Глава 1

Диференциално смятане на функции на няколко променливи.

1.1 Разстояние, норма и скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция на крайномерно пространство. В настоящата глава ще се занимаваме със свойствата на функциите на няколко променливи. Преди да започнем обаче тяхното изучаване, трябва да обърнем внимание на множествата, върху които те са дефинирани. Когато имаме функция на едно променливо $f(x)$, тя е определена за x принадлежащо на някакво подмножество (обикновено интервал) на реалната права $\mathbb{R}$. При функция на две променливи $f(x, y)$ стойността на функцията зависи от числовите стойности на двете променливи x и y, при това взети в определен ред - ясно е, че ако разменим техните места, получаваме друга стойност на функцията. Така, можем да кажем, че $f(x, y)$ е дефинирана върху някакво множество, състоящо се от *наредени двойки реални числа.* Аналогично функцията на три променливи $f(x, y, z)$ е дефинирана върху множество от *наредени тройки реални числа*, и т.н. Това ни довежда до следната дефиниция, играеща основна роля в по-нататъшните ни разсъждения:

Определение. *Под n-мерно евклидово пространство* $\mathbb{R}^n$ *ще разбираме множеството от всички наредени n-торки* $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от реални числа. Числата* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ще наричаме съответно първа, втора,..., n-та координата на точката* P.

Пространството $\mathbb{R}^2$ от всички наредени двойки (x, y) се нарича равнина. При $n = 3$ получаваме тримерното пространство $\mathbb{R}^3$ на всички наредени тройки (x, y, z).

Ще отбележим, че в линейната алгебра пространствата $\mathbb{R}^n$ се изучават от малко по-различна гледна точка: в тях се въвеждат т.н. линейни, или векторни операции - събиране на два елемента, и произведение на даден елемент с реално число. Понякога и ние ще използваме тези операции; в такъв случай, за да подчертаем наличието на такива операции, ще наричаме елементите на $\mathbb{R}^n$ вектори, и ще използваме за тях означения от вида $\vec{x}$, $\vec{y}$ и т.н.

Горната дефиниция е частен случай на възприетата в теорията на множествата операция произведение на две или повече множества. Ако $M_1, \ldots, M_n$ са някакви множества, тяхното произведение $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ се определя като множеството от всички наредени n-торки $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ с $m_1 \in M_1$,...,$m_n \in M_n$. Тогава $\mathbb{R}^n$ може да се определи като произведение $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ на n екземпляра на реалната права $\mathbb{R}$. Така може да бъдат дефинирани и някои подмножества на евклидовите пространства: ако $[a, b]$ и $[c, d]$ са интервали в $\mathbb{R}$, тяхното произведение $[a, b] \times [c, d]$ представлява правоъгълник в $\mathbb{R}^2$ със страни, успоредни на координатните оси. Произведението на три интервала $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ е правоъгълен паралелопипед в $\mathbb{R}^3$, и т.н.

Разстояние и норма в $\mathbb{R}^n$. По-нататък основна роля за нас ще играе понятието *евклидово разстояние между две точки в* $\mathbb{R}^2$. При върху правата $\mathbb{R}$, разстоянието между точките с координати x и y е $\rho(x, y) = |x - y|$. Разстоянието между две точки в равнината или в тримерното пространство може да се намери по елементарно-геометричен път с помощта на Питагоровата теорема.

Нека $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. Тогава т. нар. евклидово разстояние между точките P и P_2 се дава с формулата

$$\rho\,(P_1, P_2) \;=\; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогична е формулата в $\mathbb{R}^3$: ако $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\rho\,(P_1, P_2) \;=\; \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

По същия начин се въвежда разстоянието и във всяко от пространствата $\mathbb{R}^n$ за произволно естествено n. Нека $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ са точки от $\mathbb{R}^n$. Тогава разстоянието между точките P и Q се дава с формулата

$$\rho(P, Q) \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

По нататък ние ще използваме не толкова дефиницията на това разстояние, колкото неговите основни свойства:

Свойства на разстоянието:

1/ $\rho(P, Q) \geq 0$ за всеки две точки $P,\ Q \in \mathbb{R}^2$; $\rho(P, Q) = 0$ тогава и само тогава, когато $P = Q$.

2/ Винаги $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$.

3/ (неравенство на триъгълника) За всеки три точки $P,\ Q,\ R \in \mathbb{R}^2$ имаме

$$\rho(P, R) \;\leq\; \rho(P, Q) \;+\; \rho(Q, R).$$

Доказателство. Свойствата 1/ и 2/ са очевидни. Свойството 3/ лесно се интерпретира геометрически: ако разгледаме триъгълника с върхове в точките P, Q и R, то сумата от дължините на страните PQ и QR не надминава дължината на страната PR. Този факт се доказва в елементарната геометрия; разбира се, интересно е и неговото аналитично доказателство - виж Твърдение1 и Задача 1.

Норма в $\mathbb{R}^2$. Да разгледаме сега $\mathbb{R}^2$ като векторно пространство, и да въведем понятието евклидова норма на вектор от $\mathbb{R}^2$: ако $\vec{P} == (x, y)$, то

$$\left|\left|\vec{P}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Така въведената норма притежава свойства, аналогични на горните.

Свойства на нормата:

$1'/$ $\left|\left|\vec{P}\right|\right| \geq 0$; $\left|\left|\vec{P}\right|\right| = 0$ тогава и само тогава, когато $\vec{P} = \vec{0}$.

$2'/$ $\left|\left|\lambda\ \vec{P}\right|\right| = |\lambda| \left|\left|\vec{P}\right|\right|$ за всеки $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$.

$3'/$ (неравенство на триъгълника) За всеки два вектора $\vec{P},\ \vec{Q} \in \mathbb{R}^n$ имаме $\left|\left|\vec{P} + \vec{Q}\right|\right| \leq \left|\left|\vec{P}\right|\right| + \left|\left|\vec{Q}\right|\right|$.

По същия начин, ако за вектор $\vec{P} = (x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$ означим $\left|\left|\vec{P}\right|\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то и тук горните три условия са изпълнени.

Нормата и разстоянието са очевидно свързани: имаме $\rho(P, Q) = \left|\left|\vec{PQ}\right|\right| = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|$, където с $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ означаваме радиус-векторите на точките P и Q.

Твърдение 1. *Нека вече сме доказали, че нормата $||\vec{x}||$ в $\mathbb{R}^2$ удовлетворява условията $1'/$ - $3'/$. Тогава породеното от нея разстояние $\rho(P, Q) = \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right|$ удовлетворява условията 1/ - 3/.*

Наистина, 1/ веднага следва от $1'/$. Условието 2/ се получава от $2'/$ при $\vec{x} = \vec{P} - \vec{Q}$ и $\lambda = -1$. Накрая, използвайки $3'/$, имаме

$$\left|\left|\vec{P} - \vec{R}\right|\right| = \left|\left|\left(\vec{P} - \vec{Q}\right) + \left(\vec{Q} - \vec{R}\right)\right|\right| \leq \left|\left|\vec{P} - \vec{Q}\right|\right| + \left|\left|\vec{Q} - \vec{R}\right|\right|,$$

т.е. условието 3/. ■

Въведената по-горе норма е тясно свързана със скаларното произведение в $\mathbb{R}^2$, съотв. $\mathbb{R}^n$.

Скаларно произведение. Нека H е линейно пространство. Казваме, че в H е дефинирано *скаларно произведение*, ако на всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in H$ е съпоставено реалното число $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, удовлетворяващо долните свойства.

Свойства на скаларното произведение:

$1''$ (линейност): За всеки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}, \vec{y} \in H$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ имаме

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle \ , \ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \, .$$

$2''$ (симетричност): За всеки $\vec{x}, \vec{y} \in H$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \, .$$

$3''$ (положителна определеност): За всеки *ненулев* вектор $\vec{x} \in H$ имаме

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0.$$

В пространството $\mathbb{R}^n$ стандартното скаларно произведение се дава с формулата:

$$\left\langle \vec{P}, \vec{Q} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

където $\vec{P} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{Q} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Лесно се вижда, че то удовлетворява горните свойства (докажете!).

Скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ може да се изрази и геометрически:

$$\left\langle \vec{P}, \vec{Q} \right\rangle = ||P|| \, ||Q|| \cos \angle \left(\vec{P}, \vec{Q} \right),$$

където $\angle \left(\vec{P}, \vec{Q} \right)$ означава ъгъла между векторите $\vec{P}$ и $\vec{Q}$.

Може да се докаже, че двете определения съвпадат - виж зад. 4.

Ще изложим накратко някои основни свойства на скаларното произведения:

Твърдение 2.*(Неравенство на Коши-Шварц-Буняковски): За всеки два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in H$ е в сила неравенството*

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \, \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}.$$

Равенството се достига само в случая, когато векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ са колинеарни.

Доказателство. Да разгледаме квадратния тричлен

$$p(t)=\langle\vec{x}+t\vec{y},\vec{x}+t\vec{y}\rangle=At^2+2Bt+C,$$

където $A=\langle\vec{y},\vec{y}\rangle$, $B=\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$, $C=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle$. От свойство $3''$ се вижда, че $p(t)\geq 0$ за всички стойности на t. Следователно $p(t)$ не може да има два различни реални корена - иначе в интервала между тях неговите значения биха били отрицателни. Оттук се вижда, че неговата дискриминанта $D=4\left(B^2-AC\right)$ е по-малка или равна на нула, т.е. $B^2\leq AC$.

Остава да изследваме кога се достига равенството. В такъв случай дискриминантата D е равна на нула, което означава, че $p(t)$ има точно един реален корен - да го означим с t_0. Имаме

$$p\left(t_0\right)=\langle\vec{x}+t_0\vec{y},\vec{x}+t_0\vec{y}\rangle=0,$$

откъдето пак по свойство $3''$ получаваме $\vec{x}+t_0\vec{y}=0$, или, с други думи, $\vec{x}=-t_0\vec{y}$. ■

Определение (норма, породена от скаларното произведение). *Норма на вектора $\vec{x}\in H$ ще наричаме числото*

$$||\vec{x}||=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle}.$$

В частност, в пространствата $\mathbb{R}^n$ получаваме именно въведената по-горе норма: ако $\vec{P}=(x_1,\ldots,x_n)$, то

$$\left|\left|\vec{P}\right|\right|=\sqrt{\left\langle\vec{P},\vec{P}\right\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}.$$

Твърдение 3. *Нормата, породена от скаларното произведение, удовлетворява условията $1'/$ - $3'/$.*

Доказателство. Свойствата $1'$ и $2'$ са очевидни. Свойството $3'$ (неравенството на триъгълника) следва от неравенството на Коши-Шварц-Буняковски:

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2=\langle\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\rangle=\langle\vec{x},\vec{x}\rangle+2\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle+\langle\vec{y},\vec{y}\rangle=$$

$$=||x||^2+2\left\langle\vec{x},\vec{y}\right\rangle+||y||^2\leq||x||^2+2\,||x||\,||y||+||y||^2=\left(||x||+||y||\right)^2. \blacksquare$$

С това вече доказахме, че нормата в $\mathbb{R}^n$ удовлетворява свойствата $1'/$ - $3'/$, и следователно според твърдение 1 разстоянието удовлетворява свойствата $1/$ - $3/$.

Упражнения.

1. Нека H е пространство със скаларно произведение, и $||\vec{x}||$ е нормата в H, породена от него. Докажете, че е в сила теоремата на Питагор: за всеки $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, такива че $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, имаме

$$||\vec{x}+\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 .$$

Упътване. Използвайте, че $||\vec{x}+\vec{y}||^2 = \langle \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} \rangle$, и приложете свойство $1/$ (линейността) на скаларното произведение. Аналогично се решават и следващите две задачи.

2. Докажете, че за всяка норма, определена от скаларно произведение, е в сила равенството на успоредника:

$$2\left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2\right) = ||\vec{x}+\vec{y}||^2 + ||\vec{x}-\vec{y}||^2 .$$

(сумата на квадратите на страните на успоредника е равна на сумата на квадратите на неговите диагонали).

3. Докажете, че за всеки два вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$, е в сила равенството

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - ||\vec{x}-\vec{y}||^2\right) .$$

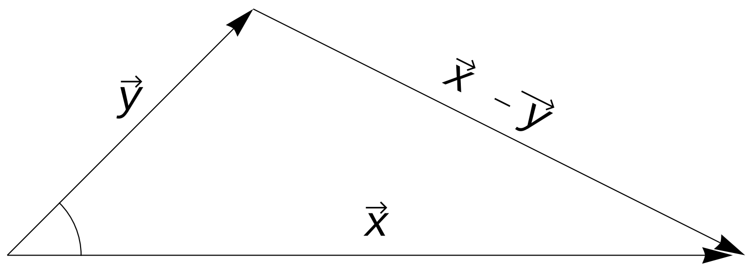
4. Докажете, че аналитичната и геометричната дефиниция на скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ съвпадат.

Упътване. Да разгледаме тригълника, образуван от векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$, приложени в една и съща точка (виж чертежа); страните му са равни на $||\vec{x}||$, $||\vec{y}||$ и $||\vec{x}-\vec{y}||$. Прилагайки косинусовата теорема за този триъгълник, получаваме:

$$||\vec{x}-\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2 - 2\,||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\left(\angle\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\right) .$$

Използвайки резултата на зад. 3, получаваме равенството

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = ||\vec{x}||\,||\vec{y}||\cos\left(\angle\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\right) .$$



Чертеж към задача 4.

Въпроси за самопроверка.

1. Посочете основните свойства:
- а/ на разстоянието
- б/ на нормата
- в/ на скаларното произведение.

2. Докажете, че ако нормата $||P||$ изпълнява свойствата $1'$ - $3'$, то разстоянието $\rho(P, Q) = ||P - Q||$ изпълнява свойствата 1 - 3.

3. Напишете неравенството на Коши - Шварц - Буняковски. Докажете с негова помощ, че ако скаларното произведение $\left\langle \vec{P}, \vec{Q} \right\rangle$ изпълнява свойствата $1''$ - $3''$, то нормата $\left|\left|\vec{P}\right|\right| = \sqrt{\left\langle \vec{P}, \vec{P} \right\rangle}$ изпълнява свойствата $1'$ - $3'$.

4. Напишете формулите за скаларно произведение на два вектора, за норма (дължина) на вектор, и за разстояние между две точки, в пространството $\mathbb{R}^2$.

1.2 Отворени и затворени множества. Сходимост на редици от точки.

Кръгови околности, отворени и затворени множества в $\mathbb{R}^n$. Както знаем, анализът върху реалната права се базира на отворените интервали в $\mathbb{R}$ и понятието околност (симетрична околност) на точка. За да развием анализа в многомерно пространство, ще трябва да въведем аналогични обекти в него, като имаме пред вид, че геометрията на подмножествата на многомерното пространство е много по-сложна от тази на едномерното.

Наличието на разстояние в $\mathbb{R}^n$ ни позволява да дефинираме понятието кръгова околност на дадена точка:

Под кръгова околност на точката $P_0 \in \mathbb{R}^n$ с радиус r разбираме отворен кръг (евентуално кълбо) с център P_0 и радиус r, т.е. множеството от всички точки P от $\mathbb{R}^n$, намиращи се на разстояние по-малко от r от точката P_0.

Кръговата околност се означава по следния начин:

$$B(P_0, r) = \{P : \rho(P, P_0) < r\}.$$

В едномерния случай, ако x_0 е реално число, $B(x_0, r)$ се състои от всички числа x, за които $|x - x_0| < r$. С други думи, това е симетричният интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$ с център x_0 и радиус r.

В случая на R^2 получаваме кръг (в обичайния смисъл на думата) с център P_0 и радиус r; наистина, ако $P_0 = (x_0, y_0)$, то $B(P_0, r)$ се състои от онези точки $P = (x, y)$, за които $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$. По същия начин, в R^3 получаваме кълбо с център P_0 и радиус r.

Нека сега M е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Ще разделим точките от $\mathbb{R}^n$ на три класа в зависимост от местоположението им спрямо M.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича вътрешна за M, ако съществува $r > 0$ такова, че $B(P, r) \subset M$.*

С други думи, точката е вътрешна за едно множество, ако тя се съдържа в него заедно с някоя своя кръгова околност.

Множеството на всички вътрешни точки на M се бележи с M^o.

