)).$$

Ако въведем помощната функция

$$\varphi(t) = \Phi(P_0 + t \cdot \vec{e}) = \Phi(x_0 + t \cdot e_1, y_0 + t \cdot e_2, z_0 + t \cdot e_3),$$

то  $\Phi'_{\vec{e}}(P_0) = \varphi'(0)$ . От формулата за диференциране на съставна функция получаваме

$$\begin{aligned} \Phi'_{\vec{e}}(P_0) &= e_1 \cdot \Phi'_x(P_0) + e_2 \cdot \Phi'_y(P_0) + e_3 \cdot \Phi'_z(P_0) = \left\langle \vec{e}, \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P_0) \right\rangle = \\ &= \left| \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P_0) \right| \cdot \cos \angle \left( \vec{e}, \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P_0) \right). \end{aligned}$$

Ако фиксираме точката  $P_0$  и меним вектора  $\vec{e}$ , максималната стойност на производната по направление се достига, когато косинусът в горната формула е равен на единица, т.е. когато направлението  $\vec{e}$  е едноразочно с  $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P_0)$ . Така достигаме до следната характеристика на градиента, независима от координатната система:

*Посоката на вектора  $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi(P_0)$  съвпада с посоката, в която функцията  $\Phi(P)$  расте най-бързо. Дължината на градиента е равна на скоростта на нарастването на  $\Phi(P)$  в тази посока.*

Друга геометрична характеристика на градиента е свързана с повърхностите на ниво на функцията  $\Phi(P)$ , т.е. с повърхностите от вида

$\Phi(x, y, z) = a$ . През всяка точка очевидно минава точно една линия на ниво. Ако се движим по направление, перпендикулярно на градиента в дадена точка, то от горната формула се вижда, че производната по това направление е нула, и следователно това направление е допирателно към повърхността на ниво, минаваща през точката. Така получаваме:

*Градиентът на функцията в дадена точка е перпендикулярен на повърхността на ниво на функцията, минаваща през точката.*

(За по-точна формулировка на това твърдение и за неговото доказателство виж част II, §1.8.)

**Пример (нютонovo гравитационно поле).** Нека в точката  $P_0$  е разположена гравитационна маса  $M$ . Силата, с която тази маса привлича частица с единична маса, разположена в точката  $P$ , е насочена от  $P$  към  $P_0$ , а големината и е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието от  $P$  до  $P_0$ . Така за гравитационното поле на материална точка получаваме формулата

$$\vec{F}(P) = -c \frac{\vec{P_0P}}{|\vec{P_0P}|^3},$$

където  $c = kM$ ,  $k$  е гравитационната константа.

Лесно се вижда, че това поле е градиентно; имаме

$$\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{c}{|\vec{P_0P}|} \right).$$

**Циркулация на векторно поле по крива.** В началото на §1.3 ние изведохме формула за работа на материална точка, движеща се по дадена крива в силово поле. Понятието циркулация се основава на тази формула.

Нека  $\Gamma$  е регулярна ориентирана крива в  $\mathbb{R}^3$  и  $\vec{e}(P)$  е съответният единичен допирателен вектор.

**Дефиниция.** Под циркулация на векторното поле  $\vec{F}(P)$  по  $\Gamma$  ще разбираме величината

$$\text{circ}_\Gamma \vec{F} = \int_\Gamma \langle \vec{F}(P), \vec{e}(P) \rangle dl = \int_\Gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

**Теорема 1.** Нека  $\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(P)$  е градиентно векторно поле и  $\Gamma$  е крива с начална точка  $P$  и крайна точка  $Q$ . Тогава

$$\text{circ}_{\Gamma}\vec{F} = \Phi(Q) - \Phi(P).$$

**Доказателство.** Нека  $P = P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , е параметризация на  $\Gamma$ . Да положим  $\Psi(t) = \Phi(P(t))$ . Имаме

$$\begin{aligned} \text{circ}_{\Gamma}\vec{F} &= \int_a^b (\Phi'_x \cdot x' + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z'(t)) dt = \int_a^b \Psi'(t) dt = \\ &= \Psi(b) - \Psi(a) = \Phi(Q) - \Phi(P). \blacksquare \end{aligned}$$

**Следствие.** Градиентното векторно поле не може да има затворени траектории.

**Доказателство.** Нека  $\Gamma$  е затворена траектория на градиентното векторно поле  $\vec{F}(P)$ . Да изберем посоката върху  $\Gamma$  да е определена от допирателният вектор  $\vec{e}(P)$ . Тогава по дефиниция за всяка точка  $P \in \Gamma$  ще имаме  $\langle \vec{F}(P), \vec{e}(P) \rangle > 0$ , откъдето следва, че  $\text{circ}_{\Gamma}\vec{F} > 0$ . От друга страна, от теоремата се вижда, че по всяка затворена крива циркулацията на  $\vec{F}(P)$  е равна на нула.  $\blacksquare$

**Поток на векторно поле през повърхност.** В началото на §2.3 ние разгледахме задачата за поток на течност през повърхност. Оказва се, че изведената там формула има приложения и за други физически задачи, и затова е целесъобразно да въведем съответното понятие.

**Дефиниция.** Нека  $S$  е ориентирана регулярна повърхност в  $\mathbb{R}^3$  и  $\vec{n}(P)$  е съответната единична нормала. Нека  $\vec{F}(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P))$  е векторно поле върху  $S$ . Под поток на векторното поле  $\vec{F}(P)$  през повърхността  $S$  ще разбираме величината

$$\text{curr}_S\vec{F} = \int_S \langle \vec{F}(P), \vec{n}(P) \rangle d\sigma = \int_S F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy.$$

**Пример.** Нека  $\vec{F}(P) = -c \frac{P_0 P}{|P_0 P|^3}$  е разгледаното по-горе нютоново гравитационно поле, и  $S$  е ориентирана повърхност, не съдържаща точката  $P_0$ , с нормала  $\vec{n}(P)$ . Тогава потокът на  $\vec{F}(P)$  през  $S$  се дава с формулата

$$\text{curr}_S \vec{F} = -c \iint_S \frac{\langle P_0 P, \vec{n}(P) \rangle}{|P_0 P|^3} d\sigma.$$

Припомняйки си интеграла на Гаус в пространството (виж третото от приложенията на повърхнинния интеграл от първи вид в §2.2), виждаме, че този поток е пропорционален на пространствения ъгъл, под който  $S$  се вижда от  $P_0$ .

**Дивергенция и ротор на векторно поле.** Следващите две понятия естествено възникват при векторните версии на теоремите на Стокс и Гаус-Остроградски.

**Дефиниция.** Под дивергенция на векторното поле  $\vec{F}(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P))$  разбираме функцията

$$\text{div } \vec{F}(P) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(P) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(P) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(P).$$

**Пример.** Ако  $\vec{F}(P)$  е нютоновото гравитационно поле, разгледано по-горе, то с непосредствено пресмятане се доказва, че за всяко  $P \neq P_0$  имаме  $\text{div } \vec{F}(P) = 0$ .

**Дефиниция.** Под ротор на векторното поле  $\vec{F}(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P))$  разбираме векторното поле

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(P) = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

**Характеризация на потенциалните полета.** Нека  $U \subset \mathbb{R}^3$  е едносвързана област и  $\vec{F}(P)$  е векторно поле в  $U$ . Тогава полето  $\vec{F}(P)$  е потенциално точно тогава, когато  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(P) \equiv \vec{0}$ .

Това твърдение всъщност представлява превод на векторен език на теорема 2 и нейното следствие от §2.4.