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича външна за M, ако съществува $r > 0$ такова, че $B(P, r) \cap M = \emptyset$.*

С други думи, точката е вътрешна за M, ако тя се съдържа в допълнението му заедно с някоя своя кръгова околност, т.е. принадлежи на $(\mathbb{R}^n \backslash M)^0$.

Оставащите точки ще наричаме контурни:

Дефиниция. *Точката $P \in \mathbb{R}^n$ се нарича контурна за M, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за M.*

Множеството от контурните точки се нарича контур на M и се бележи с $b\ M$ или с $b(M)$.

Горната дефиниция не е конструктивна; по-добро описание на контура на едно множество се дава в следното твърдение:

Твърдение 4. *Една точка е контурна за M точно тогава, когато всяка нейна кръгова околност се пресича и с M, и с $\mathbb{R}^n \backslash M$.*

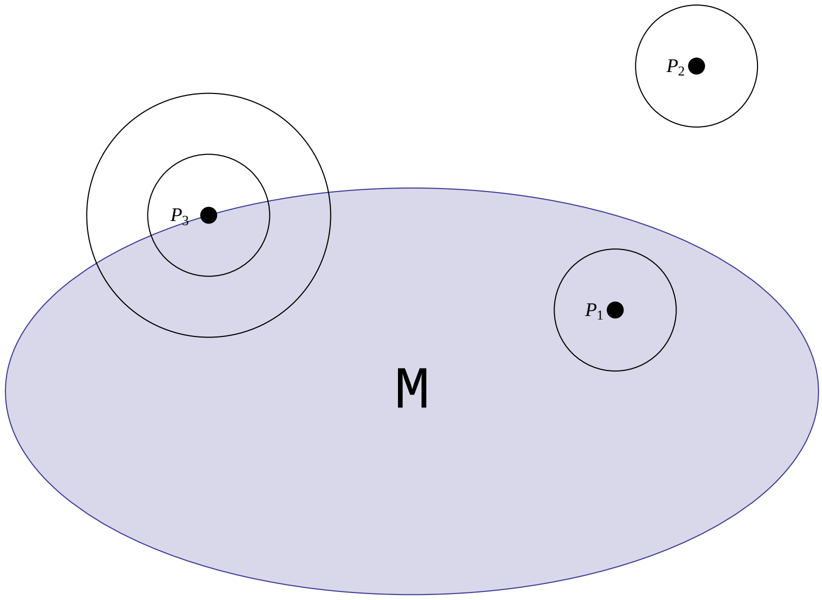
Доказателство. Ако точката P не е нито вътрешна, нито външна за M, то за всяко $r > 0$ кръговата околност $B(P, r)$ не може да се съдържа нито в M, нито в $\mathbb{R}^n \backslash M$. Това означава, че тя ще има общи точки и с $\mathbb{R}^n \backslash M$, и с M.

Обратно, ако всяка кръгова околност на P има общи точки с M и с $\mathbb{R}^n \backslash M$, то очевидно никоя кръгова околност на P не може да се съдържа в M или в $\mathbb{R}^n \backslash M$, т.е. P не е вътрешна или външна за M. ■

Следствие. *Контурите на множеството M и на неговото допълнение $\mathbb{R}^n \backslash M$ съвпадат.*

Забележка. Дадените по-горе дефиниции зависят от това в кое евклидово пространство разглеждаме множеството M. Така например, нека I е подинтервал на правата $\mathbb{R}$. Тогава неговата вътрешност в смисъл на горната дефиниция съвпада с множеството на вътрешните му точки в обичайния смисъл, т.е. съвпада с интервала, евентуално с изключени крайни точки. От друга страна, ако разгледаме същия интервал I като подмножество на оста x в равнината $\mathbb{R}^2$, то вътрешността му е празна, и той се състои само от контурни точки (докажете!).

Ясно е, че външните за M точки не принадлежат на M; следователно точките, принадлежащи на M, са вътрешни или контурни. Това



Вътрешна (P_1), външна (P_2), контурна (P_3) точки за множеството M.

дава $M \subset M^o \cup b(M)$. От друга страна, тези две множества не са длъжни да съвпадат; наистина, точките от контура на M могат и да не му принадлежат. Оттук получаваме една класификация на подмножествата на $\mathbb{R}^n$, която играе основна роля по-нататък:

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича* <u>*отворено*</u> *в $\mathbb{R}^n$, ако то не съдържа точки от контура си. Под* <u>*околност*</u> *на дадена точка ще разбираме отворено множество, което я съдържа.*

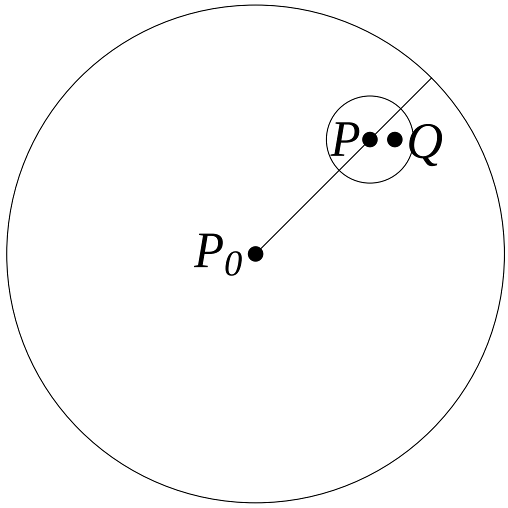
Ще разгледаме и другият краен случай:

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ се нарича* <u>*затворено*</u> *в $\mathbb{R}^n$, ако то съдържа всички точки на контура си.*

Ще отбележим, че в общия случай едно множество може да съдържа някои точки от контура, а други да не съдържа. С други думи, "повечето" множества в $\mathbb{R}^n$ не са нито отворени, нито затворени.

Както видяхме по-горе, контурите на едно множество и неговото допълнение съвпадат. Следователно, ако M не съдържа нито една точка от bM, то $\mathbb{R}^n \backslash M$ ще съдържа всички точки на bM, и обратно. Оттук получаваме:

Твърдение 2. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е отворено точно тогава, когато неговото допълнение в $\mathbb{R}^n$ е затворено.*



Отвореният кръг е отворено множество.

Забележка. Лесно се вижда, че множеството M^o от вътрешните точки на M е отворено – очевидно това е най-голямото отворено множество, съдържащо се в M. Множеството $\overline{M} = M \cup bM$ (което се нарича затворена обвивка на M) е затворено, защото допълнението му съвпада с външността на M. Всяко затворено множество, което съдържа M, ще съдържа и $\overline{M}$ (докажете). С други думи, $\overline{M}$ е най-малкото затворено множество, съдържащо M.

Пример. Отвореният кръг е отворено множество.

Доказателство. Нека P е произволна точка от отворения кръг $B\left(P_0, r\right)$ с център P_0 и радиус r. Това означава, че $\rho\left(P_0, P\right) < r$. Да изберем ε такова, че $0 < \varepsilon < r - \rho\left(P_0, P\right)$; ще докажем, че $B(P, \varepsilon) \subset B\left(P_0, r\right)$. Наистина, нека $Q \in B(P, \varepsilon)$. Тогава по неравенството на триъгълника получаваме, че

$$\rho\left(P_0, Q\right) \leq \rho\left(P_0, P\right) + \rho\left(P, Q\right) < \rho\left(P_0, P\right) + \varepsilon < r,$$

т.е. Q принадлежи на $B\left(P_0, r\right)$. ■

По същия начин се доказва, че затвореният кръг, т.е. множеството от точки P, за които $\rho\left(P_0, P\right) \leq r$, е затворено множество. И в двата случая контура на кръга съвпада с неговата гранична окръжност (или сфера,...), т.е. с множеството $S\left(P_0, r\right) = \{P : \rho\left(P_0, P\right) = r\}$.

Сходимост на редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща към точката P_0 (пишем $P_k \to P_0$, или $\lim_{k\to\infty} P_k = P_0$), ако*

$$\rho(P_k, P_0) \ \to\ 0.$$

По-подробно, за всяко положително ε съществува номер ν, така че за всяко естествено $k > \nu$ да имаме $\rho(P_k, P_0) < \varepsilon$.

Казано по друг начин: Всяка кръгова околност на граничната точка съдържа всички членове на редицата освен краен брой (или: всички от известно място нататък).

Сходимостта в $\mathbb{R}^n$ може лесно да се сведе към сходимост на числови редици. Наистина, нека точката P_k да е с координати $\left(x_1^k, \ldots, x_n^k\right)$, и съответно P_0 - с $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогава имаме

Теорема 3. *Редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ клони към P_0 тогава и само тогава, когато за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ редицата $\left\{x_i^k\right\}$ от i-тите координати клони по k към i-тата координата x_i^0 на P_0.*

С други думи, редицата от първите координати трябва да клони към първата координата на граничната точка, от вторите - към втората координата, и т.н.

В равнината, редицата от точки $P_k = (x_k, y_k)$ клони към точката $P_0 = (x_0, y_0)$ точно тогава, когато $x_k \to x_0$ и $y_k \to y_0$.

Доказателство. За простота ще разгледаме случая на $\mathbb{R}^2$. Нека $\rho(P_k, P_0) \ \to\ 0$. Тогава имаме:

$$0 \le |x_k - x_0| = \sqrt{|x_k - x_0|^2} \le \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = \rho(P_k, P_0)$$

и по лемата за полицаите $\lim_{k\to\infty} |x_k - x_0| = 0$. По същият начин се вижда, че $0 \le |y_k - y_0| \le \rho(P_k, P_0)$ и следователно $y_k \to y_0$.

Обратно, ако е дадено, че $|x_k - x_0| \ \to\ 0$ и $|y_k - y_0| \ \to\ 0$, след повдигане в квадрат, сумиране, и коренуване, получаваме, че $\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} \to 0$. ■

От теоремата веднага се вижда, че сходимостта в $\mathbb{R}^n$ е съгласувана с линейните операции. По-точно, имаме:

Следствие. Ако $P_k \to P_0$ и $Q_k \to Q_0$ в $\mathbb{R}^n$, и λ_k е числова редица, клоняща към λ_0, то

$$P_k + Q_k \to P_0 + Q_0 \quad , \quad \lambda_k \, P_k \to \lambda_0 \, P_0.$$

Теорема 3 ни дава възможност да пренесем условието на Коши за сходимост, доказано в I §1.6 за числови редици, към редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Казваме, че редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ удовлетворява условието на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν такова, че при $k > \nu$, $l > \nu$ да имаме $\rho\,(P_k, P_l) < \varepsilon$.*

Теорема 4. *Една редица от точки на $\mathbb{R}^n$ е сходяща тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши.*

Доказателство. В едната посока твърдението лесно се доказва непосредствено от дефиницията за сходимост. Нека $P_k \to P_0$. Да вземем произволно $\varepsilon > 0$ и да изберем ν такова, че при $k > \nu$ да имаме $\rho\,(P_k, P_0) < \varepsilon/2$. Тогава при $k > \nu$, $l > \nu$ имаме $\rho\,(P_k, P_l) \leq \rho\,(P_k, P_0) + \rho\,(P_0, P_l) < \varepsilon$.

За доказателство на обратното твърдение ще използваме, че за редици от числа то вече е доказано. Ако условието на Коши е изпълнено, то за всяко $i = 1, \ldots, n$ при $k > \nu$, $p > \nu$ имаме $\left|x_i^k - x_i^l\right| \leq \rho\,(P_k, P_l) < \varepsilon$. Така редицата $\left\{x_i^k\right\}_{k=1,2,\ldots}$ от i-тите координати на точките P_k удовлетворява условието на Коши и следователно е сходяща. Да означим границата и чрез x_i^0. Тогава от теорема 3 следва, че редицата P_k клони към точката $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. ■

Характеризация на затворените множества. Разглеждането на сходимостта позволява да се даде еквивалентна дефиниция на понятието затворено множество:

Теорема 5. *Едно подмножество F на $\mathbb{R}^n$ е затворено точно тогава, когато съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи.*

С други думи, ако P_k е редица от точки на F и $P_k \to P_0$, то и P_0 принадлежи на F.

Доказателство. Нека F е затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, и редицата P_k клони към P_0, като $P_k \in F$ за всяко естествено k. Трябва да докажем, че и $P_0 \in F$.

Наистина, нека допуснем, че P_0 не принадлежи на F. Точката P_0 може да бъде вътрешна. външна или контурна за F. По дефиниция всички вътрешни точки на F принадлежат на F. Тъй като F е затворено, то съдържа и всички свои контурни точки. Така P_0 може да бъде само външна за F. Следователно можем да намерим $r > 0$ такова, че $B\,(P_0, r)$ не пресича F. От друга страна, по дефиницията за сходимост при достатъчно голямо k имаме $P_k \in B\,(P_0, r)$. Това обаче противоречи на предположението, че всички точки на редицата са в F.

Обратно, нека F съдържа границите на всички сходящи редици от свои елементи; ще докажем, че F съдържа контурните си точки. Нека P_0 е произволна точка от контура на F: ще конструираме редица P_k от точки на F. клоняща към P_0. Наистина, да разгледаме кръговете $B\,(P_0, 1/k)$ с център P_0 и радиус $1/k$. От твърдение 1 следва, че всеки от тези кръгове има непразно сечение с F и следователно съществува точка $P_k \in F \cap B\,(P_0, 1/k)$. Тъй като $\rho\,(P_k, P_0) < 1/k$, то $\rho\,(P_k, P_0) \to 0$, и следователно $P_k \to P_0$. Тъй като всички точки P_k са в F, то от предположението следва, че и $P_0 \in F$, което трябваше да се докаже. ■

Забележка. От доказателството се вижда, че ако добавим към дадено множество M границите на всички сходящи редици от негови елементи, ще получим точно затворената му обвивка $\overline{M} = M \cup bM$.

Точки на сгъстяване и подредици. Както и в едномерния случай, можем да въведем понятието <u>точка на сгъстяване</u> на дадена редица от точки на $\mathbb{R}^n$:

Дефиниция. *Казваме, че точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ кръговата околност $B\,(P_0, \varepsilon)$ на P_0 съдържа безкрайно много точки от редицата.*

Това означава, че всяка кръгова околност на P_0 съдържа точки с произволно големи номера. Следователно горната дефиниция може да се изкаже и по друг начин:

Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и естествено n съществува номер $m > n$ такъв, че $P_m \in B\,(P_0, \varepsilon)$.

Ясно е, че ако редицата $\{P_k\}$ притежава граница P_0, то точката P_0 е и единствена точка на сгъстяване на тази редица. В общия случай една редица от точки може да има много точки на сгъстяване. Така, в едномерния случай редицата $\{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots\}$ има като точки на сгъстяване точките 0 и 1; напишете подобен пример в многомерния случай.

Подредици. Ще напомним понятието подредица на дадена редица: ако ни е дадена редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на $\mathbb{R}^n$ и строго монотонно растяща система $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа, ние може да си образуваме редицата $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, която наричаме подредица на дадената.

Твърдение 6. *Ако редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ е сходяща към точката P_0, то всяка нейна подредица е сходяща към същата граница.*

Доказателство. Наистина, след като извън всяка кръгова околност на P_0 от вида $B(P_0, \varepsilon)$ се намират само краен брой членове на началната редица, то извън нея може да има най-много краен брой членове на подредицата. ■

Както и в едномерния случай, понятията подредица и точка на сгъстяване са тясно свързани:

Теорема 7. *Точката P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ точно тогава, когато съществува подредица $\{P_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, клоняща към P_0.*

Доказателство. Ако $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$, то всеки отворен кръг от вида $B(P_0, \varepsilon)$ съдържа безкрайно много членове на подредицата (всички освен краен брой) и следователно безбройно много членове на дадената редица.

Обратно, нека P_0 е точка на сгъстяване на редицата $\{P_k\}$. Можем да изберем номер k_1 такъв, че $P_{k_1} \in B(P_0, 1)$. Да разгледаме кръга $B(P_0, 1/2)$; тъй като според дефиницията на точка на сгъстяване той съдържа членове на редицата с произволно големи номера, ние можем да намерим естествено число k_2 такова, че $k_2 > k_1$ и $P_{k_2} \in B(P_0, 1/2)$. Продължавайки по същия начин, при намерени вече $k_1 < k_2 < \ldots < k_{l-1}$, ние можем да изберем k_l така, че $k_l > k_{l-1}$ и $P_{k_l} \in B(P_0, 1/l)$. С това получихме безкрайна редица $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ от естествени числа такива, че $\rho(P_{k_l}, P_0) < 1/l$, откъдето $\lim_{l\to\infty} P_{k_l} = P_0$. ■

Компактни множества и теорема на Болцано-Вайерщрас. В тази точка ще покажем как теоремата на Болцано-Вайерщрас, известна в едномерния случай, се пренася в многомерното пространство.

Едно подмножество M на $\mathbb{R}^n$ ще наричаме ограничено, ако числовото множество $\{\rho(0,P)\}_{P\in M}$ на разстоянията на всички точки от M до началото на координатната система е ограничено отгоре. Лесно се вижда, че M е ограничено точно тогава, когато всички координати x_i, $i=1,\ldots,n$ на всички негови точки $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ са ограничени по модул от някаква константа. Една редица $\{P_k\}$ ще наричаме ограничена, ако множеството от нейните точки е ограничено.

Теорема 8. (Болцано-Вайерщрас) *Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ притежава поне една точка на сгъстяване.*

Като се вземе пред вид теорема 7, се получава следната еквивалентна формулировка:

Всяка ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ съдържа сходяща подредица.

Доказателство. При $n=1$ теоремата е доказана в първата част на курса, като се използва последователно разделяне на интервала, съдържащ членовете на редицата, на две равни части. Това доказателство може лесно да се извърши в многомерното пространство, но по-краткия начин е да използваме едномерния случай за доказателство на многомерния.

За удобство ще докажем случая $n=2$. Нека $P_k=(x_k,y_k)$ е ограничена редица от точки на равнината. Тогава съществува константа C такава, че $|x_k|,|y_k|\le C$. От ограничената числова редица $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ можем да изберем сходяща подредица $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$; нека $\lim_{l\to\infty}x_{k_l}=x_0$. Да разгледаме сега съответната подредица от вторите координати $\{y_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$. Тъй като тя също е ограничена, можем на свой ред да намерим нейна подредица $\left\{y_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\ldots}\to y_0$. Тъй като редицата $\left\{x_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\ldots}$ е подредица на редицата $\{x_{k_l}\}_{l=1,2,\ldots}$, то според твърдение 6 тя също клони към x_0. Тогава, по теорема 3, редицата от точки $P_{k_{l_p}}=\left(x_{k_{l_p}},y_{k_{l_p}}\right)$ е подредица на дадената и клони към точката $P_0=(x_0,y_0)$.

За редици от точки на $\mathbb{R}^n$ при по-големи стойности на n доказателството се извършва по същия начин. Разликата е, че трябва n пъти да се избират подредици на подредиците ..., като в крайна сметка отново се получава покоординатно сходяща подредица на дадената редица. ■

Следствие 9. Ако една ограничена редица от точки на $\mathbb{R}^n$ има само една точка на сгъстяване, то тя е сходяща към тази точка.

Доказателство. Нека $\{P_k\}$ е ограничена редица от точки и P_0 е нейната единствена точка на сгъстяване. Да допуснем, че $\{P_k\}$ не клони към P_0. Това означава, че съществува $\varepsilon > 0$ такова, че извън кръга $B(P_0, \varepsilon)$ остават безкрайно много членове на редицата. Повтаряйки конструкцията на теорема 7, ние можем да конструираме подредица P_{k_l} на дадената, чиито точки са извън $B(P_0, \varepsilon)$. За тази подподредица е приложима теорема 8, и ние може да намерим на свой ред нейна сходяща подредица $\left\{P_{k_{l_p}}\right\}_{p=1,2,\dots}$. Да означим границата и с $\widetilde{P}$. Ясно е, че $\widetilde{P} \neq P$. От друга страна, $\widetilde{P}$ е точка на сгъстяване на подредицата P_{k_l}, а следователно и на дадената редица $\{P_k\}$, което противоречи на условието на теоремата. ■

Дефиниция. *Едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ наричаме компактно, ако то е ограничено и затворено.*

Като използуваме това понятие, можем да дадем друга формулировка на теоремата на Болцано-Вайерщрас:

Теорема 10. *Нека $M \subset \mathbb{R}^n$ е компактно множество. Тогава от всяка редица от негови точки може да се избере подредица, клоняща към точка от M.*

Доказателство. Нека M е компактно и $\{P_k\}$ е редица от негови точки. Тъй като M е ограничено, то същото е вярно и за редицата $\{P_k\}$, и ние можем да изберем нейна сходяща подредица. По теорема 5 от затвореността на M следва, че границата на подредицата също принадлежи на M. ■

Може да се докаже, че и обратното твърдение е изпълнено: Ако множеството M съдържа границите на всички свои сходящи редици, то това множество е компактно, т.е. ограничено и затворено.

Упражнения.

1. Докажете, че:

а/ Обединение на произволна фамилия отворени множества е също отворено.

б/ Сечение на краен брой отворени множества е отворено.

2. Докажете, че:

а/ Сечение на произволна фамилия затворени множества е също затворено.

б/ Обединение на краен брой затворени множества е затворено.

Упътване. Използвайте твърдение 2 и резултата на задача 1.

3. Докажете, че множеството от точките на сгъстяване на дадена редица е затворено.

Упътване. Нека $\{P_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, е редица от точки в $\mathbb{R}^n$, а $\{Q_p\}$ е редица от нейни точки на сгъстяване, клоняща към точката Q_0. Покажете, че съществуват индекси $k_1 < k_2 < \ldots < k_p < \ldots$ такива, че $\rho\left(P_{k_p}, Q_p\right) < 1/p$ за всяко естествено p. Докажете, че подредицата $\left(P_{k_p}\right)$ клони към Q_0.

Въпроси за самопроверка.

1. Дефиниция на вътрешни, външни и контурн точки на дадено множество.

2. Дефинирайте отворено и затворено множество в $\mathbb{R}^n$. Съществуват ли и други множества?

3. Докажете, че затвореният кръг е затворено множество.

4. Дефиниция за сходимост на редици от точки в $\mathbb{R}^n$. Връзка между сходимостта на редица от точки и съответните редици от първите, вторите и т.н. координати.

5. Характеристично свойство на затворените множества. (Теорема 5).

6. Точки на сгъстяване на дадена редица. Връзка между точка на сгъстяване и подредица.

7. Теорема на Болцано - Вайерщрас.

8. Дефиниция на компактно множество (= ограничено + затворено). Втора форма на теоремата на Болцано - Вайерщрас (теорема 10).

1.3 Непрекъснатост на функции и изображения.

Както и в първата част на анализа, при нас ще играят основна роля понятията функция и изображение. Нека D е подмножество на $\mathbb{R}^n$. Казваме, че е дадено изображение от D в $\mathbb{R}^m$, ако на всяка точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ от D е съпоставена точката $f(x)$ от $\mathbb{R}^m$. В такъв случай се казва още, че f е функция с дефиниционна област D и със стойности в $\mathbb{R}^m$. Вместо $f(x)$ понякога се пише $f(x_1, \ldots, x_n)$.

В случая $m = 1$, т.е. функцията f взема стойности в множеството на реалните числа, ще казваме, че f е числова, или още скаларна, функция. В многомерния случай ще казваме, че f е векторна функция. Всяка векторна функция може да бъде описана чрез числови функции; наистина, нека f е функция, дефинирана в $D \subset \mathbb{R}^n$ и вземаща стойности в $\mathbb{R}^m$. Да означим чрез $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ координатите на точката $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Тогава $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ са числови функции върху D, които определят напълно функцията f. Тези функции се наричат координатни функции за изображението f.

Ще се занимаем с понятията граница на функция и непрекъснатост. Изложението почти дословно повтаря едномерния случай. Отново имаме две еквивалентни определения за граница на функция (и съответно две определения за непрекъснатост): - на Хайне и на Коши.

Определение на Хайне за граница на функция. *Дадена е функцията $f(P)$ с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ със значения в $\mathbb{R}^m$. Нека $P_0 \in \overline{D}$, и Q е точка от $\mathbb{R}^m$. Казваме, че функцията $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$, ако за всяка редица $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на D, за която $P_k \to P_0$ имаме $f(P_k) \to Q$ в $\mathbb{R}^m$.*

Определение на Коши за граница на функция. *При горните условия казваме, че $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяка точка P от D, за която $\rho(P, P_0) < \delta$, имаме $\rho(f(P), Q) < \varepsilon$.*

Теорема 1. *Определенията на Хайне и Коши за граница на функция са еквивалентни.*

Доказателство. Ще започнем с по-лесната част - ще допуснем, че $f(P)$ клони към Q при $P \to P_0$ в смисъл на Коши, и ще докажем, че това е вярно и в смисъл на Хайне. Наистина, нека $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ е редица от точки на D, клоняща към P_0. Ще докажем, че $f(P_k) \to Q$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$, и да вземем съответното $\delta > 0$ по определението на Коши. Тогава по определението на сходимост на редици от точки може да се намери ν такова, че $\rho(P_k, P_0) < \delta$ за всяко $k > \nu$. Следователно при $k > \nu$ имаме $\rho(f(P), Q) < \varepsilon$, което и трябваше да се докаже.

Доказателството, че от определението на Хайне следва определението на Коши, се извършва чрез допускане на противното. Ще допуснем, че определението на Коши не е удовлетворено, и ще докажем, че не е изпълнено и определението на Хайне. Твърдението "$f(P)$ не клони в смисъл на Коши към Q при $P \to P_0$" означава, че съществува число $\varepsilon_0 > 0$ такова, че по-нататъшната част от определението не е изпълнена: т.е. за всяко $\delta > 0$ съществува точка $P_\delta \in D$ такава, че $\rho(P_\delta, P_0) < \delta$, но $\rho(f(P_\delta), Q) \geq \varepsilon_0$. За да сведем нещата до редици, да дадем на δ стойности $\delta_1 = 1, \delta_2 = 1/2, \ldots, \delta_k = 1/k, \ldots$ и да означим $P_k = P_{\delta_k}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $P_k \in D$, $\rho(P_k, P_0) < 1/k$ и $\rho(f(P_k), Q) \geq \varepsilon_0$. С други думи, редицата $\{P_k\}_{k=1,2,\ldots}$ от точки на D клони към P_0, но редицата от функционалните стойности $f\{P_k\}$ не клони към Q. ■

Понятието граница на функция лесно се свежда към случая на граници на числови функции. Нека $f_1(P), \ldots, f_m(P)$ са координатните функции на изображението $f(p)$, и нека $Q = (y_1, \ldots, y_m)$. Тогава:

Твърдение 2. *Имаме* $\lim_{P \to P_0} f(P) = Q$ *тогава и само тогава, когато* $\lim_{P \to P_0} f_i(P) = y_i$ *за всяко* i *между* 1 *и* m.

Доказателство. По теорема 3 от §2 редицата $f(P_k)$ клони към Q точно тогава, когато $f_i(P_k) \to y_i$ за $i = 1, \ldots, m$. Оттук, използвайки дефиницията на Хайне, получаваме твърдението. ■

От горното твърдение веднага следва, че при линейните операции - сума на векторни функции, и произведение на векторна функция с числова функция - може да се извършва граничен преход. По-точно, имаме:

Твърдение 3.

а/ Ако $f(P)$ и $g(P)$ са векторни функции със стойности в $\mathbb{R}^m$, притежаващи граници при $P \to P_0$, то $\lim_{P\to P_0}(f(P)+g(P)) = \lim_{P\to P_0} f(P) + \lim_{P\to P_0} g(P)$.

б/ Ако $\lambda(P)$ е числова функция, а $f(P)$ - векторна функция, и двете функции притежават граници при $P \to P_0$, то $\lim_{P\to P_0} \lambda(P)\ f(P) = \lim_{P\to P_0} \lambda(P)\ \lim_{P\to P_0} f(P)$.

Непрекъснатост на функции.

Определение. *Нека е дадена функцията $f(P)$ с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ и със значения в $\mathbb{R}^m$. Ще казваме, че $f(P)$ е непрекъсната в точката $P_0 \in D$, ако*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Двете еквивалентни определения на понятието граница на функция водят до две еквивалентни определения на непрекъснатостта:

Непрекъснатост по Хайне. *Функцията $f(P)$ е непрекъсната в точката P_0, ако за всяка редица $\{P_k\}_{k=1,2,\dots}$ от точки на D, за която $P_k \to P_0$ имаме $f(P_k) \to f(P_0)$ в $\mathbb{R}^m$.*

Непрекъснатост по Коши. *Функцията $f(P)$ е непрекъсната в точката P_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяка точка P от D, за която $\rho(P, P_0) < \delta$, имаме $\rho(f(P), f(P_0)) < \varepsilon$.*

Разбира се, тези две определения са еквивалентни, и ние можем да използваме това определение, което е по-удобно в дадена конкретна ситуация. Така, от определението на Хайне и от твърдение 3 веднага следва:

Твърдение 4. *Сума на две непрекъснати векторни функции (със значение в едно и също пространство $\mathbb{R}^m$), както и произведение на непрекъсната скаларна функция с непрекъсната векторна функция, са също непрекъснати.*

Непрекъснатост на съставна функция. Нека g е изображение с дефиниционна област $E \subset \mathbb{R}^n$ и стойности в $\mathbb{R}^m$, и f е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^m$ и стойности в $\mathbb{R}^p$. Да предположим, че

$g(E) \subset D$. Тогава можем да определим изображението F с дефиниционна област D и стойности в $\mathbb{R}^p$ с формулата

$$F(P) = f(g(P)), \quad P \in E$$

. Изображението F се нарича сложно, или съставно, изображение. Казва се още, че изображението F е суперпозиция на изображенията f и g.

Частен случай: нека $f(x, y)$ е функция на две променливи, дефинирана за $(x, y) \in D$. Нека $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са функции на променливото t такива, че $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$. Полагайки $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, получаваме съставната функция

$$F(t) = f\left(\varphi(t), \psi(t)\right).$$

Както се вижда от следващата теорема, суперпозицията на две непрекъснати изображения е също непрекъснато изображение:

Теорема 5. *Нека функцията f е непрекъсната в точката $P_0 \in D$, и g е непрекъсната в $Q_0 = f(P_0)$. Тогава съставната функция $F(P) = f(g(P))$ също е непрекъсната в P_0.*

Доказателство. За улеснение, ще докажем теоремата в дадения по-горе частен случай. Нека $t_k \to t_0$. Да означим $P_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $P_0 = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$. Тъй като $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са непрекъснати функции, то P_k клони към P_0. От непрекъснатостта на $f(x, y)$ получаваме, че

$$F(t_k) = f(P_k) \to f(P_0) = F(t_0). \blacksquare$$

Пример. Следващият пример показва, че непрекъснатостта по две променливи е нещо повече от непрекъснатостта по всяка от тях поотделно. Нека $f(x, y)$ е определена с формулата

$$f(x, y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2} \text{ при } (x, y) \neq (0, 0)\,,\ f(0, 0) = 0.$$

Тогава при всяко фиксирано y функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на променливата x, и при всяко фиксирано x - като функция на y. В точката $(0, 0)$ обаче функцията не е непрекъсната. Наистина, ако $P_n = (1/n, 1/n)$, то $P_n \to (0, 0)$, но $f(P_n) \to 1/2$. Нещо повече, ако разгледаме редица от точки в $\mathbb{R}^2$, която клони към началото на координатите, намирайки се върху правата с уравнение $y = \lambda x$, то редицата от функционалните стойности клони към $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$, т.е. граничната стойност зависи от посоката, по която се стремим към точката.

Свойства на непрекъснатите функции върху компактно множество. Теоремите на Вайерщрас за непрекъснати функции върху краен и затворен интервал лесно се пренасят за случая на непрекъснати числови функции върху компактни (т.е. ограничени и затворени) подмножества на $\mathbb{R}^n$, като доказателствата отново се основават на теоремата на Болцано - Вайерщрас (т. 10 от предния параграф).