**Пример.** Нека дадено тяло се върти около оста  $z$  с постоянна ъглова скорост  $\omega$  (в мерни единици радиани за секунда). Линеината скорост на дадена точка  $P$  е равна по големина на  $\omega R(P)$ , където  $R(P)$  е разстоянието от точката  $P$  до оста на въртене. Така за скоростта  $\vec{V}(x, y, z)$  в точката  $P = (x, y, z)$  получаваме

$$\vec{V}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0).$$

Оттук получаваме, че е изпълнено равенството  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(P) = \omega \cdot \vec{z}$ .

При движение от общ вид моментната ос на въртене се изменя с времето. Ако разгледаме полето от скоростите на точките от тялото в даден момент, лесно може да се докаже, че роторът на това поле в даден момент е насочен по моментната ос на въртене, а големината му е равна на моментната ъглова скорост. Това донякъде обяснява и названието "ротор".

**Забележка.** По-голямата част от въведените досега понятия могат да бъдат въведени в произволно евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . Понятията градиент на функция и циркуляция на векторно поле се пренасят в общия случай без изменения. В дефинициите на поток и дивергенция трябва да заменим понятието "повърхност в  $\mathbb{R}^2$ " с " $n - 1$ -мерна повърхност в  $\mathbb{R}^n$ ". Понятието "ротор" обаче е специфично за  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема на Стокс и Гаус-Остроградски.** Използвайки токущо въведените понятия, можем отново да напишем формулировките на тези две теореми:

**Теорема на Стокс.** Нека  $S$  е компактна регулярна повърхност в  $\mathbb{R}^3$  и  $\Gamma$  е ограничаващата я крива, снабдена с индуцираната ориентация. Нека  $\vec{F}(P)$  е векторно поле върху  $S$ . Тогава

$$\text{circ}_{\Gamma} \vec{F} = \text{curr}_S \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(P) \right).$$

**Теорема на Гаус-Остроградски.** Нека  $V$  е тяло в  $\mathbb{R}^3$ , ограничено от регулярната повърхност  $S$ , снабдена с индуцираната ориентация (породена от външната за  $V$  нормала). Ако  $\vec{F}(P)$  е векторно

поле в околност на  $V$ , то

$$\text{curr}_S \vec{F} = \iiint_V \text{div } \vec{F}(P) \, dx dy dz.$$

**Независимост на ротора и дивергенцията от координатната система.** В дефиницията на тези две понятия участваха координатните функции на векторното поле, но тук ще покажем, че те не зависят от избора на ортогонална координатна система в  $\mathbb{R}^3$ .

**Независимост на дивергенцията.** Нека  $B_\varepsilon$  е кълбо с център в точката  $P_0$ , и  $S_\varepsilon$  е ограничаващата го сфера. Тогава, използвайки теоремата на Гаус-Остроградски и теоремата за средните стойности за тройните интеграли, получаваме

$$\text{curr}_{S_\varepsilon} \vec{F} = \iiint_V \text{div } \vec{F}(P) \, dx dy dz = \text{div } \vec{F}(P_\varepsilon) \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3,$$

където  $P_\varepsilon$  е подходяща точка от  $B_\varepsilon$ . Извършвайки граничен преход при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаваме независимата от избора на координатите формула за дивергенцията

$$\text{div } \vec{F}(P_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{curr}_{S_\varepsilon} \vec{F}}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3}.$$

**Забележка.** Нека, както в началото на §2.3,  $\vec{F}$  да бъде полето на скоростите на стационарно движение на течност. Тогава потокът на  $\vec{F}$  през  $S_\varepsilon$  е равен на разликата на вливащата се и изливаща се течност в тялото  $B_\varepsilon$ . Така достигаме до интерпретация на дивергенцията: дивергенцията на  $\vec{F}$  в дадена точка е равна на плътността на появяващата се (или изчезваща) течност в точката.

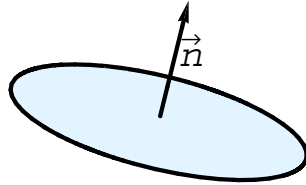
**Независимост на ротора.** Да фиксираме дадена точка  $P_0$  и единичен вектор  $\vec{n}$ . Нека  $D_{\varepsilon, \vec{n}}$  е кръг с център в  $P_0$  и радиус  $\varepsilon$ , лежащ в равнина, минаваща през  $P_0$  и ортогонална на вектора  $\vec{n}$ . Нека  $\Gamma_{\varepsilon, \vec{n}}$  е ограничаващата  $D_{\varepsilon, \vec{n}}$  окръжност, ориентирана в положителна посока. Да

приложим формулата на Стокс за полето  $\vec{F}$  и повърхността  $D_{\varepsilon, \vec{n}}$ , имайки пред вид, че нормалата към  $D_{\varepsilon, \vec{n}}$  навсякъде съвпада с  $\vec{n}$ . Получаваме

$$\text{circ}_{\Gamma_{\varepsilon, \vec{n}}} \vec{F} = \iint_{D_{\varepsilon, \vec{n}}} \langle \vec{\text{rot}} \vec{F}(P), \vec{n} \rangle d\sigma = \pi\varepsilon^2 \cdot \langle \vec{\text{rot}} \vec{F}(P_{\varepsilon}), \vec{n} \rangle$$

за подходящо избрана точка  $P_{\varepsilon} \in D_{\varepsilon, \vec{n}}$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаваме, че

$$\langle \vec{\text{rot}} \vec{F}(P_0), \vec{n} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{circ}_{\Gamma_{\varepsilon, \vec{n}}} \vec{F}}{\pi\varepsilon^2}.$$



Така получихме, че скаларното произведение на вектора  $\vec{\text{rot}} \vec{F}(P_{\varepsilon})$  с произволно избран вектор не зависи от избора на координатната система, и следователно това е в сила и за самия вектор (виж разсъжденията, използвани при доказателството на независимостта на градиента от координатната система).

**Съотношения между векторните операции.** Ще систематизираме въведените по-горе операции на векторното смятане:

1. Операцията  $\vec{\text{grad}}$  (градиент) на дадена функция съпоставя векторно поле.



2. Операцията  $\overrightarrow{\text{rot}}$  съпоставя на дадено векторно поле друго векторно поле.
3. Операцията  $\text{div}$  съпоставя на векторно поле функция.

**Теорема 2.** *Векторните операции удовлетворяват следните съотношения:*

$$1/ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{0},$$

$$2/ \text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = 0,$$

$$3/ \text{div} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

$$4/ \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}.$$

Наистина, както отбелязахме по-горе, съотношението 1/ следва непосредствено от равенството на смесените производни. По същият начин без труд се доказва съотношението 2/. Съотношенията 3/ и 4/ се доказват с непосредствено пресмятане. Ще поясним, че в 4/ символът  $\Delta \vec{F}$  означава векторното поле, получено от полето  $\vec{F}$  чрез прилагане на диференциалния оператор  $\Delta$  към всяка от неговите компоненти.

Особено важен – в теорията и приложенията – е диференциалният оператор от втори ред, получен в точка 3/:

**Дефиниция.** *Диференциалният оператор*

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

*се нарича оператор на Лаплас в  $\mathbb{R}^3$ .*

Равенството 3/ показва, че операторът на Лаплас не зависи от избора на ортогонална координатна система в  $\mathbb{R}^3$ , което определя неговото значение.