Теорема 7. (Първа теорема на Вайерщрас). *Всяка непрекъсната числова функция, дефинирана върху компактно множество, е ограничена.*

Доказателство. Нека числовата функция $f(P)$ е дефинирана и непрекъсната за $P \in D$, където D е компактно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Да допуснем, че f не е ограничена, например, отгоре. Тогава съществува редица от точки $P_k \in D$ такива. че $f(P_k) \geq k$. Според §2.10 ние можем да изберем нейна сходяща подредица $P_{k_l} \to P_0 \in D$. Тогава от една страна $f(P_{k_l}) > k_l$ и следователно $f(P_{k_l}) \to +\infty$. От друга страна, от непрекъснатостта на f в точката P_0 следва, че $f(P_{k_l}) \to f(P_0)$, и полученото противоречие доказва теоремата. ■

Теорема 8. (Втора теорема на Вайерщрас). *Всяка непрекъсната числова функция, дефинирана върху компактно множество, достига най-голямата и най-малката си стойност.*

Доказателство. Нека $M = \sup_{P\in D} f(P)$. Тогава за всяко естествено k числото $M - 1/k$ вече не е горна граница за значенията на функцията, и ние може да намерим точка $P_k \in D$ такава. че $M - 1/k < f(P_k) \leq M$. Отново ще изберем сходяща подредица $P_{k_l} \to P_0$. Като извършим граничен преход в неравенствата

$$M - \frac{1}{k_l} < f(P_{k_l}) \leq M,$$

получаваме $M \leq f(P_0) \leq M$, т.е. $f(P_0) = M$.

Твърденията за ограниченост отдолу и за достигане на точната долна граница се получават аналогично. ■

Равномерна непрекъснатост. И това понятие се пренася от едномерния случай почти без изменения:

Определение. *Изображението f с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$ се нарича равномерно непрекъснато в D, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всеки две точки P и Q от D, за които $\rho(P, Q) < \delta$, имаме $\rho(f(P), f(Q)) < \varepsilon$.*

Теорема 10. (Теорема на Кантор). *Всяко изображение, дефинирано върху компактно множество и непрекъснато в него, е и равномерно непрекъснато.*

Доказателство. Да допуснем, че избражението f, дефинирано и непрекъснато върху компактното множество D, не е равномерно непрекъснато. Тогава съществува число $\varepsilon_0 > 0$ такова, че по-нататъшната част от определението не е изпълнена: т.е. за всяко $\delta > 0$ съществуват точки $P_\delta, Q_\delta \in D$ такава, че $\rho(P_\delta, Q_\delta) < \delta$, но $\rho(f(P_\delta), f(Q_\delta)) \geq \varepsilon_0$. Да дадем на δ стойности $\delta_k = 1/k, \dots$ и да означим $P_k = P_{\delta_k}, Q_k = Q_{\delta_k}$. Тогава тези точки удовлетворяват условията $\rho(P_k, Q_k) < 1/k$ и $\rho(f(P_k), f(Q_k)) \geq \varepsilon_0$. Нека $\{P_{k_l}\}\, l = 1, 2, \dots$ е сходяща подредица на редицата $\{P_k\}$. Да означим границата и с P_0. Очевидно редицата $\{Q_{k_l}\}\, l = 1, 2, \dots$ клони към същата граница. Тогава $f(P_{k_l}) \to f(P_0)$, $f(Q_{k_l}) \to f(Q_0)$, и $f(P_{k_l}) - f(Q_{k_l}) \to \vec{0}$, което противоречи на допускането, че $\rho(f(P_{k_l}), f(Q_{k_l})) \geq \varepsilon_0$. ■

Линейно свързани множества. Теорема за междинните стойности. В първата част на анализа се доказва следното свойство на непрекъснатите функции: нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху интервал (вида на интервала не е от значение). Ако A и B са значенията на функцията в две точки от дефиниционния интервал, и C е число между A и B, то съществува точка, в която $f(x)$ взема стойност C. Теоремата не е вярна, ако пропуснем условието, че дефиниционата област е интервал; например, нека дефиниционното множество е обединение на два непресичащи се интервала, и $f(x)$ е равна на константата 0 върху първия, и на 1 - върху втория. Така определената функция е непрекъсната, но междинната стойност $1/2$ не се достига в никоя точка.

За да успеем да пренесем тази теорема в многомерния случай, трябва да можем да правим разграничение между двата случая за подмножества на $\mathbb{R}^n$. Общо казано, трябва да разделим множествата, които "се състоят от едно парче от тези, които са "от няколко парчета". Това води до понятието линейна свързаност на множество. Това е множество, всеки две точки на което може да бъдат съединени с непрекъсната линия. Предварително ще трябва да въведем понятието непрекъсната крива линия в $\mathbb{R}^n$:

Определение. *Под непрекъсната крива линия в* $\mathbb{R}^n$ *разбираме непрекъснато изображение на крайния и затворен интервал* $[a,b]$ *в пространството* $\mathbb{R}^n$*.*

Така, всяка непрекъсната крива в $\mathbb{R}^n$ се задава с векторна функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $t \in [a,b]$. Със същия термин ще означаваме и множеството от стойностите на $\varphi(t)$: $\Gamma_\varphi = \{\varphi(t)\}_{t\in[a,b]}$. Точките $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ се наричат съответно начална и крайна точка на кривата Γ_φ.

Определение. *Едно множество* $D \subset \mathbb{R}^n$ *се нарича линейно свързано, ако за всеки две точки* P*,* Q *от* D *съществува непрекъсната крива* Γ_φ*, съдържаща се в* D*, с начална точка* P *и крайна точка* Q*.*

Например, всяко изпъкнало множество е линейно свързано. Ще напомним, че едно множество се нарича изпъкнало, ако то съдържа заедно с всеки две свои точки и отсечката, която ги свързва. Такива множества са кръга, правоъгълника, триъгълника и др. Отсечката, която свързва точките P и Q, може да се параметризира по формулата $\varphi(t) = (1-t)\,P + t\,Q$, и следователно представлява непрекъсната крива, съединяваща тези точки.

Обратно, обединението на два непресичащи се кръга не е линейно свързано (докажете!),

Теорема 11. (Теорема за междинните стойности.) *Нека* f *е непрекъсната функция върху линейно свързаното множество* $D \subset \mathbb{R}^n$*,* P *и* Q *са две точки от* D*, и* $A = f(P)$*,* $B = f(Q)$*. Нека* C *е число между* A *и* B*. Тогава съществува точка* $L \in D$ *такава, че* $f(L) = C$*.*

Доказателство. Ще сведем задачата към едномерния случай, доказан в I §1.11, следствие 2. Нека изображението $\varphi(t):\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ да определя непрекъсната крива, лежаща в D и съединяваща точките P и Q. Да определим функцията на едно променливо $F(t)$ по формулата $F(t) = f(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$. Тогава имаме $F(a) = A$, $F(b) = B$, и следователно съществува точка $\xi \in (a, b)$ такава, че $F(\xi) = C$. Нека $L = \varphi(\xi)$; тогава $f(L) = F(\xi) = C$. ■

Въпроси за самопроверка.

1. Формулирайте дефинициите на Хайне и Коши за граница на функция в дадена точка.

2. Формулирайте дефинициите на Хайне и Коши за непрекъснатост на функция в дадена точка.

3. Дайте пример (различен от този в текста) на функция, която не е непрекъсната в дадена точка.

4. Формулирайте първата и втората теорема на Вайерщрас за непрекъснати функции върху компактни множества.

5. Дайте примери на непрекъсната функция, която не е ограничена, и на непрекъсната ограничена функция, която не достига най-голямата си стойност. Разбира се, и в двата случая дефиниционното множество не може да бъде компактно. (Защо?)

6. Формулирайте теоремата за междинните стойности за непрекъснати функции върху линейно свързани множества в $\mathbb{R}^n$.

1.4 Диференцируемост на функции и изображения. Диференциране на съставни функции.

Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в отвореното подмножество D на $\mathbb{R}^n$. Най-често е трудно да си представим нагледно поведението на тази функция; за тази цел можем да разгледаме зависимостта на функцията f от всяко едно променливо поотделно. Нека фиксираме точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ от D, и да въведем следните (n на брой) функции на едно променливо:

$$\varphi_i(t) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right),$$

като функцията $\varphi_i(t)$ е дефинирана в околност на точката x_i^0. Функциите $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ще наричаме частични функции, съответстващи на функцията на много променливи $f(x)$.

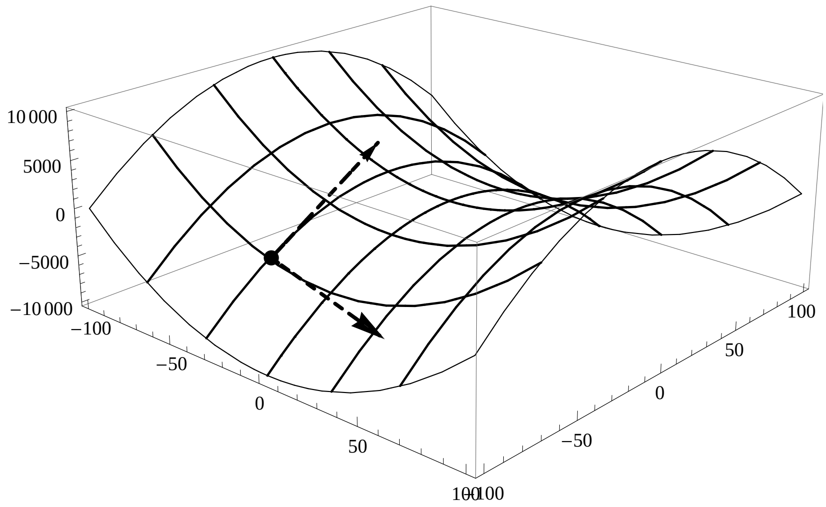
В частност, ако $f(x, y)$ е функция на две променливи, дефинирана в околност на точката (x_0, y_0), можем да разгледаме частичните функции

$$\varphi(x) = f(x, y_0), \text{ и } \psi(y) = f(x_0, y).$$

На чертежа е дадена графиката на функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$, т.е. множеството от точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за които $z = f(x, y)$, и лежащите върху нея графики на някои от частичните и функции.

Възможен е и друг начин за онагледяване на поведението на една функция на две променливи – чрез така наречените линии на ниво ("хоризонтали"), т.е. линиите, зададени с уравнението $f(x, y) = a$ при различните стойности на a. Този начин се използва например за представяне на релефа на местността върху физическите карти. На следващата фигура са представени хоризонталите върху графиката на дадена функция (отляво), и хоризонталите за същата функция в равнината Oxy (отдясно).

Частни производни на функция. Можем да разгледаме производните на написаните по-горе частични функции (стига те да съществуват). С други думи, можем да диференцираме функцията $f(x)$ по



Графика на функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$
и допирателни вектори към графиката

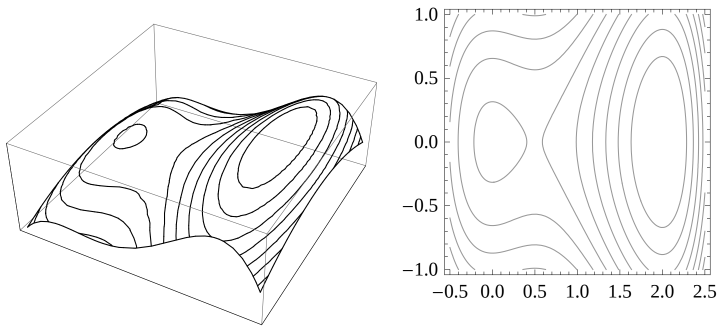
една от променливите $x_1, \ldots, x_n$, като останалите променливи са фиксирани. Така стигаме до дефиницията:

Дефиниция. *Под частна производна на функцията* $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ *по променливата* x_i *в точката* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *ще разбираме (ако съществува) границата*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) \;=\; \varphi_i'(x_i^0) \;=$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right)}{h}.$$

Частната производна на $f(x)$ по x_i се означава още и с f'_{x_i}.



Хоризонтали върху графиката на функцията и в равнината Oxy

За нагледност ще повторим дефиницията на частна производна за случая на функция на две променливи $f(x,y)$:

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

Забележка. Трябва да се отбележи, че (за разлика от случая на едно променливо) наличието на частни производни, по всички променливи и във всяка точка, още не означава, че функцията е "добра". Да си припомним функцията, разгледана в примера в §3: $f(x,y) = \frac{x\ y}{x^2+y^2}$ при $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Лесно се вижда, че $f(x,y)$ притежава навсякъде частни производни по x и y; от друга страна, както беше показано там, функцията не е непрекъсната в $(0,0)$.

Формула за нарастването на функция на много променливи. За да обясним смисъла на изведеното по-долу равенство, отначало ще си припомним случая на функция на една променлива. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x_0\in\mathbb{R}$ и диференцируема в тази точка. Знаем, че $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Ако означим

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0),$$

то ще получим, че $\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0$, и

$$f(x_0+h) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)\,h + \alpha(h)h.$$

Това равенство лесно се интерпретира геометрически: ако заместим h с $x - x_0$, първите две събираеми отдясно дават уравнението на допирателната права към графиката на f в точката x_0, а третото събираемо е остатък, намаляващ по-бързо от величината h. Ще изведем подобна формула за функция на две променливи.

Теорема 1 (формула за нарастването за функция на две променливи). *Нека $f(x,y)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x = (x_0, y_0)$, и нека частните производни $f'_x(x,y)$, $f'_x(x,y)$, съществуват и са непрекъснати в тази околност. Тогава за достатъчно малки по норма вектори (h,k) е в сила равенството:*

$$f(x_0+h, y_0+k) =$$
$$= \ f(x_0,y_0) + h\ f'_x(x_0,y_0) + k\ f'_y(x_0,y_0) + h\ \alpha(h,k)\ +\ k\ \beta(h,k),$$

където $\alpha(h,k)$ и $\beta(h,k)$ са функции, клонящи към нула при $h,k\to 0$.

Преди да докажем тази формула, ще обясним нейния смисъл, като я напишем по друг начин. Първите три събираеми отдясно се наричат линейна част на нарастването, а останалите две – остатък. Линейната част на функцията представлява приблизителен израз за стойностите на функцията близо до (x_0, y_0), лесен за пресмятане и опериране. Остатъкът ни дава представа за точността на това приближение.

Както знаем, нормата на двумерния вектор (h,k) (наричан вектор на нарастването) се дава с формулата

$$||(h,k)|| = \sqrt{h^2+k^2}.$$

Ако означим с $r(h,k)$ остатъка във формулата на нарастването:

$$r(h,k) = h\ \alpha(h,k)\ +\ k\ \beta(h,k),$$

то очевидно имаме

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{r(h,k)}{||(h,k)||} = \lim\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\alpha(h,k) + \lim\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\beta(h,k) = 0,$$

тъй като и в двете събираеми първият множител е ограничен по модул от единица, а вторият множител клони към нула. Следователно можем да напишем

$$r(h,k) \;=\; o\left(||(h,k)||\right).$$

Така получаваме

II форма на формулата за нарастването:

$$f\left(x_0+h,y_0+k\right)=$$
$$=\; f\left(x_0,y_0\right)+h\; f'_x\left(x_0,y_0\right)+k\; f'_y\left(x_0,y_0\right)+\; r(h,k),$$

където $r(h,k)=o\left(||(h,k)||\right)$.

Понякога е удобно горната формула да се записва по друг начин: ако означим $\Delta f = f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)$, вместо h напишем Δx (нарастването на променливата x), а вместо k - Δy, можем да напишем формулата във вида

$$\Delta f \;=\; f'_x\left(x_0,y_0\right).\Delta x+\; f'_y\left(x_0,y_0\right).\Delta y+\; o\left(||(h,k)||\right).$$

Доказателство на формулата за нарастването: Ще използваме **теоремата за крайните нараствания**, изучавана в първата част на курса:

Ако функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $[x_0,x_0+h]$ и диференцируема във вътрешността му, то съществува число $\theta\in(0,1)$ такова, че $\varphi\left(x_0+h\right)-\varphi\left(x_0\right)=h\;\varphi'\left(x_0+\theta h\right)$.