**Набла-вектор (формализъм на Хамилтон).** Основателят на векторния анализ, известният ирландски математик Уйлям Хамилтон (работил в първата половина на 19-ти век) е въвел следното формално означение, облегчаващо работата с векторните операции и широко използвано в физическите и инженерните науки:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Формалният вектор  $\vec{\nabla}$  се нарича набла-вектор и широко се използва, особено във физическите и инженерните науки.

Въведените по-горе векторни операции могат да бъдат кратко записани с използването на този символ:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{\nabla} \Phi, \operatorname{div} \vec{F} = \langle \vec{\nabla}, \vec{F} \rangle, \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Този формализъм позволява и да бъдат извеждани редица формули; така например, равенството 4/ от предната точка може формално да бъде изведено чрез използване на векторното съотношение

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \vec{B} - \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle \vec{C},$$

като вместо  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  се постави  $\vec{\nabla}$ , а вместо  $\vec{C}$  – полето  $\vec{F}(P)$ .

Математически този формален подход може да бъде обоснован, ако  $\vec{\nabla}$  се разглежда като тройка диференциални оператори, действащи в пространството на безкрайно-гладките функции в  $\mathbb{R}^3$ .

При изчисленията понякога се допускат грешки, най-често при размяна на множителите. Трябва да се помни например, че изразите  $\vec{\nabla} \Phi$  и  $\Phi \vec{\nabla}$  означават съвсем различни неща: първият е резултат на прилагането на  $\vec{\nabla}$  към функцията  $\Phi$  и е равен на векторното поле  $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ , докато вторият е диференциален оператор с компоненти

$$\Phi \vec{\nabla} = \left( \Phi(P) \frac{\partial}{\partial x}, \Phi(P) \frac{\partial}{\partial y}, \Phi(P) \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

**Градиентни и роторни векторни полета.** По-горе ние разгледахме градиентни векторни полета, т.е. такива полета  $\vec{F}$ , имащи вида  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$  за някоя функция  $\Phi$ . Беше показано, че за такива полета имаме  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$ . Локално (върху всяко кълбо или куб например) е вярно и обратното твърдение: горното равенство влече след себе си градиентност на полето.

Видяхме, че градиентното поле не може да има затворени траектории. По тази причина градиентните векторни полета се наричат понякога *ламинарни*, или *безвихрови*. Тези термини обикновено се употребяват, когато става дума за полето на скоростите на движеща се течност. С това се обяснява и предположението за съществуване на потенциал,

което направихме при разглеждане на плоско стационарно движение на течност (виж §1.6, приложение 6).

### Роторни полета.

**Дефиниция.** Полето  $\vec{F}$  наричаме роторно, ако съществува векторно поле  $\vec{G}$  такова, че

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}.$$

Полето  $\vec{G}$  се нарича още векторен потенциал на  $\vec{F}$ .

Локално векторният потенциал  $\vec{G}$  е определен с точност до добавяне на градиентно векторно поле.

Лесно се вижда, че ако полето  $\vec{F}$  е роторно, то  $\text{div } \vec{F} = 0$  (свойство 2). Следователно, потокът на  $\vec{F}$  по всяка затворена повърхност (т.е. повърхност, ограничаваща дадено тяло) е равен на нула.

Оказва се, че локално горното необходимо условие е и достатъчно.

**Теорема 3.** Нека  $U$  е правоъгълен паралелепипед в  $\mathbb{R}^3$ , полето  $\vec{F}$  е дефинирано в  $U$  и удовлетворява условието  $\text{div } \vec{F} = 0$ . Тогава съществува векторно поле  $\vec{G}$  върху  $U$  такова, че  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}$ .

**Доказателство.** Трябва да намерим векторно поле  $\vec{G} = (G_x, G_y, G_z)$  такова, че

$$F_x = \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}, \quad F_y = \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}, \quad F_z = \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}.$$

Ще търсим такива решения за  $\vec{G}$ , за които  $z$ -компонентата  $G_z(x, y, z) \equiv 0$ . Тогава векторното равенство  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}$  е равносилно с трите скаларни равенства

$$F_x = -\frac{\partial G_y}{\partial z}, \quad F_y = \frac{\partial G_x}{\partial z}, \quad F_z = \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y},$$

които ще разглеждаме като система уравнения относно функциите  $G_x, G_y, G_z$ .

Да фиксираме точката  $(x_0, y_0, z_0) \in U$ . Решавайки първите две уравнения, можем да положим

$$G_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z F_y(x, y, z) dz, \quad \text{и} \quad G_y(x, y, z) = -\int_{z_0}^z F_x(x, y, z) dz + \varphi(x, y),$$

където функцията  $\varphi(x, y)$  ще бъде определена от третото уравнение. Диференцирайки под знака на интеграла, получаваме

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = \int_{z_0}^z \frac{\partial F_y}{\partial y} dz, \quad \frac{\partial G_y}{\partial x} = - \int_{z_0}^z \frac{\partial F_x}{\partial x} dz + \varphi'_x(x, y).$$

Тогава третото уравнение има вида

$$\varphi'_x(x, y) = F_z(x, y, z) + \int_{z_0}^z \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dz.$$

Но по условие имаме равенството

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0,$$

и следователно уравнението за  $\varphi(x, y)$  добива вида

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y) &= F_z(x, y, z) - \int_{z_0}^z \frac{\partial F_z}{\partial z} dz = \\ &= F_z(x, y, z) - (F_z(x, y, z) - F_z(x, y, z_0)) = F_z(x, y, z_0), \end{aligned}$$

което притежава очевидното решение

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x F_z(x, y, z_0) dx.$$

С това ние намерихме векторно поле  $\vec{G}(x, y, z)$ , удовлетворяващо условията на теоремата. ■

**Следствие (теорема на Хелмхолц).** *Всяко векторно поле локално може да бъде представено като сума на градиентно и на роторно поле.*

**Доказателство.** Трябва да докажем, че локално всяко векторно поле  $\vec{F}$  може да бъде представено във вида

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{G}$$

за подходяща функция  $\Phi(P)$  и векторно поле  $\vec{G}(P)$ .

Да предположим, че такова представяне съществува, и да приложим оператора  $\operatorname{div}$  към двете му страни. Имайки пред вид свойствата, дадени в теорема 2, получаваме равенството

$$\operatorname{div} \vec{F} = \Delta \Phi.$$

Ще използваме резултат от теорията на частните диференциални уравнения, който гласи, че уравнението  $\Delta \Phi = \Psi$  винаги има решение относно  $\Phi$ . Следователно винаги може да се намери функция  $\Phi$ , така че горното равенство да бъде удовлетворено (всъщност такива функции има безкрайно много). Остава да се докаже, че векторното поле

$$\vec{H} = \vec{F} - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi$$

е роторно. Това следва от доказаната теорема, тъй като според нашата конструкция е изпълнено равенството  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ . ■

### Приложения.

**Движение на течност. Уравнение на неразрывността.** Нека  $\vec{F}(P, t)$  е полето от скоростите при движение на течност в  $\mathbb{R}^3$ , зависещо от точката  $P$  и момент  $t$ ,  $V$  е тяло в  $\mathbb{R}^3$ , ограничено от повърхността  $S$ , и  $U(t)$  е масата на течността, съдържаща се в тялото  $V$  в момента  $t$ . Движението на течността беше разгледано в началото на §2.3. Тук обаче няма да предполагаме, че течността е еднородна, и ще означим плътността на течността в точката  $P$  в момент  $t$  чрез  $\rho(P, t)$ . Повтаряйки разсъжденията от §2.3, получаваме, че

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\operatorname{curr}_S (\rho(P, t) \vec{F}(P, t)) = - \iiint_V \operatorname{div} (\rho \vec{F}) dx dy dz.$$

Тук използвахме теоремата на Гаус-остроградски. Знакът "−" се появи поради факта, че  $S$  е ориентирана с външната си нормала, и следователно излизащата от тялото течност се брой със знак +, а влизащата – със знак −.