Прилагайки теоремата за функцията $\varphi(x)=f\left(x,y_0+k\right)$, и след това за функцията $\psi(y)=f\left(x_0,y\right)$, получаваме равенствата

$$f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0+k\right)=h\; f'_x\left(x_0+\theta_1 h,y_0+k\right),$$

$$f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)=k\; f'_y\left(x_0,y_0+\theta_2 k\right).$$

Следователно

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)-f\left(x_0, y_0\right) \; =$$

$$= \; \left(f\left(x_0+h, y_0+k\right)-f\left(x_0, y_0+k\right)\right) \; + \; \left(f\left(x_0, y_0+k\right)-f\left(x_0, y_0\right)\right) \; =$$
$$= \; h \; f_x'\left(x_0+\theta_1 h, y_0+k\right) \; + \; k \; f_y'\left(x_0, y_0+\theta_2 k\right)$$

за подходящи $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Да означим

$$\alpha(h,k)=f_x'\left(x_0+\theta_1 h, y_0+k\right)-f_x'\left(x, y+k\right),$$

$$\beta(h,k)=f_y'\left(x_0, y_0+\theta_2 k\right)-f_y'\left(x, y\right).$$

От непрекъснатостта на частните производни на f следва, че функциите $\alpha(h,k), \beta(h,k)$ клонят към нула при $h, k \to 0$. Като направим заместване, горното равенство добива търсения вид

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)-f\left(x_0, y_0\right) \; =$$

$$h \; f_x'\left(x_0, y_0\right) \; + \; k \; f_y'\left(x_0, y_0\right) \; + \; h \; \alpha(h,k) \; + \; k \; \beta(h,k). \blacksquare$$

Забележка 1. Само съществуването на частните производни (без тяхната непрекъснатост) не е достатъчно за валидността на доказаната формула; наистина, лесно се вижда, че ако една функция удовлетворява формулата за нарастването, то тя е непрекъсната. По-горе обаче ние видяхме пример на функция, притежаваща частни производни, която не е непрекъсната.

Забележка 2. За функция на n променливи също може да се напише формула за нарастването, аналогична на доказаната в горната теорема. Нека $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е функция на n променливи, а $h = \left(h_1, \ldots, h_n\right)$ е достатъчно малък по норма вектор на нарастването. Тогава формулата на нарастването има вида

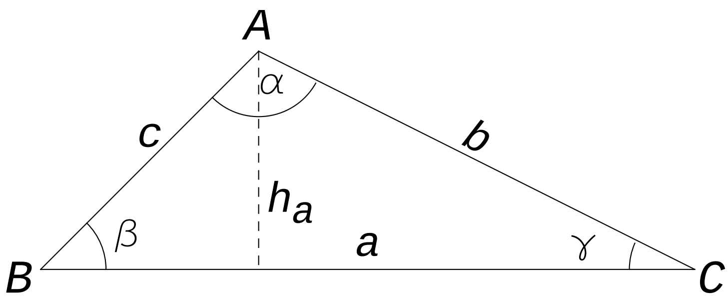
$$f(x+h) \; = \; f(x) \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; f_{x_i}'(x) \; h_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i,$$

където $\alpha_i(h)$, $i=1,\ldots,n$, са функции на n променливи, клонящи към нула при $||h|| \to 0$.

Практически приложения на формулата за нарастването. Нека величината f е зададена като функция $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ на независимите величини $x_1, \ldots, x_n$. Ако се знае, че всяка от величините x_i се измерва със съответна точност Δx_i, то каква ще бъде точността Δf, с която получаваме величината f? За отговор на този въпрос обикновено се използва линейната част на формулата за нарастването:

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \Delta x_i.$$

Пример. Следната задача често възниква в геодезията: от точката A се наблюдават недостъпните точки B и C. Известни са разстоянията $AC = b$ и $AB = c$, както и ъгълът α между $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$. Да се намери разстоянието $a = |BC|$ между точките B и C. (виж чертежа).



Чертеж към примера.

Въпросното разстояние $a = a(b, c, \alpha)$ може да бъде изчислено по косинусовата теорема:

$$a(b, c, \alpha) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}.$$

Тогава линейната част на формулата за нарастването ни дава:

$$\Delta a \approx \frac{b - c.\cos\alpha}{a}\,\Delta b + \frac{c - b.\cos\alpha}{a}\,\Delta c + \frac{bc\sin\alpha}{a}\,\Delta\alpha.$$

Като вземем пред вид очевидните геометрични равенства

$$b - c.\cos\alpha = a\cos\gamma,\; c - b.\cos\alpha = a\cos\beta,\; bc\sin\alpha = a\,h_a,$$

получаваме удобната за използване формула

$$\Delta a \approx \cos\gamma.\Delta b + \cos\beta.\Delta c + h_a.\Delta\alpha.$$

Друг подобен пример е даден в задача 3.

Дефиниция на диференцируема функция. Както често се случва в математиката, за определение на даден клас от обекти се приема това тяхно свойство, което се използва при работата с тях. В случая това е формулата за нарастването. Така (макар че това може да изглежда изкуствено) диференцируеми функции на няколко променливи се наричат тези функции, за които тя е удовлетворена. По-точно, имаме:

Дефиниция. *Нека $f(x, y)$ е функция на две променливи, определена в околност на точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Казваме, че функцията f е диференцируема в точката (x_0, y_0), ако съществуват константи A и B, както и функции $\alpha(h, k)$, $\beta(h, k)$, клонящи към нула при $h, k \to 0$, така че за достатъчно малки по норма вектори (h, k) да е в сила равенството*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \;=\; f(x_0, y_0) + A.h + B.k + h\;\alpha(h, k) + k\;\beta(h, k).$$

С други думи, диференцируеми функции са тези, които добре се приближават с линейни функции около дадената точка.

В частност, веднага се вижда, че ако функцията е диференцируема в една точка, то тя е непрекъсната в тази точка. Наистина, ако накараме h и k да клонят към нула, то очевидно $f(x_0 + h, y_0 + k)$ ще клони към $f(x_0, y_0)$.

Забележка. По-горе беше показано, че ако една функция на една променлива притежава производна в дадена точка, то тя удовлетворява в тази точка формулата за нарастването. Следователно за функции на една променлива горната дефиниция съвпада с обичайната.

Сега теорема 1 може да се формулира така:

Теорема $1'$. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава непрекъснати частни производни в околност на точката (x_0, y_0), то тя е диференцируема в тази точка.*

Обратното твърдение не е вярно, но може да се докаже нещо послабо:

Теорема 2.*Ако функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0, y_0), то тя притежава частни производни в тази точка, и са в сила равенствата*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Доказателство. Да вземем случая $k = 0$. Тогава равенството от дефиницията добива вида

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + A.h + h\alpha(h, k).$$

Оттук получаваме, че

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) \;\; f(x_0, y_0)}{h} = A + \alpha(h, 0),$$

и следователно

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) \;\; f(x_0, y_0)}{h} = A.$$

По същия начин, избирайки $h = 0$, получаваме равенството $f'_y(x_0, y_0) = B$. ■

Оттук се вижда в частност, че константите A и B в дефиницията за диференцируема функция са определени еднозначно.

Разбира се, от диференцируемостта в дадена точка не следват нито съществуването на частни производни в околност на точката, нито – още повече – тяхната непрекъснатост. Читателят сам може да намери съответните примери дори за функции на една променлива.

Допирателна равнина към графиката на функция на няколко променливи. Нека $f(x,y)$ е функция на 2 променливи, дефинирана и диференцируема в областта $D \in \mathbb{R}^2$. Както знаем, нейната графика G_f е подмножеството на $\mathbb{R}^3$, определено с условията

$$G_f = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\Big\}.$$

Дефиниция. *Нека* $P_0 = (x_0, y_0)$ *е точка от* D, *и* $Q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *е съответната точка от* G_f. *Под допирателна равнина в точката* Q_0 *ще разбираме равнината в* $\mathbb{R}^3$ *с уравнение* $z = l(x, y)$, *където*

$$l(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

От формулата за нарастване на диференцируема функция можем да изведем следната характеризация на допирателната равнина:

Функцията $l(x, y)$ *е единствената линейна функция, удовлетворяваща условието*

$$f(P) - l(P) = o(||P - P_0||).$$

С други думи, измежду всички равнини в $\mathbb{R}^3$, минаващи през точката Q_0, допирателната равнина е разположена най-близко до графиката на $f(x, y)$.

Дефиниция. *Под допирателен вектор към* G_f *в точката* Q_0 *разбираме всеки (свободен) вектор, колинеарен с допирателната равнина в тази точка.*

Очевидно допирателните вектори в точката Q_0 образуват двумерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^3$, наричано допирателно подпространство към графиката в тази точка. Лесно можем да посочим един базис в това пространство: той се състои от допирателните към графиките на частичните функции в тази точка (ще напомним, че под частични функции разбираме функциите $f(x, y_0)$ и $f(x_0, y)$, получени чрез замразяване на променливите y и x съответно).

Нека $\varphi(x)$ е функция на една променлива. Както знаем от геометричния смисъл на производната на функция, двумерният вектор с координати $(1, \varphi'(x_0))$ е допирателен към графиката на $\varphi(x)$ в точката x_0. Прилагайки тази конструкция към частичните функции, получаваме като допирателни към графиките им тримерните вектори

$$l_x = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)), \quad l_y = \left(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\right).$$

Тези два вектора са линейно независими и колинеарни с допирателната равнина (проверете!), и следователно образуват базис в допирателното подпространство (виж чертежа в началото на параграфа).

Аритметични операции с диференцируеми функции

Както и в случая на функции на една променлива, при аритметични операции с диференцируеми функции резултатът отново е диференцируема функция:

Теорема 3. *Ако функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са диференцируеми в точката $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, то тяхната сума $f(x,y)+g(x,y)$, произведение $f(x,y).g(x,y)$, и, ако $g\left(x_0,y_0\right) \neq 0$, тяхното частно $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ са също диференцируеми в тази точка.*

Доказателство. Да напишем формулите за нарастването в точката (x_0,y_0) за функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
f\left(x_0+h,y_0+k\right) &= f\left(x_0,y_0\right)+h\ A_f+k\ B_f+r_f(h,k),\\
g\left(x_0+h,y_0+k\right) &= g\left(x_0,y_0\right)+h\ A_g+k\ B_g+r_g(h,k).
\end{aligned}
$$

Тук сме означили

$$
A_f=f'_x\left(x_0,y_0\right),\ B_f=f'_y\left(x_0,y_0\right),\ A_g=g'_x\left(x_0,y_0\right),\ B_g=g'_y\left(x_0,y_0\right).
$$

$r_f(h,k)$ и $r_g(h,k)$ са остатъците съответно за f и g; имаме

$$
r_f(h,k), r_g(h,k) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).
$$

Като съберем двете формули за нарастването, получаваме

$$
(f+g)\left(x_0+h,y_0+k\right) =
$$

$$
(f+g)\left(x_0,y_0\right)+h.\left(A_f+A_g\right)+k.\left(B_f+B_g\right)+r_f(h,k)+r_g(h,k),
$$

което означава, че и функцията $f+g$ удовлетворява формулата за нарастването.

За да получим формулата за нарастването за $f(x)g(x)$, да умножим двете равенства. Получаваме:

$$
f\left(x_0+h,y_0+k\right).g\left(x_0+h,y_0+k\right) =
$$

$$f(x_0,y_0).g(x_0,y_0)+h.\left(f(x_0,y_0).A_g+g(x_0,y_0).A_f\right)+$$
$$+k.\left(f(x_0,y_0).B_g+g(x_0,y_0).B_f\right)+r(h,k),$$

където сме означили

$$r(h,k)=\left(f(x_0,y_0)+h\ A_f+k\ B_f\right)r_g(h,k)+$$

$$+\left(g(x_0,y_0)+h\ A_g+k\ B_g\right)r_f(h,k)+r_f(h,k)r_g(h,k).$$

Лесно се проверява, че

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,\ \text{което значи, че } r(h,k)=o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Следователно произведението $f(x)g(x)$ на функциите удовлетворява формулата за нарастването. Читателят ще съобрази, че коефициентите пред h и k са всъщност частните производни на $f(x)g(x)$, изчислени по формулата на Лайбниц.

Накрая, нека $g(x_0,y_0)\neq 0$. За да докажем, че $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ е диференцируема в (x_0,y_0), е достатъчно да видим, че $\frac{1}{g(x,y)}$ е диференцируема в тази точка. Наистина, тъй като $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=f(x,y).\frac{1}{g(x,y)}$, диференцируемостта на частното ще следва от доказаната по-горе диференцируемост на произведение на диференцируеми функции.

За да докажем, че $\frac{1}{g(x,y)}$ е диференцируема в (x_0,y_0), да означим

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{1}{g(x_0+h,y_0+k)}-\frac{1}{g(x_0,y_0)}.$$

Тъй като $g(x,y)$ е непрекъсната в (x_0,y_0), то същото е вярно и за $\frac{1}{g(x,y)}$, т.е. $\Delta\left(\frac{1}{g}\right)\to 0$ при $h,k\to 0$. Имаме

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{g(x_0,y_0)-g(x_0+h,y_0+k)}{g(x_0,y_0)\,g(x_0+h,y_0+k)}=$$

$$=-\frac{1}{g(x_0,y_0)}\ \Delta g\left(\frac{1}{g(x_0,y_0)}+\Delta\left(\frac{1}{g}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{g^2(x_0,y_0)}\ \Delta g\ -\ \frac{1}{g(x_0,y_0)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\ =$$

$$= \ h.\left(-\frac{A_g}{g^2\left(x_0,y_0\right)}\right)+k.\left(-\frac{B_g}{g^2\left(x_0,y_0\right)}\right)+r(h,k),$$

където

$$r(h,k)=-\frac{1}{g^2\left(x_0,y_0\right)}\ r_g(h,k)\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

Тогава

$$\frac{r(h)}{\sqrt{h^2+k^2}}\ =\ -\frac{1}{g^2\left(x_0,y_0\right)}\ \frac{r_g(h)}{\sqrt{h^2+k^2}}\ -\ \frac{1}{g\left(x_0,y_0\right)}\ \frac{\Delta g}{\sqrt{h^2+k^2}}\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

От диференцируемостта на $g(x,y)$ следва, че $\frac{\Delta g}{\sqrt{h^2+k^2}}$ е ограничена при достатъчно малки h и k (докажете!), и следователно $\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0$ при $h,k \to 0$. Ние доказахме, че функцията $\frac{1}{g(x,y)}$ удовлетворява уравнението на нарастването в точката (x_0,y_0). ■

Диференциране на съставни функции

При намиране на частни производни на сума, произведение и т.н. на функции на няколко променливи не е необходимо да се знае нищо повече от известните формули за производна на аритметични операции с функции на една променлива*. Един въпрос, при който положението е различно, е диференцирането на сложни, или съставни, функции. Ще напомним формулата за случая на едно променливо: при дадени функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ (външна и вътрешна функция), производната на съставната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ се дава с формулата

$$F'(t)\ =\ f'(\varphi(t)).\varphi'(t),$$

т.е. производната на съставната функция е равна на произведението на производните на външната и вътрешната функция. Ще докажем, че подобна формула съществува и за съставна функция на няколко променливи. Ще започнем с по-простия вариант на теоремата:

Теорема 4.*Нека функцията $f(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0). Нека функциите на една променлива $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцируеми в точката t_0, и $\varphi\left(t_0\right)=x_0$, $\psi\left(t_0\right)=x_0$. Да дефинираме*

*Всъщност горните изчисления доказват още веднъж тези формули.

съставната функция $F(t)$ с формулата

$$F(t) = f\left(\varphi(t), \psi(t)\right).$$

Тогава $F(t)$ е диференцируема в точката t_0, и е в сила формулата

$$\boxed{F'\left(t_0\right) = f'_x\left(\varphi\left(t_0\right), \psi\left(t_0\right)\right).\varphi'\left(t_0\right) + f'_y\left(\varphi\left(t_0\right), \psi\left(t_0\right)\right).\psi'\left(t_0\right).}$$

Доказателство. Грубо казано, доказателството се състои в заменяне на функцията с нейната линейна част. Нека t е точка достатъчно близка до t_0. Да означим $\Delta t = t - t_0$, $\Delta x = \varphi(t) - \varphi\left(t_0\right)$, $\Delta y = \psi(t) - \psi\left(t_0\right)$. От дефиницията на производна имаме

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'\left(t_0\right), \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'\left(t_0\right).$$

Нека $\Delta F = F(t) - F\left(t_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$. Тогава от формулата за нарастването имаме

$$\Delta F = f'_x\left(x_0, y_0\right)\Delta x + f'_y\left(x_0, y_0\right)\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

като $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Следователно,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \left(f'_x\left(x_0, y_0\right) + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \Big(f'_y\left(x_0, y_0\right) + \beta(\Delta x, \Delta y)\Big)\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

което при $\Delta t \to 0$ клони към

$$f'_x\left(x_0, y_0\right).\varphi'\left(t_0\right) + f'_y\left(x_0, y_0\right).\psi'\left(t_0\right). \blacksquare$$

Пример. Нека $f(x, y) = x^y$, $x > 0, y > 0$. Тогава

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f'_y(x, y) = x^y \ln(x).$$

Нека $\varphi(t), \psi(t)$ са диференцируеми функции с положителни стойности. Ако положим $F(t) = \varphi(t)^{\psi(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$, то от горната теорема получаваме

$$F'(t) = \psi(t).\varphi(t)^{\psi(t)-1}.\varphi'(t) + \ln\left(\varphi(t)\right).\varphi(t)^{\psi(t)}.\psi'(t).$$

Тази формула е известна от първата част на курса, където тя се извежда чрез предварително логаритмуване.

Допълнение. Аналогични формули имаме, ако f е функция на три или повече променливи. Нека е дадена диференцируемата функция $f(x, y, z)$ на три променливи, а $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\tau(t)$ са диференцируеми функции на t. Тогава производната на съставната функция

$$F(t) \ = \ f\left(\varphi(t), \psi(t), \tau(t)\right)$$

се дава с формулата

$$\boxed{\begin{gathered} F'\left(t\right) = f'_x\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right), \tau(t)\right).\varphi'\left(t\right) + f'_y\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right), \tau(t)\right).\psi'\left(t\right) + \\ + f'_z\left(\varphi\left(t\right), \psi\left(t\right), \tau(t)\right).\tau'\left(t\right). \end{gathered}}$$

В общия случай, нека $f(x) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е диференцируема функция на n променливи, а $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ са диференцируеми функции на t, като

$$x^0 = \left(\varphi_1\left(t_0\right), \ldots, \varphi_n\left(t_0\right)\right).$$

Тогава производната на съставната функция

$$F(t) \ = \ f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$$

е равна на

$$F'\left(t_0\right) \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)\varphi'_1\left(t_0\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right)\varphi'_n\left(t_0\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\varphi'_i\left(t_0\right).$$

С други думи, формулата за производната на съставната функция се състои от толкова събираеми, колкото са променливите, като всяко от тях наподобява по форма израза за производна на съставна функция на една променлива.

Функционална детерминанта на изображение

За редица цели се налага да се въведат, наред с разглежданите досега функции със стойности реални числа, и т.нар. векторнозначни

функции, наричани още изображения. Ако $D \subset \mathbb{R}^n$ е дефиниционна област на една такава функция със стойности в някое $\mathbb{R}^m$, то на всяка точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ функцията съпоставя точка
$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$.

За простота тук ще разглеждаме главно случая на функции, дефинирани в $\mathbb{R}^2$, и със стойности отново в $\mathbb{R}^2$. Нека D е област в $\mathbb{R}^2$ с координати u и v, и нека $\varphi(u,v)$ $\psi(u,v)$ са диференцируеми функции, дефинирани за $(u,v) \in D$. Полагайки $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, ние получаваме изображение Φ на областта D в равнината $\mathbb{R}^2$ с координати (x,y). С други думи, изображението $\Phi : D \to \mathbb{R}^2$ се задава с формулата

$$\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v)) \,, \quad (u,v) \in D.$$

Понякога казваме, че горните формули определят *смяна на координатите* в $\mathbb{R}^2$, като старите координати (x,y) се изразяват чрез новите (u,v). Като най-важни примери за това може да се посочат полярните координати в равнината и сферичните координати в тримерното пространство – те ще бъдат разгледани в следващия параграф.

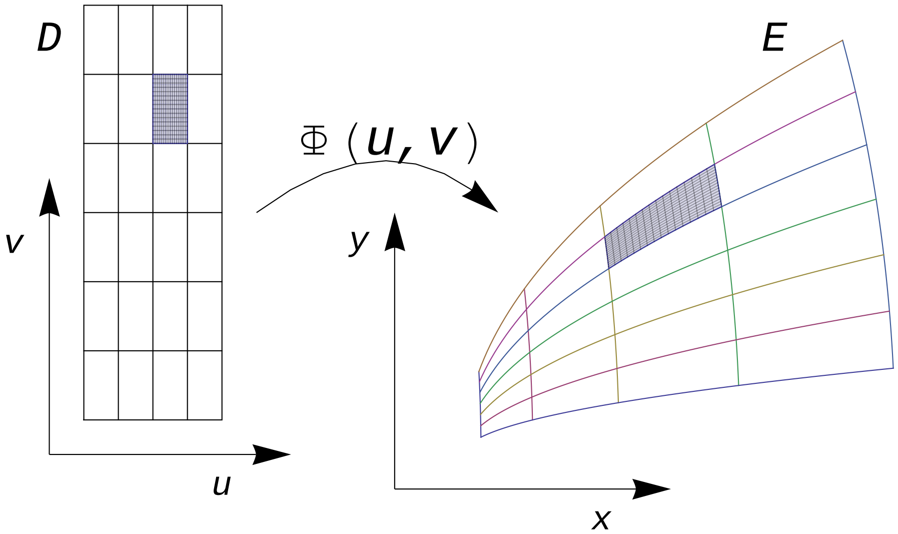
Забележка. В някои случаи е удобно да се вземат малко поразлични означения. Можем да означим координатните функции, определящи изображението $\Phi(u,v)$, вместо с $\varphi(u,v), \psi(u,v)$, с $x(u,v)$ и $y(u,v)$; при тези означения изображението се определя с формулите

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v).$$

Трябва да се помни, че в такъв случай буквите x и y в левите страни на равенствата означават независими променливи, а в десните страни - функции на двете променливи u и v.

За да си представим нагледно действието на изображението Φ, можем да разгледаме правите от вида $u = u_0$ (хоризонтални), и $v = v_0$ (вертикални), в областта D, и да намерим техните образи при изображението Φ. Това е показано на следващия чертеж, на който Φ изобразява областта D (в случая правоъгълник), в областта $E = \Phi(D)$.

Както виждаме, едно изображение от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ се определя от две функции, всяка от които зависи от два аргумента. Чрез диференциране



Изображение от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$

можем да получим четири възможни производни: това са φ'_u, φ'_v, ψ'_u и ψ'_v. Тези четири функции могат да бъдат разположени в една матрица с размер 2×2:

Дефиниция. *Нека*

$$\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$$

е изображение от $\mathbb{R}^2$ *в* $\mathbb{R}^2$*. Под* <u>*матрична производна*</u> *на изображението* Φ *ще разбираме матрицата*

$$D\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

По-нататък ще видим, че важна роля играе детерминантата на тази матрица, която се нарича <u>функционална детерминанта</u> на изображението Φ:

Дефиниция. *Под функционална детерминанта, или якобиан, на изображението Φ, ще разбираме функцията*

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}(u,v) \;=\; \det\left(D\Phi(u,v)\right) = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u,v) & \varphi'_v(u,v) \\ \psi'_u(u,v) & \psi'_v(u,v) \end{vmatrix}.$$

Развивайки детерминантата отдясно, получаваме

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} = \varphi'_u.\psi'_v \;-\; \varphi'_v.\psi'_u.$$

Теорема 5.(основно свойство на функционалните детерминанти). *Функционалната детерминанта на произведението на две изображения е равна на произведението на техните функционални детерминанти.*

Доказателство. Нека C с координати (s,t), D с координати (u,v), и E с координати (x,y), са области в $\mathbb{R}^2$. Нека $\Psi : C \to D$ и $\Phi : D \to E$ са еднократно гладки изображения, зададени с формулите

$$\Psi(s,t) = (u(s,t), v(s,t))\,, \;\; \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))\,.$$

Ако приложим най-напред изображението Ψ, а след това изображението Φ, получаваме изображение на областта C в областта E, което се нарича произведение или композиция на изображенията Ψ и Φ, и се бележи с $\Phi \circ \Psi : C \to E$. Това изображение има вида

$$\Phi \circ \Psi(s,t) = (x(s,t), y(s,t))\,,$$

като координатните му функции се дават с формулите

$$x(s,t) = x\left(u(s,t), v(s,t)\right)\,, \;\; y(s,t) = y\left(u(s,t), v(s,t)\right)\,.$$

Да извършим диференциране на тези формули относно променливите s и t, използвайки формулата за диференциране на сложна функция. Получаваме, че

$$x'_s = x'_u.u'_s + x'_v.v'_s, \;\; x'_t = x'_u.u'_t + x'_v.v'_t\;,$$

$$y'_s = y'_u.u'_s + y'_v.v'_s, \quad y'_t = y'_u.u'_t + y'_v.v'_t \;.$$

Да умножим сега матричните производни на Ψ и Φ, използвайки правилата за умножение на матрици ("ред със стълб"). Имаме

$$D\Phi \circ D\Psi = \left(\begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} u'_s & u'_s \\ v'_s & v'_t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} x'_u.u'_s + x'_v.v'_s & x'_u.u'_t + x'_v.v'_t \\ y'_u.u'_s + y'_v.v'_s & y'_u.u'_t + y'_v.v'_t \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_t \end{array} \right) = D\left(\Phi \circ \Psi\right).$$

Да изберем точки $P_0 \in C$, $Q_0 = \Psi\left(P_0\right) \in D$,
$R_0 = \Phi\left(Q_0\right) = \Phi \circ \Psi\left(P_0\right)$. Тогава горното равенство ще се запише във вида

$$D\left(\Phi \circ \Psi\right)\left(P_0\right) \;=\; D\Phi\left(Q_0\right) \circ D\Psi\left(P_0\right).$$

От линейната алгебра знаем, че детерминантата на произведение от квадратни матрици е равна на произведението на детерминантите. Оттук следва твърдението на теоремата, което може да се запише във вида:

$$\boxed{\frac{D\left(x,y\right)}{D\left(s,t\right)}\left(P_0\right) \;=\; \frac{D\left(x,y\right)}{D\left(u,v\right)}\left(Q_0\right) \cdot \frac{D\left(u,v\right)}{D\left(s,t\right)}\left(P_0\right). \blacksquare}$$

Забележка. Вижда се, че начинът на записване е така съставен, че да подсеща читателя за правилната формула: горното равенство може да се тълкува като "съкращаване"на $D\left(u,v\right)$ в числителя със същия израз в знаменателя. Разбира се, това не е доказателство, а просто начин за запаметяване на формулата.

Производна на обратното изображение. Както знаем, изображението $\Phi : D \to E$ от множеството D в множеството E е взаимно еднозначно (биективно), ако за всяка точка $Q \in E$ съществува точно един прообраз в D, т.е. точно едно $P \in D$, такова, че $\Phi(P) = Q$. Полагайки $P = \Psi(Q)$, получаваме обратното изображение $\Psi = \Phi^{-1} : E \to D$. Лесно се вижда, че са изпълнени равенствата $\Psi \circ \Phi = I_D$, $\Phi \circ \Psi = I_E$, където I_D и I_E са идентичните изображения на пространствата D и E в себе си.

Теорема 6. *Нека $\Phi(u,v)$ е взаимно еднозначно диференцируемо изображение от множеството $D \subset \mathbb{R}^2$ с координати (u,v), в множеството $E \subset \mathbb{R}^2$ с координати (x,y). Нека $\Psi(x,y)$ е неговото обратно изображение. Да изберем точка $P_0 = (u_0, v_0)$ от D и да означим $Q_0 = \Phi(P_0)$; очевидно $P_0 = \Psi(Q_0)$. Тогава*

$$D\Psi(Q_0) = (D\Phi(P_0))^{-1}$$

и

$$\boxed{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}(Q_0) \;=\; \frac{1}{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(P_0)}.}$$

Доказателство. Знаем, че $\Psi \circ \Phi = I_D$. Лесно се вижда, че матричната производна на идентитета I_D е единичната матрица I, т.е. матрицата с елементи единица по диагонала и нула извън него (докажете!). Очевидно детерминантата на тази матрица е равна на числото 1. Прилагайки предната теорема, получаваме равенствата

$$D\Psi(Q_0) \circ D\Phi(P_0) = I, \quad \text{и} \quad \frac{D(u,v)}{D(x,y)}(Q_0) \,.\, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(P_0) = 1. \blacksquare$$

Забележка. От теоремата се вижда, че функционалната детерминанта на обратимо изображение е различна от нула. В параграф 1.8, теорема 5, ние ще покажем, че е вярно и обратното твърдение: ако функционалната детерминанта на едно диференцируемо биективно изображение е различна от нула, то обратното му изображение също е диференцируемо.

Функционална детерминанта на изображение между пространства с по-висока размерност. За такива изображения дефиницията е аналогична на разгледаната по-горе за изображения от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Нека например D и E са области в $\mathbb{R}^3$ с координати (u,v,w) и (x,y,z) съответно, и $\Phi : D \to E$ е изображение, задавано с формулите

$$x = x(u,v,w), \; y = y(u,v,w), \; z = z(u,v,w).$$

Тогава функционалната детерминанта на това изображение се задава с формулата

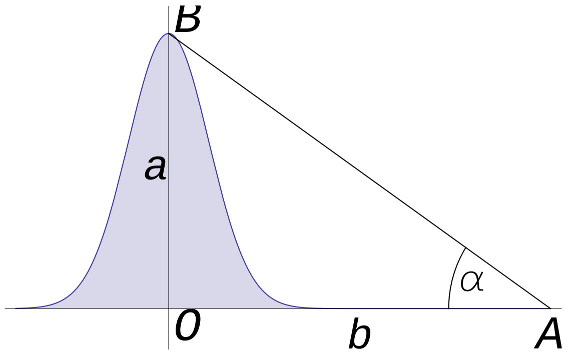
$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Аналогично, ако D и E са в $\mathbb{R}^n$, с координати $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и $\Phi : D \to E$ се задава с формулите

$$x_1 = f_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n = f_n(u_1, \ldots, u_n),$$

то функционалната детерминанта на Φ се дава с формулата

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)}(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(u) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(u) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n}(u) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}(u) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(u) \end{vmatrix}.$$



Чертеж към задача 4.

Въпроси за самопроверка

1. Дайте дефиниция на частна производна на функция. Колко частни производни има една функция на n променливи?

2. Напишете формулата за нарастването на функция на две променливи.

3. Напишете формулата за нарастването за функциите:

а/ $f(x, y) = \frac{1}{\sin (xy)}$ около точката $(\pi/3, 1/2)$.

б/ $f(x, y) = x^y$ около точката $(2, 2)$.

в/ Използвайки б/, пресметнете $2.01^{2.01}$ с точност до 0.01.

4. Височината $a = |OB|$ на планински връх може да се определи по формулата

$$a(b, \alpha) = b \operatorname{tg} \alpha,$$

където $b = |OA|$ е разстоянието по хоризонталата между върха и наблюдателя, а α е ъгълът, под който се вижда върха (виж чертежа).

Използвайки линейната част на формулата за нарастването, докажете, че е валидна следната формула за грешката:

$$\Delta a \approx \operatorname{tg} \alpha . \Delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} . \Delta \alpha .$$

5 . Дайте дефиниция на диференцируема функция на две променливи.

6. Докажете, че функцията $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ не е диференцируема в точката $(0, 0)$, а функцията $g(x, y) = \cos\sqrt[3]{xy}$ е диференцируема в тази точка.

7. Що е съставна функция на две променливи? Напишете формулата за диференциране на съставна функция. Намерете производната на функцията $\varphi(x) = x^x$, използвайки функцията на две променливи $f(u, v) = u^v$.

8. Функцията $f\,(x, y)$ се нарича *хомогенна от степен* k, ако за всяко число t е изпълнено равенството

$$f\,(tx, ty) \ = \ t^k f\,(x, y)\,.$$

Диференцирайки горната формула, докажете за такива функции равенството на Ойлер:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}\,(x, y) = k\ f\,(x, y)\,.$$

9. Дефинирайте матрична производна и функционална детерминанта на изображение от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Намерете функционалната детерминанта на изображението, зададено с формулите

$$x = u.v, \ \ y = \frac{u}{v}.$$

10. Формулирайте основното свойство на функционалните детерминанти.

1.5 Полярни и сферични координати.