Същата величина може да бъде пресметната и по друг начин: да диференцираме по  $t$  очевидното съотношение

$$U(t) = \iiint_V \rho(P, t) dx dy dz.$$

Получаваме, че

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} dx dy dz.$$

Приравнявайки двете формули, получаваме равенството

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{F}) \right) dx dy dz = 0.$$

Това равенство е изпълнено за произволно тяло  $V$ . Оставяме на читателя да докаже следното просто твърдение:

**Лема.** Нека  $f(P)$  е непрекъсната функция, за която се знае, че за всяко тяло  $V$ , съдържащо се в дефиниционната ѝ област, имаме  $\iiint_V f dx dy dz = 0$ . Тогава  $f(P)$  е тъждествено равна на нула.

Използвайки това твърдение, стигаме до т.нар. уравнение на неразривността при движение на течност:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{F}) \equiv 0.$$

**Уравнение на топлопроводността.** Нека е дадено материално тяло и нека температурата му в точката  $P$  и момента  $t$  е равна на  $T(P, t)$ . Нека  $V$  е част от това тяло, ограничена от повърхността  $S$ , и  $Q(t)$  е "количеството топлина", съдържаща се в него в момента  $t$ .

Знаем, че топлината се придвижва от по-топлите части на тялото към по-хладните. С други думи, топлината се движи по посока, обратна на градиента на температурата. Въвежда се т.нар. "вектор на потока на топлината"

$$\vec{q}(P, t) = -k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T(P, t),$$

където  $k$  е коефициент на топлопроводност. По съображения, аналогични на тези от предния пример, имаме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{curr}_S \vec{q}(P, t) = -\iiint_V \operatorname{div}(-k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T(P, t)) dx dy dz.$$

От друга страна, нарастването на температурата в дадена точка е пропорционално на плътността на нарастването на топлината около

тази точка, с коефициент на пропорционалност  $c\rho$ , където  $c$  е специфичната топлоемност в точката, а  $\rho$  е плътността на материята. Оттук се получава

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz.$$

Тъй като това е вярно за всяка част  $V$ , можем да използваме лемата от предната точка. Така получаваме уравнението на топлопроводността:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (k \overrightarrow{\operatorname{grad}} T).$$

Ако имаме хомогенна среда, т.е.  $k$ ,  $c$  и  $\rho$  са константи, и означим  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ , уравнението добива вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T.$$

В частност, ако е постигнато топлинно равновесие, т.е. температурата не се променя с времето, то получаваме равенството

$$\Delta T = 0,$$

което означава, че температурата е хармонична функция на точката.

**Уравнения на Максвел.** Едно от най-важните постижения на съвременната физика е описанието на всички електрически и магнитни явления чрез четири прости уравнения. Тук ще дадем тези уравнения във вакуум.

Нека са дадени: плътността на електростатичните товари  $\rho(P, t)$ , и плътността на електричните токове  $\vec{J}(P, t)$ . Електрическото и магнитното поле, породени от тези товари и токове, се характеризират чрез векторните полета  $\vec{E}(P, t)$  (интензитет на електричното поле), и  $\vec{B}(P, t)$  (интензитет на магнитното поле). Тези полета могат да се определят чрез решаване на следните диференциални уравнения (уравнения на Максвел):

$$\begin{array}{ll} 1. \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & 2. \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ 3. \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & 4. \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{array}$$

Тук  $\varepsilon_0$  и  $c$  са безразмерни константи, като  $c$  е скоростта на светлината във вакуум.

В частност, ако токове и магнитно поле липсват ( $\vec{J} = \vec{0}$ ,  $\vec{B} = \vec{0}$ ), то интензитетът  $\vec{E}$  има свойства, аналогични на тези на гравитационното поле (докажете).



## 2.6 Хармонични функции

**Хармонични функции в  $\mathbb{R}^3$ .** По-горе ние срещнахме диференциалния оператор, който действа върху функция  $f(x, y, z)$ , дефинирана в  $\mathbb{R}^3$ , по формулата:

$$\Delta f = \operatorname{div} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Тъй като операциите  $\operatorname{div}$  и  $\overrightarrow{\operatorname{grad}}$  не зависят от избора на ортогоналната координатна система в  $\mathbb{R}^3$ , то същото е вярно и за диференциалния оператор  $\Delta$ . По-точно, ако  $U$  е ортогонална  $3 \times 3$  матрица, разглеждана и като оператор от  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^3$ , и означим  $(Uf)(P) = f(U.P)$ , то е в сила равенството

$$\Delta(Uf)(P) = (\Delta f)(U.P).$$

Функция  $f(x, y, z)$ , удовлетворяваща равенството  $\Delta f \equiv 0$ , се нарича хармонична функция.

Ще изведем някои интересни свойства на хармоничните функции. Започваме с три важни за нас равенства, следващи от формулата на Остроградски-Гаус. Нека  $V$  е област в  $\mathbb{R}^3$ , нейната граница  $S = \partial V$  е гладка повърхнина, и  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  са двукратно гладки функции в околност на  $\bar{V}$ . Нека  $\vec{n}(P)$ , както по-горе, да означава единичната външна нормала към  $S$ , и  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P)$  да е производната на  $f(x, y, z)$  по направление  $\vec{n}(P)$ . Тогава са в сила формулите:

$$\iiint_V \Delta f \, dx \, dy \, dz = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) \, d\sigma, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V g \cdot \Delta f \, dx \, dy \, dz &= - \iiint_V \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz + \\ &+ \iint_S g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) \, d\sigma, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\iiint_V (g \cdot \Delta f - f \cdot \Delta g) \, dx \, dy \, dz = \iint_S \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma. \quad (3)$$

**Доказателство на формулите.** Формула (1) представлява формулата на Остроградски-Гаус, приложена за векторното поле  $\overrightarrow{\text{grad}} f$ , като се вземе пред вид равенството

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(P), \vec{n}(P) \right\rangle$$

(виж част II, §1.5).

За да докажем (2), да разгледаме векторното поле

$$g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f = \left( g \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, g \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, g \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

От формулата за диференциране на произведение следва, че

$$\text{div} \left( g \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + g \cdot \Delta f,$$

откъдето, прилагайки Остроградски-Гаус, получаваме формулата (2).

Най-сетне, за да докажем (3), да напишем два пъти формулата (2), втория път – с размяна на местата на  $f$  и  $g$ , и да извадим получените равенства. Тройните интеграли отдясно се съкращават, и ние получаваме формулата (3).

**Теорема за средните стойности на хармоничните функции.** Нека функцията  $f(P)$  е хармонична в областта  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  е вътрешна точка за  $U$ , и кълбото  $B_R$  с център  $P_0$  и радиус  $R$  се съдържа в  $U$ . Да означим с  $S_R$  границата на това кълбо, т.е. сферата с център  $P_0$  и радиус  $R$ . Тогава е в сила формулата

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma.$$

С други думи,  $f(P_0)$  е равно на средната стойност на  $f(P)$  върху сферата  $S_R$ .