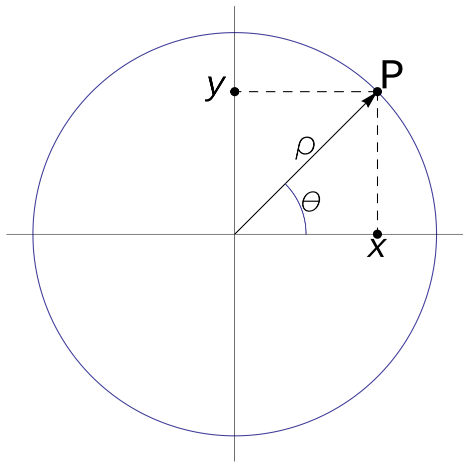
Полярна смяна на координатите в $\mathbb{R}^2$. Ще припомним понятието полярна смяна на координатите, познато от част I. Нека $D = \{(\rho,\theta) : \rho > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Ще определим изображението от D в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, наречено полярна смяна на координатите, с формулите

$$\boxed{x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ \text{където } \rho > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi.}$$

Лесно се смята, че

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$
$$= \rho\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho > 0.$$

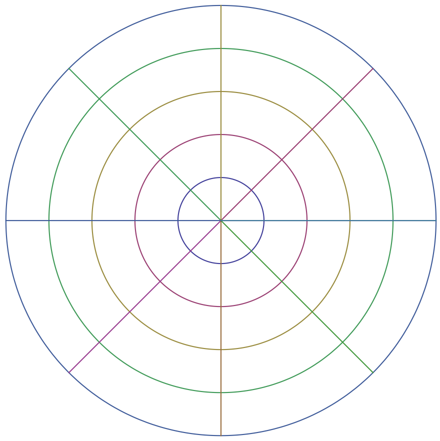
Геометричният смисъл на полярните координати е ясен: за дадена точка P в равнината с ρ означаваме разстоянието $\left\|\vec{OP}\right\|$ от точката до началото O на координатите, а с θ - полярният ъгъл на точката, т.е. ъгъла между отсечката $\vec{OP}$ и абцисната ос. Очевидно координатите x, y на точката P се изразяват с горните формули (виж чертежа).



Полярни координати в равнината.

Оттук се вижда защо е наложено ограничението $0 \le \theta < 2\pi$; в противен случай полярният ъгъл не е определен еднозначно. Така, ако точката P е на абцисната ос, за неин полярен ъгъл може да се вземе всеки от ъглите 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ и т.н.

По-нагледна представа за полярната смяна на координатите можем да получим, ако разгледаме нейните координатни линии, т.е. линиите, получени при фиксиране на една от координатите ρ, θ, и променяне на другата координата. Така, при полагане $\rho = R$ и промяна на θ получаваме фамилия от концентрични окръжности с център в началото; при фиксиране на θ се получават лъчи, започващи в началото и сключващи съответният ъгъл с абсцисната ос (виж чертежа).



Координатни линии на полярната смяна.

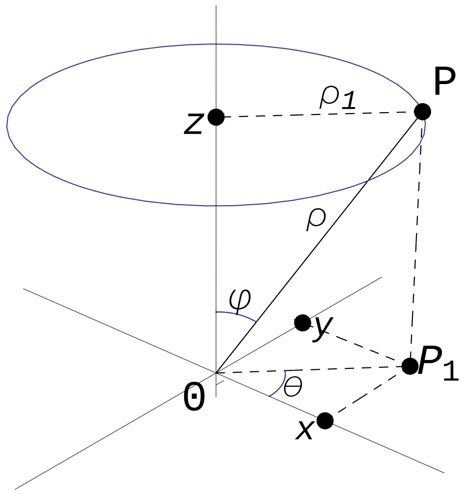
Формулите за обратното изображение могат да бъдат посочени в явен вид: очевидно имаме

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

. Възстановяването на θ по x и y е малко по-сложно; в отворения първи квадрант е вярна формулата

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Предлагаме на читателя самостоятелно да намери формулите за другите квадранти.



Сферични координати в тримерното пространство.

Сферична смяна на координатите в $\mathbb{R}^3$. Ще започнем с една по-проста смяна в $\mathbb{R}^3$: тя съпоставя на всяка тройка (ρ, θ, z) точката $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ по формулите

$$\boxed{x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad z = z.}$$

С други думи, смяна на променливите се прави само в равнината (x, y). Очевидно имаме

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho.$$

Тази смяна на координатите в $\mathbb{R}^3$ се нарича цилиндрична.

Ще опишем по-сложната сферична смяна. Нека $P = (x, y, z)$ е произволна точка от $\mathbb{R}^3$. Нейната проекция върху равнината (Oxy) е $P_1 = (x, y)$. Нека $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ са разстоянията на точките P и P_1 до началото. Полярната смяна на координатите в равнината (Oxy) има вида

$$x = \rho_1 \cos\theta, \quad y = \rho_1 \sin\theta.$$

Да означим с φ ъгъла между оста z и радиус-вектора $\vec{P}$ на точката P. Очевидно φ взема стойности между 0 и π. В правоъгълния триъгълник OP_1P получаваме равенствата

$$\rho_1 = \rho \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi.$$

Обединявайки така написаните равенства, получаваме формули, изразяващи декартовите координати (x, y, z) чрез ρ, θ, φ:

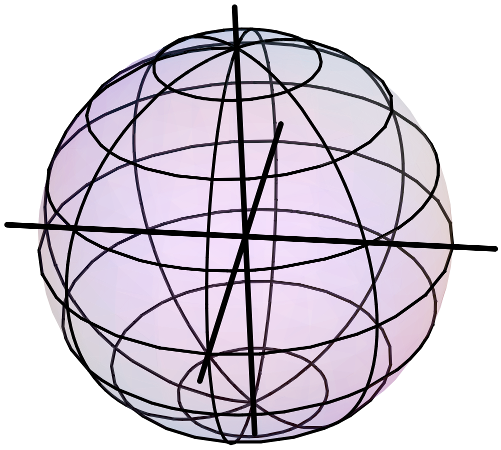
$$\boxed{\begin{aligned} &x = \rho\cos\theta\sin\varphi,\\ &y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\\ &z = \rho\cos\varphi, \qquad \rho \geq 0,\ \theta\in[0,2\pi),\ \varphi\in[0,\pi]. \end{aligned}}$$

Координатите (ρ, θ, φ) се наричат сферични координати в $\mathbb{R}^3$. Ще пресметнем функционалната детерминанта на съответната смяна на променливите: това може да бъде извършено директно, но по-лесно е да се използва представянето на сферичната смяна като произведение на две цилиндрични смени:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} &= \frac{D(x,y,z)}{D(\rho_1,\theta,z)}.\frac{D(\rho_1,\theta,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \\ &= \frac{D(x,y)}{D(\rho_1,\theta)}.\frac{D(\rho_1,z)}{D(\rho,\varphi)} = \rho_1\rho = \rho^2\sin\varphi. \end{aligned}}$$

Оттук се вижда, че сферичната смяна на координатите е регулярна при $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, \pi)$.

За да си представим нагледно сферичните координати, ще опишем линиите, получени при фиксиране на някои от тях и промяна на други. Да фиксираме $\rho = R$; тогава при промяна на θ и φ точката с координати (ρ, θ, φ) описва сфера с център в началото на координатите и радиус R. Можем да си представим тази сфера като земното кълбо;



Координатни линии върху сферата.

при това точките $(0,0,R)$ и $(0,0,-R)$ отговарят съответно на северния и южния полюс. Да фиксираме $\varphi \in (0,\pi)$ и да меним θ; това отговаря на въртене на точката около оста z. Така получените линии в географията се наричат паралели. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ те се израждат в точки - съответно северният и южният полюс на сферата. Обратно, ако фиксираме θ и меним φ между 0 и π, получаваме полуокръжност, свързваща северния и южния полюс - т.е. меридиан върху сферата. С други думи, координатата φ отговаря на географската ширина, а координатата θ - на географската дължина*.

*Различието между координатите, използвани в математиката и в географията, е въпрос на конвенция; така, в географията дължината се мени между 180^o западна дължина и 180^o източна дължина, т.е. между $-\pi$ и π, а ширината - между 90^o северна и 90^o южна ширина, т.е. между $-\pi/2$ и $\pi/2$.

Въпроси за самопроверка.

1. Напишете декартовите координати на точка с полярни координати (ρ, θ). Определете полярните координати на точката $\left(-1, \sqrt{3}\right)$.

2. Дайте формула за ρ като функция на x и y. Напишете аналогична формула за θ в първи, втори и т.н. квадранти. Обяснете защо не съществува такава формула в цялата равнина.

3. Напишете формулите за изразяване на декартовите координати чрез сферичните в $\mathbb{R}^3$. Намерете сферичните координати на точката $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

4. Напишете формули за ρ и за φ като функции на x, y и z. (Упътване: във втория случай използвайте израза за z в полярните координати.

5. Пресметнете функционалните детерминанти на полярната и на сферичната смяна.

6. Опишете координатните линии на сферичната смяна в пространството. По-точно. опишете какви криви линии в пространството се получават, ако

а/ Фиксираме φ и θ, а променяме ρ.
б/ Фиксираме ρ и φ, а променяме θ.
в/ Фиксираме ρ и θ, а променяме φ.

1.6 Производна по направление и градиент.

За функции на една променлива първата производна в дадена точка има прост геометричен смисъл - тя е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в тази точка. С други думи, тя изразява "стръмността"на графиката в тази точка (ако функцията нараства, производната е положителна, и т.н.). За функции на n променливи първите производни са също n на брой, и тяхната интерпретация не е толкова очевидна.

За да си изясним геометричния смисъл на първите производни, ще си послужим с аналогията, която споменахме в началото на предния параграф: ще разгледаме графиката на дадена функция на две променливи като релеф на част от земната повърхност. Така, да си представим, че се намираме на склона на някакъв хълм (виж чертежа). Тогава стръмността на пътеката, по която вървим, зависи от нейната посока: ние може да тръгнем право нагоре (голям положителен наклон), право надолу (голям отрицателен), или да поемем по хоризонталата – тогава пътеката е хоризонтална и наклонът е нулев. Тези съображения водят до понятието производна по направление, което ще изложим по-долу.

Производна по направление. Нека $f\,(x, y)$ е функция на две променливи, диференцируема в точката (x_0, y_0), и нека $\vec{e} = (h, k)$ е вектор (наричан вектор на нарастването) от $\mathbb{R}^2$ с норма единица (т.е. $||e|| = \sqrt{h^2 + k^2} = 1$.)

Дефиниция. *Под производна на функцията $f\,(x, y)$ по направление $\vec{e}$ в точката (x_0, y_0) ще разбираме границата*

$$\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f\,(x_0 + th, y_0 + tk) - f\,(x_0, y_0)}{t}.$$

Тази производна се бележи също и с $f'_{\vec{e}}\,(x_0, y_0)$.

Ще изразим $\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0)$ чрез частните производни на $f(x, y)$. Правата, минаваща през точката (x_0, y_0) и колинеарна на вектора $\vec{e}$, може да се параметризира с уравненията

$$x(t) = x_0 + ht, \;\; y(t) = y_0 + kt.$$

(Тъй като $||e|| = 1$, параметърът t съвпада с ориентираното разстояние от текущата точка $(x(t), y(t))$ до началната точка (x_0, y_0).)

Тогава ограничението на $f(x, y)$ върху тази права се представя с функцията на едно променливо

$$\varphi(t) \;=\; f(x(t), y(t)) \;=\; f(x_0 + ht, y_0 + kt)\,.$$

По дефиниция имаме

$$\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) = \varphi'(0).$$

Прилагайки за функцията $\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ правилото за диференциране на съставна функция, получаваме, че

$$\varphi'(t) = h\frac{df}{dx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k\frac{df}{dy}(x_0 + ht, y_0 + kt)\,.$$

При $t = 0$ получаваме равенството:

$$(*) \qquad \boxed{\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) \;=\; h\frac{df}{dx}(x_0, y_0) + k\frac{df}{dy}(x_0, y_0)\,.}$$

Дефиницията на производна по направление обобщава понятието частна производна, дефинирано в предния параграф. Наистина, ако в ролята на $\vec{e}$ вземем координатните вектори $\vec{x} = (1, 0)$ и $\vec{y} = (0, 1)$, то от формулата $(*)$ получаваме:

$$\frac{df}{d\vec{x}}(x_0, y_0) \;=\; \frac{df}{dx}(x_0, y_0)\,, \quad \frac{df}{d\vec{y}}(x_0, y_0) \;=\; \frac{df}{dy}(x_0, y_0)\,.$$

Забележка. Дефиницията за производна по направление и формулата $(*)$ може да бъде въведена и за функция на n променливи $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, диференцируема в точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Нека $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ е произволен n-мерен вектор (вектор на нарастването). Полагаме

$$\frac{df}{d\vec{h}}\left(x^0\right) \;=\; \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x^0 + t\vec{h}\right) - f\left(x^0\right)}{t} \;=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_1^0 + th_1, \ldots, x_n^0 + th_n\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)}{t}.$$

Аналогично на случая на две променливи, лесно се доказва формулата

$$\frac{df}{d\vec{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{df}{dx_i}(x).$$

Градиент на функция. Да разгледаме, при фиксирана точка (x_0, y_0), зависимостта на производната по направление $f'_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ от единичния вектор $\vec{e} = (h, k)$. С други думи, пита се по кое направление производната на функцията е най-голяма, респ. най-малка. За целта ще използваме понятието *скаларно произведение* на вектори от $\mathbb{R}^2$, което може да бъде дефинирано по аналитичен и геометричен път - виж §1. Ще напомним, че за два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ от $\mathbb{R}^2$ скаларното произведение се дефинира с формулата

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \; = \; a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Скаларното произведение може да се дефинира и геометрично: в сила е равенството

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \; = \; ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos \angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

където $\angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ означава ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Дефиниция. *Под градиент на функцията на 2 променливи $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0) ще разбираме 2-мерен вектор с координати, равни на частните производни в тази точка:*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) \; = \; \left(\frac{df}{dx}(x_0, y_0), \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \right).$$

Тогава формулата за производна по направление може да се напише и така:

$$\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) \; = \; h\frac{df}{dx}(x_0, y_0) + k\frac{df}{dy}(x_0, y_0) =$$

$$(**) \quad = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0), \vec{e} \right\rangle = \left|\left|\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0)\right|\right| \cos \angle \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0), \vec{e} \right),$$

тъй като $||\vec{e}|| = 1$.

Знаем, че най-голямата стойност на косинуса на един ъгъл е равна на единица и се достига за ъгъл, равен на нула. Оттук получаваме:

Теорема 1. *Производната по направление* $\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0)$ *в точката* (x_0, y_0) *взема най-голямата си стойност, когато вектора* $\vec{e}$ *е еднопосочен с вектора* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)$*, т.е.*

$$\vec{e} \;=\; \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)\right\|}.$$

В този случай имаме

$$\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) \;=\; \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)\right\|.$$

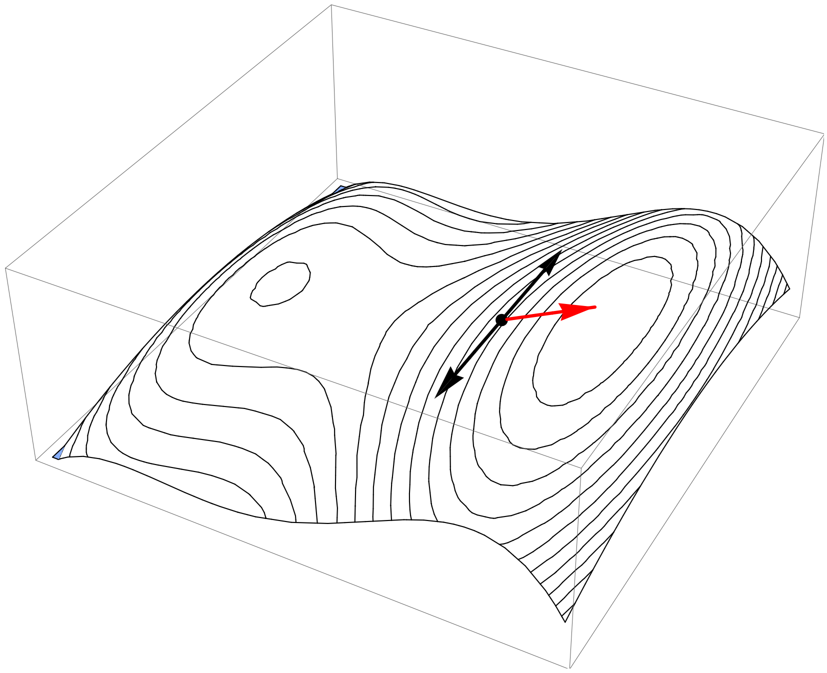
С други думи, имаме следната геометрична интерпретация на вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)$: посоката му съвпада с посоката, в която $f\,(x, y)$ расте най-бързо, а големината му е равна на наклона на графиката на функцията в тази посока.