**Доказателство.** Да разгледаме функцията

$$g(P) = \frac{1}{\rho(P, P_0)} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

дефинирана в  $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_0\}$ . Непосредствената проверка показва, че  $\Delta g \equiv 0$  (проверете). Да изберем  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < R$ , и да означим с  $V$  тялото  $V = B_R \setminus B_\varepsilon$ . Тогава  $bV = S_R - S_\varepsilon$  (знакът "-" пред малката сфера  $S_\varepsilon$  означава, че тя се взема с ориентация, обратна на обичайната). Да приложим формула (3); лявата част е равна на нула, и следователно получаване

$$\iint_{S_R} \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma = \iint_{S_\varepsilon} \left( g(P) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(P) - f(P) \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) \right) d\sigma.$$

Горните интегрални върху сфери се изчисляват лесно. Наистина, за  $P \in S_R$  очевидно  $g(P) = 1/R$ . По-нататък, нормалата  $\vec{n}(P)$  към  $S_R$  е еднопосочна с вектора  $\vec{P}_0P$  и следователно имаме

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}(P) = \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} = -\frac{1}{R^2}.$$

Разбира се, същите формули са валидни и върху сферата  $S_\varepsilon$ , и горното равенство добива вида

$$\frac{1}{R} \iint_{S_R} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma + \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} f(P) d\sigma.$$

Ще използваме още веднаж, че  $f(P)$  е хармонична функция; формула (1) показва, че

$$\iint_{S_R} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} d\sigma = \iiint_{B_R} \Delta f(P) dx dy dz = 0,$$

и, разбира се, същото е вярно и за интеграла от  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$  върху  $S_\varepsilon$ . Така получихме, че

$$\frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} f(P) d\sigma.$$

Ще изчислим границата на дясната страна при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . По теоремата за средните стойности за повърхнинни интегрални от първи вид имаме

$$\iint_{S_\varepsilon} f(P) d\sigma = f(P_\varepsilon) \cdot \mu(S_\varepsilon) = 4\pi\varepsilon^2 f(P_\varepsilon)$$

за подходяща точка  $P_\varepsilon \in S_\varepsilon$ , откъдето

$$\frac{1}{R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma = 4\pi f(P_\varepsilon).$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  очевидно  $f(P_\varepsilon) \rightarrow f(P_0)$ , откъдето следва твърдението на теоремата. ■

**Следствие 1. (принцип за максимума за хармоничните функции).** Нека  $U$  е ограничена свързана област в  $\mathbb{R}^3$  и  $f(P)$  е функция, хармонична в  $U$  и непрекъсната в затворената и обвивка  $\bar{U}$ . Ако  $f(P)$  не е константа, то максималната и минималната и стойности се достигат само върху границата  $\partial U$  на областта  $U$ .

**Доказателство.** По теоремата на Вайерщрас  $f(P)$  достига максималната и минималната си стойности в  $\bar{U}$ . Да допуснем, че максималната стойност се достига в точка  $P_0$ , вътрешна за  $U$ . Ще докажем, че  $f(P)$  е константа в  $U$ . Отначало ще докажем това в някаква кълбовидна околност на  $P_0$ . Нека  $B$  е кълбо с център  $P_0$ , съдържащо се в  $U$ . Ако предположим, че  $f(P)$  не е константа в  $B$ , то можем да намерим точка  $P' \in B$  такава, че  $f(P') < f(P_0)$ . Да означим  $R = \rho(P_0, P')$ , и нека е сферата  $S_R$  с център  $P_0$  и радиус  $R$ . Очевидно  $P' \in S_R$ . За всяко  $P \in S_R$  имаме  $f(P) \leq f(P_0)$ . Освен това от непрекъснатостта на  $f(P)$  следва, че за всяко  $P$ , близко до  $P_1$ , е изпълнено строгото неравенство  $f(P) < f(P_0)$ . По теоремата за средните стойности получаваме

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P) d\sigma < \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} f(P_0) d\sigma = f(P_0),$$

т.е. получихме противоречие, дължащо се на допускането, че  $f(P_1) < f(P_0)$ . С други думи, доказахме, че  $f(P)$  е константа в  $B$ .

Ще докажем този факт и върху цялото  $U$ . Нека  $Q$  е произволна точка от  $U$ . Можем да намерим редица  $B_0, \dots, B_n$  от кълба в  $U$  такива, че  $B_0 = B$ ,  $B_n$  съдържа  $Q$ , и всяко от кълбата  $B_k$  съдържа центъра на следващото кълбо  $B_{k+1}$ . Да означим с  $P_0, \dots, P_n$  техните центрове. Тъй като  $P_1 \in B_0$ , то  $f(P_1) = f(P_0)$ . Прилагайки горните разсъждения за кълбото  $B_1$  вместо за  $B$ , получаваме, че  $f(P) = f(P_0)$  за всяка точка  $P \in B_1$ . Разсъждавайки по същия начин последователно за кълбата

$B_2, \dots, B_n$ , достигаем до извода, че  $f(P) = f(P_0)$  за всяко  $P \in B_n$ , т.е. и в точката  $Q$ . Тъй като  $Q$  беше произволна, то  $f(P) \equiv f(P_0)$  в  $U$ , т.е.  $f(P)$  е константа в  $U$ .

Същите разсъждения вървят и ако предположим, че  $f(P_0)$  е минималната стойност на  $f(P)$  в  $U$ . ■

**Следствие 2.** *Всяка хармонична и непрекъсната в  $\bar{U}$  функция се определя еднозначно от стойностите си върху  $bU$ . С други думи, ако две хармонични функции съвпадат върху  $bU$ , те съвпадат навсякъде.*

За да видим това, е достатъчно да приложим следствие 1 към разликата на двете функции.

**Хармонични функции в равнината.** Функцията  $f(x, y)$  се нарича *хармонична* в  $\mathbb{R}^2$ , ако

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Всички доказани по-горе резултати се пренасят и в равнината, като тройните интеграла се заменят с двойни, а повърхнинните – с криволинейни. Ще скицираме накратко необходимите промени в доказателствата:

Първо, вместо формулата на Остроградски-Гаус се използва формулата на Гаус-Грин. Удобно е да се използва тази формула във леко видоизменен вид. Нека  $D$  е област в равнината, чиято граница съвпада с гладката крива  $\Gamma$ ,  $A(x, y)$  и  $B(x, y)$  са гладки функции в околност на  $\bar{D}$ , и  $\vec{n}(P)$  означава единичната нормала към  $\Gamma$  в посока, външна за  $D$  (тук посоката на нормалата е противоположна на приетата по-горе). Използва се формулата

$$\begin{aligned} \iint_D (A'_x + B'_y) \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} A \, dy - B \, dx = \\ &= \int_{\Gamma} (A \cos \angle(\vec{x}, \vec{n}) + B \cos \angle(\vec{y}, \vec{n})) \, dl. \end{aligned}$$

За доказателство на горните равенства е достатъчно във формулата на Гаус-Грин да се постави  $-B$  вместо  $A$  и  $A$  вместо  $B$ , и да се използва връзката между директорните косинуси на  $\vec{e}$  и  $\vec{n}$ .

С помощта на горните равенства лесно се доказват двумерните аналози на формулите 1 - 3 по-горе. Нататък доказателството се развива по същия начин както по-горе, като вместо използваната в тримерния случай функция  $g = 1/\rho$  се използва функцията

$$g(x, y) = \ln \rho(P_0, P) = \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Лесно се доказва, че  $g(x, y)$  е хармонична в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_0\}$ . Използвай същите пресмятания както по-горе, можем да докажем и в този случай теоремата за средните стойности и нейното следствие – принципа за максимума за хармоничните функции.

**Упражнения.**

1. Докажете, че ако  $f(P)$  е хармонична в  $U$  и  $B_R$  е кълбото с център  $P_0$  и радиус  $R$ , то

$$f(P_0) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_{B_R} f(P) \, dx \, dy \, dz.$$

**Упътване.** Докажете, че

$$\iiint_{B_R} f(P) \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \left( \iint_{S_\varrho} f(P) \, d\sigma \right) d\varrho.$$

## 2.7 Локална структура на повърхностите

**Локално описание на повърхностите в  $\mathbb{R}^3$ .** Нека е дадена двукратно гладката регулярна параметрично зададена повърхнина  $S \subset \mathbb{R}^3$ , и  $P_0$  е точка от  $S$ . Както видяхме по-горе, около  $P_0$  повърхнината  $S$  може да се представи като графика на определена функция на две от координатите. В този параграф обаче за нас ще бъде удобно да направим това в друга ортогонална координатна система, свързана с  $P_0$ .

Ще изберем координатната система  $Oxyz$  така, че нейното начало  $O$  да съвпада с  $P_0$ , а координатните вектори  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  да бъдат допирателни към  $S$  в тази точка. С други думи, допирателната равнина към  $S$  в точката  $O$  ще съвпада с координатната равнина  $Oxy$ . Да представим локално  $S$  като график на функция, т.е. с уравнението  $z = f(x, y)$ . Тъй като в този случай допирателното пространство в точката  $O$  се поражда от векторите  $(1, 0, f'_x(0, 0))$  и  $(0, 1, f'_y(0, 0))$ , то от горните условия следва, че

$$f'(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0.$$

Развивайки функцията  $f(x, y)$  в ред на Тейлор до третия член около точката  $(0, 0)$  и вземайки пред вид горните условия, получаваме

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + R_2(x, y),$$

където сме положили

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0), \quad \text{и}$$

$$R_2(x, y) = o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right).$$

Следващата стъпка е да изберем друга координатна система в равнината  $Oxy$ . Теоремата за канонизация на квадратичните форми гласи, че чрез ортогонална смяна на координатите в равнината квадратичната форма

$$A(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

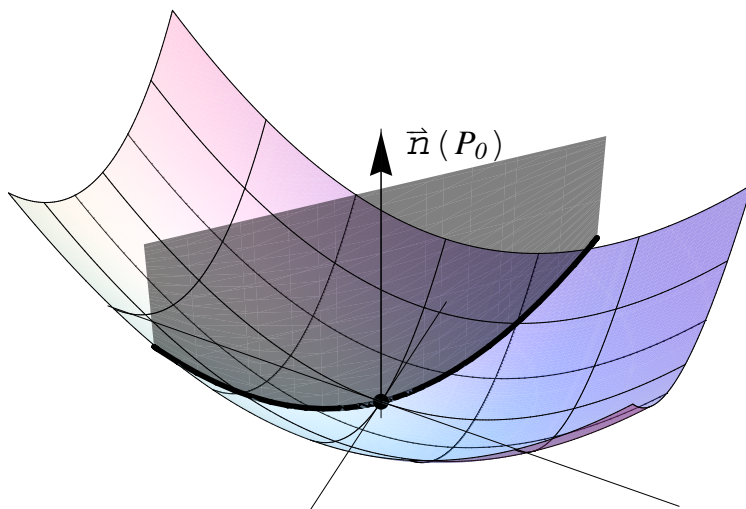
може да бъде приведена към вида  $\alpha_1\xi^2 + \alpha_2\eta^2$  спрямо новите координати  $(\xi, \eta)$ . След такава смяна повърхнината локално се описва с уравнението

$z = \tilde{f}(\xi, \eta)$ , където

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\alpha_1\xi^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\eta^2 + o\left(\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^2\right).$$

Числата  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се наричат главни секционни кривини на повърхнината  $S$  в точката  $P_0$ , а координатните оси по  $u$  и  $v$  – главни координатни оси в тази точка.

**Формула за секционната кривина. Средна и гаусова кривина.** Ще обясним геометричния смисъл на кривините  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Под нормално сечение на  $S$  в точката  $P_0$  ще разбираме сечението на  $S$  с произволна равнина, минаваща през нормалата  $\vec{n}(P_0)$  в тази точка. Ще намерим кривината на така получените равнинни криви в точката  $P_0$ .



Нормално сечение.

Ще изберем координатната система както по-горе, т.е. началото да е в точката  $P_0$ , оста  $z$  да съвпада с нормалата в тази точка, а осите



$x$  и  $y$  са на мястото на  $\xi$  и  $\eta$ . Нека  $\vec{h}$  е единичен допирателен вектор към  $S$  в  $P_0$ , като  $\vec{h} = (h_1, h_2)$  относно новите координати  $\xi, \eta$  (т.е. имаме  $h_1^2 + h_2^2 = 1$ ). Да означим с  $L_{\vec{h}}$  е равнината, минаваща през точката  $O = P_0$  и колинеарна с вектора  $\vec{h}$  и с нормалния вектор  $\vec{n}(P_0) = \vec{z}$ . Точките от тази равнина имат представянето  $(h_1 t, h_2 t, z)$  за подходящи  $t$  и  $z$ . В съответните координати сечението  $\Gamma_{\vec{h}}$  на  $S$  с  $L_{\vec{h}}$  се представя с уравнението

$$z = \tilde{f}(h_1 t, h_2 t).$$

Ще напомним формулата за *кривина* на равнинна крива – виж част I, §4.4 (геометричният смисъл на това понятие ще припомним по-долу). Ако  $y = \varphi(x)$  е уравнението на кривата, то кривината  $k(x)$  в точката  $(x, \varphi(x))$  се дава с формулата

$$k(x) = \frac{\varphi''(x)}{(1 + \varphi'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Нека означим

$$\varphi_{\vec{h}}(t) = \tilde{f}(h_1 t, h_2 t),$$

и нека  $k_{\vec{h}}$  е кривината на  $\Gamma_{\vec{h}}$  в точката 0. Числото  $k_{\vec{h}}$  се нарича секционна кривина, съответстваща на сечението на  $S$  с  $L_{\vec{h}}$ . Тогава

$$\varphi_{\vec{h}}(t) = \frac{1}{2} (\alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2) t^2 + o(t^2)$$

и следователно

$$\varphi'_{\vec{h}}(0) = 0, \quad \varphi''_{\vec{h}}(0) = \alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2,$$

(докажете!). Оттук получаваме формулата за секционната кривина:

$$k_{\vec{h}} = \alpha_1 h_1^2 + \alpha_2 h_2^2 = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) h_2^2.$$

В частност, полагайки  $\vec{h} = (1, 0)$  или  $\vec{h} = (0, 1)$ , получаваме, че главните кривини съвпадат с секционните кривини, съответстващи на нормалните сечения, минаващи през главните оси. От формулата се вижда също така, че  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  ни дават минималната и максималната секционна кривина, а всички останали секционни кривини лежат между тях.

Числото  $k_m(P_0) = \alpha_1 + \alpha_2$  се нарича средна кривина в точката  $P_0$ , а числото  $k_G(P_0) = \alpha_1 \cdot \alpha_2$  – гаусова кривина в тази точка. Тъй като  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  не зависят от избора на координатната система в  $\mathbb{R}^3$ , то от горните формули следва, че същото е вярно и за средната и гаусовата кривини.

За да си изясним връзката между кривините  $\alpha_1, \alpha_2$ , и коефициентите  $A, B, C$ , ще си припомним процедурата на канонизация на дадена квадратична форма. Теоремата за канонизацията може да бъде доказана по различни начини, включително и чрез използване на множителите на Лагранж (виж част II, §1. 11, зад. 2). Числата  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  се получават като корени на уравнението

$$\begin{vmatrix} A - \alpha & B \\ B & C - \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

или, развито

$$\alpha^2 - (A + C)\alpha + (AC - B^2) = 0.$$

(Лесно се вижда, че това уравнение винаги има реални решения.) Формулите на Виет ни дават равенствата

$$k_m(P_0) = \alpha_1 + \alpha_2 = A + C, \quad k_G(P_0) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = AC - B^2.$$

**Забележка.** Горните формули са верни само в случая, когато координатната равнина  $Oxy$  съвпада с допирателната равнина в точката  $P_0$ , т.е. когато  $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ . В общия случай те трябва да бъдат коригирани. В следващия раздел ще изведем общата формула за гаусовата кривина.

**Геометричен смисъл на гаусовата кривина.** Ще напомним геометричния смисъл на понятието кривина на равнинна крива. Нека  $\Gamma$  е двукратно гладка регулярна крива в  $\mathbb{R}^2$ ,  $P_0$  и  $P_1$  са точки от  $\Gamma$ ,  $\Delta l$  означава дължината на дъгата  $P_0P_1$ , и  $\Delta\alpha$  – ъгълът между допирателните в точките  $P_0$  и  $P_1$ . Тогава кривината  $k(P_0)$  се определя като

$$k(P_0) = \lim_{P_1 \rightarrow P_0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l}.$$

Ще покажем, че естественият аналог на това понятие за повърхнини е точно гаусовата кривина.

Първо ще отбележим, че горната дефиниция няма да се промени, ако вместо допирателните вземем нормалите в съответните точки. Това води до идеята да се разгледа изображението, съпоставящо на всяка точка  $P$  от повърхнината  $S$  единичната нормала в точката  $\vec{n}(P)$ . Получаваме изображение, наречено изображение на Гаус, на повърхнината  $S$  в единичната сфера  $S^2$  в  $\mathbb{R}^3$ . Ако  $\Delta S$  е част от повърхнината  $S$ , чрез  $\Delta \Sigma$  ще означаваме нейния образ в единичната сфера чрез изображението на Гаус. Всъщност лицето  $\mu(\Delta \Sigma)$  на множеството  $\Delta \Sigma$  е точно пространственият ъгъл, описван от нормалата върху  $\Delta S$ , и аналогията със случая на крива линия е очевидна.

Сега можем да формулираме точното твърдение. Нека  $S$  е регулярна двукратно гладка повърхнина,  $P_0 \in S$ , и в околност на  $P_0$   $S$  се представя с равенството  $z = f(x, y)$ , като

$$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

Нека, както по-горе,

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

и освен това да означим

$$p = f'_x(x_0, y_0), \quad q = f'_y(x_0, y_0).$$

Ще предположим още, че  $AC - B^2 \neq 0$ .

Нека  $\Delta S_n$  е редица от части на  $S$ , съдържащи  $P_0$ , с диаметри клонящи към 0. (Понякога това се изразява с равенството  $\Delta S_n \searrow (P_0)$ .) Нека  $\Delta \Sigma_n$  са образите им при изображението на Гаус.

**Теорема (геометричен смисъл на гаусовата кривина).** *При горните условия е изпълнено равенството*

$$\lim_{\Delta S_n \searrow (P_0)} \frac{\mu(\Delta \Sigma_n)}{\mu(\Delta S_n)} = \frac{|AC - B^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2} = |k_G(P_0)|.$$

**Доказателство.** Да си припомним формулата за лице на повърхност  $S$ , зададена като графика на функцията  $f(x, y)$  с дефиниционна област  $D$ :

$$\mu(S) = \iint_D \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

(виж §2.1.)

Ще използваме тази формула, за да изразим лицата, участващи във формулировката на теоремата. Нека с  $\Delta D_n$  да означим проекцията на  $\Delta S_n$  върху равнината  $Oxy$ . Тогава, използвайки теоремата за средните стойности, получаваме

$$\mu(\Delta S_n) = \iint_{\Delta D_n} \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|} = \frac{\mu(\Delta D_n)}{|\cos \gamma(Q_n)|}$$

за подходяща точка  $Q_n = (x_n, y_n) \in D_n$ .

По-сложно е намирането на  $\mu(\Delta \Sigma_n)$ . Ще въведем нови координати  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , равни на първите две координати на единичната нормала  $\vec{n}(x, y)$ . Тогава

$$\mu(\Delta \Sigma_n) = \iint_{\Delta \tilde{D}_n} \frac{d\tilde{x} d\tilde{y}}{|\cos \tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})|},$$

където с  $\Delta \tilde{D}_n$  сме означили проекцията на  $\Delta \Sigma_n$  в равнината  $Oxy$ , а  $\cos \tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})$  е третата координата на нормалата  $\vec{n}(\tilde{x}, \tilde{y})$  към единичната сфера.

Ще искаме в този интеграл да преминем към променливите  $x, y$ . *Ключово наблюдение:* нормалата към сферата в дадена точка е колинеарна с радиус-вектора на точката. Следователно

$$\vec{n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pm \vec{n}(x, y) \text{ и } |\cos \tilde{\gamma}(\tilde{x}, \tilde{y})| = |\cos \gamma(x, y)|.$$

Ще намерим функционалната детерминанта на въпросната смяна  $\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)}$ . Отново ще означим

$$p(x, y) = f'_x(x, y), \quad q(x, y) = f'_y(x, y),$$

$$A(x, y) = f''_{xx}(x, y), \quad B(x, y) = f''_{xy}(x, y), \quad C(x, y) = f''_{yy}(x, y).$$

Лесно се вижда, че

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2 \neq 0.$$

От друга страна,

$$\tilde{x}(x, y) = -\frac{p(x, y)}{\sqrt{1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2}}, \quad \tilde{y}(x, y) = -\frac{q(x, y)}{\sqrt{1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2}},$$

откъдето

$$\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(p, q)}(p, q) = \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

За интересуващата ни функционална детерминанта получаваме

$$\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)} = \frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(p, q)} \cdot \frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \frac{A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2}{(1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2)^2}.$$

От теоремата за смяна на променливите получаваме

$$\mu(\Delta\Sigma_n) = \int\int_{\Delta D_n} \frac{|A(x, y)C(x, y) - B(x, y)^2|}{(1 + p(x, y)^2 + q(x, y)^2)^2} \cdot \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

По теоремата за средните получаваме

$$\mu(\Delta\Sigma_n) = \frac{|A(Q'_n)C(Q'_n) - B(Q'_n)^2|}{(1 + p(Q'_n)^2 + q(Q'_n)^2)^2} \cdot \frac{\mu(\Delta D_n)}{|\cos \gamma(Q'_n)|}$$

за подходяща точка  $Q'_n = (x'_n, y'_n) \in D_n$ .

При  $n \rightarrow \infty$  редиците от точки  $(x'_n, y'_n)$  и  $(x_n, y_n)$  клонят към  $(x_0, y_0)$  и следователно

$$\frac{\mu(\Delta\Sigma_n)}{\mu(\Delta S_n)} \rightarrow \frac{|A(x_0, y_0)C(x_0, y_0) - B(x_0, y_0)^2|}{(1 + p(x_0, y_0)^2 + q(x_0, y_0)^2)^2} = \frac{|AC - B^2|}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Остава да докажем, че изразът отлясно е равен на  $|k_G(P_0)|$ . Тъй като лявата страна на горното равенство не зависи от избора на координатната система в  $\mathbb{R}^3$ , можем да изберем такива координати, каквито са ни удобни. Да ги изберем както по-горе, т.е. с начало в точката  $P_0 = (0, 0)$  и с координатна равнина  $Oxy$ , съвпадаща с допирателното пространство в  $P_0$ . Тогава, както видяхме по-горе,  $k_G(P_0) = AC - B^2$ . От друга страна, очевидно  $p(0, 0) = q(0, 0) = 0$ , и следователно второто равенство в теоремата е също вярно. ■

Последните разсъждения доказват и следната формула:

**Следствие.** Ако повърхнината  $S$  се представя като графика на функцията  $f(x, y)$ , то гаусовата кривина в точката  $(x, y, f(x, y)) \in S$  се дава с формулата

$$k_G(x, y, f(x, y)) = \frac{f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}(x, y)^2}{(1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2)^2}.$$

**Примери.** Да разгледаме сферата  $S_R^2$  с радиус  $R$ . Тогава всички нормални сечения са окръжности с радиус  $R$ , и следователно всички секционни кривини са равни на  $1/R$ , а гаусовата кривина във всяка точка е равна на  $1/R^2$ . Изображението на Гаус от  $S_R^2$  в  $S_1^2$  е просто умножение с  $1/R$ , и твърдението на теоремата се вижда непосредствено.

Също така лесно се вижда, че за равнината всички секционни кривини са равни на нула.

**"Забележителната теорема" на Гаус.** Един от най-известните резултати на Гаус е т.нар. Theorema Egregium, или Забележителната теорема. Тя гласи, че гаусовата кривина зависи само от вътрешната геометрия на повърхнината – т.е. от разстоянията между нейните точки – а не от начина, по който тя е вложена в  $\mathbb{R}^3$ . За да онагледим този резултат, да си представим, че имаме парче от сферична гумена топка и го прегъваме (без обаче да го разтягаме). При сгъването главните секционни кривини се променят, едната става по-малка, а другата – по-голяма. По теоремата на Гаус обаче произведението им остава постоянно.

Едно следствие от теоремата на Гаус е, че не може да съществува абсолютно точна карта дори на част от земната повърхност. Наистина, ако съществуваше изображение на част от сферата върху равнината, запазващо всички разстояния, то сферата и равнината биха имали една и съща гаусова кривина. Както видяхме, това не е така, и следователно всяко изображение от сферата в равнината изменя донякъде разстоянията.

### Упражнения.

1. Нека  $P_0$  е точка от регулярната повърхнина  $S$  в  $\mathbb{R}^3$ . Да изберем, както по-горе, координатна система с начало в точката  $P_0 = (0, 0)$  и с

координатна равнина  $Oxy$ , съвпадаща с допирателното пространство в  $P_0$ . Да означим, както в §2.1:

$$E(x, y) = 1 + f'_x(x, y)^2, \quad F(x, y) = f'_x(x, y) \cdot f'_y(x, y), \quad G(x, y) = 1 + f'_y(x, y)^2.$$

Докажете чрез директно пресмятане, че е в сила равенството

$$k_G(P_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, 0) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(0, 0).$$

**2.** Нека  $S$  е регулярна повърхнина. Да изберем координатната система в  $\mathbb{R}^3$  така, че около началото на координатите  $S$  да се представя във вида

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 y^2 + o\left(\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right).$$

Нека  $\vec{n}(x, y)$  е единичната нормала към  $S$  в точката с координати  $\vec{P}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Докажете векторните равенства

$$\vec{n}'_x(0, 0) = \alpha_1 \vec{P}'_x(0, 0), \quad \vec{n}'_y(0, 0) = \alpha_2 \vec{P}'_y(0, 0).$$

**Упътване.** Използвайки развитие в ред на Тейлор, докажете, че функциите  $f(x, y)$  и

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{2}\alpha_1 x^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 y^2$$

имат еднакви частни производни от първи и втори ред в точката  $(0, 0)$ . Следователно, достатъчно е да се докажат търсените равенства за функцията  $\tilde{f}(x, y)$ .

# Азбучен указател

- атлас, 83
- детерминанта на Грам в  $\mathbb{R}^3$ , 96
- детерминанта на Грам в  $\mathbb{R}^n$ , 101
- диференциална форма от първа степен, 39
- директорни косинуси на единичен вектор, 89
- директорни косинуси на вектор, 10
- допирателна
- към параметрично зададена крива, 8
- допирателна към крива, 8
- допирателна равнина към повърхност, 90
- допирателни вектори
- параметрични, 84
- допирателно подпространство към повърхнина, 86
- еднакво ориентирани параметрични представяния, 88
- едностранна повърхност, 90
- едносвързана област в равнината, 52
- функция на тока, 76
- гаусова кривина, 130
- главни секционни кривини, 128
- хармонична функция, 121
- хомотопни криви, 60
- индекс на крива относно точка, 56
- индуцирана ориентация на гранична крива, 42
- интеграл на Гаус в равнината, 31, 118
- изображение на Гаус, 131
- карта върху повърхност, 83
- коэффициенти на Гаус, 96
- крива
- $n$ -кратно гладка, 4
  - частично гладка, 4
  - дължина на, 11
  - непрекъснатата, 4
  - особени точки на, 5
  - параметрично представяне на, 3
  - проста, 4
  - проста затворена, 4
  - регулярна, 5
- криволинеен интеграл от първи вид, 19
- криволинеен интеграл от втори вид, 35
- криволинеен сектор, 73
- лице на повърхност, 92
- непрекъснатата фамилия от криви, 60
- нормален вектор към повърхност,



- 86
- нормално сечение, 128
- обратен образ на диференциална форма от първи ред, 40
- омплексен потенциал, 77
- ориентация на повърхност, 89
- ориентирана крива, 8
- ориентируема повърхност, 89
- параметрично зададена крива, 3
- параметрично зададена повърхнина, 79
- пълен диференциал, 47
- посока върху крива, 7
- повърхнина
- $n$ -кратно гладка, 80
  - непрекъснатата, 80
  - параметрично представяне на, 79
  - регулярна, 80
  - явно зададена, 80
- повърхнинен интеграл от първи вид, 106
- повърхност в  $\mathbb{R}^3$ , 83
- представяне, 79
- примитивна функция, 47
- резидуум на диференциална форма, 54
- секционна кривина, 129
- средна кривина, 130
- свързващо изображение, 82
- теорема на Жордан, 5
- точна диференциална форма от първи ред, 49
- тор, 27, 114
- вътрешност на крива, 5
- явно зададена крива, 4
- затворена диференциална форма от първи ред, 49



# Съдържание

<b>1</b>	<b>Криви и криволинейни интеграли</b>	<b>3</b>
1.1	Параметрично зададени криви . . . . .	3
1.2	Криволинейен интеграл от първи вид . . . . .	18
1.3	Криволинейен интеграл от втори вид . . . . .	34
1.4	Пълен диференциал . . . . .	48
1.5	Индекс на крива . . . . .	58
1.6	Приложения на интеграла от втори вид . . . . .	76
<b>2</b>	<b>Повърхности и повърхнинни интеграли</b>	<b>85</b>
2.1	Параметрично зададени повърхности . . . . .	85
2.2	Повърхнинен интеграл от първи вид . . . . .	111
2.3	Повърхнинен интеграл от втори вид . . . . .	121
2.4	Формули на Стокс и Гаус-Остроградски . . . . .	130
2.5	Теория на векторните полета в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	137
2.6	Хармонични функции . . . . .	153
2.7	Локална структура на повърхностите . . . . .	159