Ще посочим още една геометрична характеризация на вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)$. От формулата $(**)$ се вижда, че $\frac{df}{d\vec{e}}(x_0, y_0) = 0$ точно тогава, когато $\vec{e}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,(x_0, y_0)$. Иначе казано, ако се движим по хоризонталата , направлението на движението във всеки момент ще бъде перпендикулярно на градиента в съответната точка. Така, засега на интуитивно ниво, стигаме до твърдението (виж чертежа).

Теорема 2. *Градиентът на една функция в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през тази точка.*

Точната формулировка на това твърдение е следната: градиентът е перпендикулярен на допирателната към линията на ниво в точката.

Забележка. Дефиницията за градиент звучи аналогично и за функции на повече променливи, Под градиент на функцията на n променливи $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ в точката x^0 ще разбираме n-мерен вектор с



Градиент на функцията в дадена точка (в червено), и вектори, допирателни към хоризонталата (в черно)

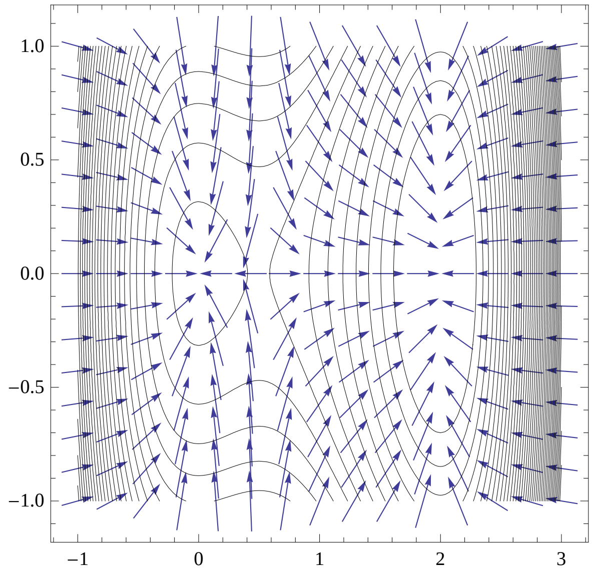
координати, равни на частните производни в тази точка:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(x^0\right) \;=\; \left(\frac{df}{dx_1}\left(x^0\right), \frac{df}{dx_2}\left(x^0\right), \ldots, \frac{df}{dx_n}\left(x^0\right)\right).$$

Формула за крайните нараствания за функции на много променливи. Ще обобщим една от най-важните формули на диференциалното смятане за една променлива – формулата за крайните нараствания, доказана в I.§2.3 (и използвана в предния параграф). Нека $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, и $\vec{e} = (h, k)$ е вектора на нарастването (тук не искаме той да е единичен по норма).

Теорема 3. *При горните условия съществува число $\theta \in (0, 1)$ такова, че*

$$f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) - f\left(x_0, y_0\right) =$$



Градиент и линии на ниво на дадена функция

$$= h\frac{df}{dx}\left(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k\right) + k\frac{df}{dy}\left(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k\right).$$

Доказателство. Да въведем, както по-горе, помощната функция на една променлива $\varphi(t) = f\left(x_0 + th, y_0 + tk\right)$. Тогава от условието на теоремата следва, че $\varphi(t)$ е диференцируема в интервала $[0,1]$. От едномерната теорема за крайните нараствания следва, че

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$$

за някое подходящо $\theta \in (0,1)$. Тогава теоремата е следствие на очевидните равенства

$$\varphi(0) = f\left(x_0, y_0\right)\ ,\ \varphi(1) = f\left(x_0 + h, y_0 + k\right)\ ,$$
$$\varphi'(t) = h\frac{df}{dx}\left(x_0 + th, y_0 + tk\right) + k\frac{df}{dy}\left(x_0 + th, y_0 + tk\right). \blacksquare$$

Забележка. Равенството от теоремата може да се напише във вида

$$f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) - f\left(x_0, y_0\right) = \left\langle \vec{e},\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k\right)\right\rangle.$$

Следствие 4. Да предположим, че производните на $f(x,y)$ навсякъде удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{\left(\frac{df}{dx}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}(x,y)\right)^2} \leq C.$$

Тогава е в сила неравенството

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| \ \leq \ C\sqrt{h^2+k^2}.$$

Доказателство. Условието всъщност означава, че във всяка точка (x,y) е изпълнено $\left|\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)\right|\right| \leq C$. Тогава

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| = \left|\left\langle \vec{e},\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right\rangle\right| \leq$$

$$\leq \left|\left|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right|\right| \, ||\vec{e}|| \leq C\sqrt{h^2+k^2}. \ \blacksquare$$

Упражнения

1. Нека $O=(x_0,y_0)$ е фиксирана точка в равнината (напр. началото), и за всяка точка $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, функцията $f(P)$ е равна на разстоянието от точката O до точката P:

$$f(P) = f(x,y) = ||OP|| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Намерете частните производни на функцията $f(x,y)$ при $P\neq O$ и докажете, че

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \frac{\vec{OP}}{||OP||}.$$

Забележка. Векторът $\frac{\vec{OP}}{||OP||}$ представлява единичен вектор, насочен от O към P.

2. (обобщение на предната задача). Нека $f(P)$ е радиална функция в равнината, т.е. има вида

$$f(P) = \varphi\left(||OP||\right),$$

където O е фиксирана точка в равнината (напр. началото), $||OP||$ е разстоянието от точката O до точката P, а $\varphi(t)$ е функция на едно променливо, дефинирана и диференцируема при $t > 0$. Докажете, че $f(P)$ е диференцируема при $P \neq O$ и

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \varphi'\left(||OP||\right) \cdot \frac{\vec{OP}}{||OP||}.$$

3. (Нютоново гравитационно поле). Ако имаме две материални точки, то, според теорията за гравитацията, гравитационната сила между тях е насочена по свързващата ги линия, право пропорционална е на произведението на масите, и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между тях. Математическия израз е следният: нека имаме маса M в точката O, и единична маса в точката P. Да означим с $\vec{F}(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P))$ силата, с която тази маса се привлича от първата. Покажете, че векторното поле

$$\vec{F}(P) = -\frac{c}{\left|\left|\vec{OP}\right|\right|^3}\left(\vec{OP}\right),$$

където $c = kM$ и k е гравитационната константа, удовлетворява горните условия. Покажете още, че ако положим $\Phi(P) = \frac{c}{||\vec{OP}||}$, то е изпълнено равенството

$$\vec{F}(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi(P).$$

Забележка. Функцията $\Phi(P)$ се нарича *гравитационен потенциал.* В много случаи е по-лесно да се работи със скаларната функция $\Phi(P)$, отколкото с векторното поле $\vec{F}(P)$.

4. Нека F_1, F_2 са две различни точки от равнината, и $f(P) = ||F_1P|| + ||F_2P||$. Докажете, че при $\lambda > ||F_1F_2||$ линиите на ниво на функцията (т.е. множеството от точки P, за които $f(p) = \lambda$) представляват елипси (с фокуси в точките F_1 и F_2).

Упътване. Изберете координатна система с начало средата на отсечката F_1F_2 и абсцисна ос по тази отсечка. Да означим $p = \frac{1}{2}\,||F_1F_2||$; тогава точките F_1, F_2 ще имат координати $(-p, 0)$ и $(p, 0)$ съответно. Да положим

$$a = \frac{\lambda}{2},\ b = \sqrt{a^2 - p^2}.$$

Докажете чрез двукратно повдигане на квадрат, че за всяка точка $P = (x, y)$ равенството $||PF_1|| + ||PF_2|| = \lambda$ е еквивалентно с

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Забележка. Следователно, елипсата представлява геометричното място на точки, за които сумата на разстоянията до фокусите е константа. Оттук следва добре познатият начин за начертаване на елипса с помощта на връвчица и две гвоздейчета (посочете го!).

5. (Оптично свойство на елипсата.) Нека $f(P) = ||F_1P|| + ||F_2P||$ е функцията от предната задача. Докажете, че за всяка точка $P \neq F_1, F_2$ векторът $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P)$ е колинеарен с ъглополовящата на ъгъла, определен от векторите $\vec{PF_1}$, $\vec{PF_2}$.

Упътване. Да означим $f_1(P) = ||F_1P||$, $f_2(P) = ||F_2P||$. От резултата на зад. 1 се вижда, че

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P) = \frac{\vec{F_1P}}{||F_1P||}, \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P) = \frac{\vec{F_2P}}{||F_2P||}.$$

Да нанесем от точката P единичните вектори

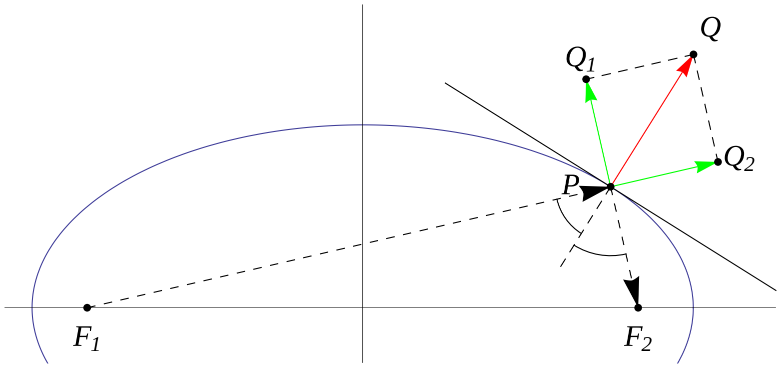
$$\vec{PQ_1} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P), \quad \vec{PQ_2} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P).$$

Тогава

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(P) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P) + \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P) = \vec{PQ_1} + \vec{PQ_2} = \vec{PQ}.$$

Тъй като четириъгълникът PQ_1QQ_2 е ромб, то $\angle Q_1PQ = \angle Q_2PQ$.

Забележка. Резултатът на задачата има проста геометрична интерпретация. Законът за отразяване на светлината гласи, че при отразяване от равнина падащият и отразеният лъч сключват еднакви ъгли с нормалата към повърхнината. Същият закон е валиден и за криволинейна повърхнина; ако повърхнината е представена като линия на ниво на дадена функция, то по Теорема 2 от параграфа нормалата към нея е колинеарна с градиента на функцията. Резултата на задачата може да се формулира така:



Оптично свойство на елипсата

> Ако пуснем произволен светлинен лъч от единия фокус на елипсата, след отразяването в нея той ще мине през другия и фокус.

6. Нека l е права в равнината и F е точка, която не лежи на l. Нека M е множеството от всички точки P в равнината, за които разстоянието $||FP||$ от точката P до точката F е равно на разстоянието от точката P до правата l (т.е. на дължината на перпендикуляра, спуснат от P към правата). Докажете, че множеството M е парабола (с фокус във F).

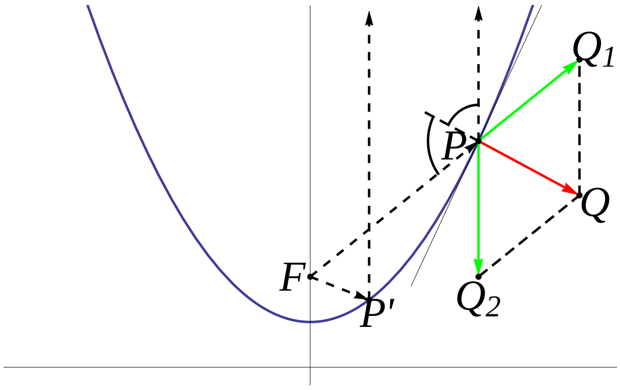
Упътване. Изберете координатната система в равнината така, че оста x да съвпада с l, а точката F да лежи на оста y (т.е. $F = (0, p)$). Покажете, че множеството M се описва с уравнението $y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}$.

Забележка. Неформално параболата може да се разглежда като гранично положение на елипсата, ако единият фокус е неподвижен, а другият отива в безкрайността.

> **7. (Оптично свойство на параболата.)** Покажете, че всеки светлинен лъч, излизащ от фокуса F на параболата, след отражение в параболата става успореден на нейната ос. Разбира се, вярно е и обратното: ако изпратите към параболата сноп лъчи, успореден на нейната ос, след отражението всички те ще се съберат във фокуса на параболата. Това свойство широко се използва в техниката, например във фаровете на колите, в параболичните антени и др.

Упътване. Аналогично на зад. 5, да положим $f_1(P) = ||FP||$, $f_2(x, y) = -y$, и $f(P) = f_1(P) + f_2(P)$. Тогава $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f_1(P) = \frac{\vec{FP}}{||FP||}$,

$\overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P) = (0, -1)$. Параболата M съвпада с нулевата линия на ниво на функцията $f(P)$, т.е. с множеството на всички точки P, за които $f(P) = 0$. Както и по-горе, ще нанесем от точката P единичните вектори $\vec{PQ_1} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_1(P)$, $\vec{PQ_2} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f_2(P)$. Отново четириъгълникът PQ_1QQ_2 е ромб, и следователно $\angle Q_1PQ = \angle Q_2PQ$ (виж чертежа).



Оптично свойство на параболата

Въпроси за самопроверка

1. Дайте дефиниция на производна на функция по дадено направление. Покажете, че частните производни на функцията са специални случаи на тази дефиниция.

2. Покажете как производната по дадено направление се изразява чрез частните производни в точката.

3. Дайте дефиниция на градиент. Как се изразява производната по направление чрез градиента в дадената точка.

4. Какъв е геометричният смисъл на градиента?

5. Дайте дефиниция на елипсата като геометрично място на точки. Като следствие, представете елипсата като линия на ниво на определена функция. Използвайки понятието градиент на функция, докажете оптичното свойство на елипсата.

6. Дайте дефиниция на параболата като геометрично място на точки, и като следствие докажете оптичното свойство на параболата.

1.7 Производни от по-висок ред.

Досега ние разглеждахме само производни от първи ред. Както за функции на едно променливо, ние можем да продължим да диференцираме и да получим производни от по-висок ред. Така, с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x)$ или с $f''_{x_i x_j}(x)$ означаваме производната на функцията $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ по променливата x_j в точката x. За функция $f(x,y)$ на две променливи ние получаваме четири втори производни f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}. Продължавайки нататък, получаваме 8 производни от ред три: f'''_{xxx}, f'''_{xxy} и т.н.

На пръв поглед картината изглежда доста сложна: стигайки до производните от ред k, ще получим, че те са 2^k на брой. Всъщност истинската ситуация е по-проста: в този параграф ние ще покажем, че при някои леки предположения стойността на производните не зависи от реда, в който е извършено диференцирането. Следователно различните производни от ред k не са 2^k, а само $k+1$ на брой.

Ще докажем теоремата за независимостта на висшите производни от реда на диференцирането за функция на две променливи.

Теорема 1. *Нека $f(x,y)$ е функция на две променливи, дефинирана в околност на точката (x_0,y_0). Да предположим, че първите производни f'_x, f'_y, и смесените втори производни f''_{xy} и f''_{yx} съществуват в околност на (x_0,y_0) и са непрекъснати в тази точка. Тогава стойностите на смесените производни в точката са равни:*

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)\,.$$

Доказателство. Ще апроксимираме смесените втори производни с "диференчни частни от втори ред". Нека h и k са достатъчно малки числа. Да означим

$$W(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0,y_0)\,.$$

Да разгледаме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0)\,,$$

дефинирана за стойности на x, достатъчно близки до x_0. Групирайки в израза за $W(h,k)$ първото с второто и третото с четвъртото събираемо, получаваме равенството

$$W(h,k) = (f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)) - (f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)) =$$

$$= \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0+\theta_1 h),$$

за подходящо $\theta_1 \in (0,1)$ (по теоремата за крайните нараствания за функцията φ). Тъй като $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)$, то

$$W(h,k) = hf'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0) =$$

$$= hkf''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k),$$

като последното равенство се получава отново чрез прилагане на теоремата за крайните нараствания, този път за функцията $f'_x(x_0+\theta_1 h, y)$ на променливата y. Тук отново $\theta_2 \in (0,1)$ (разбира се, числата θ_1 и θ_2 зависят от h и k). Оттук

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k),$$

и следователно при $h \to 0$, $k \to 0$ имаме

$$\frac{W(h,k)}{hk} \to f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Ясно е, че в горното разсъждение местата на x и y могат да бъдат разменени. Да въведем друга помощна функция

$$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y).$$

Тогава

$$W(h,k) = \psi(y_0+k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0+\theta_3 k)$$

(тук групирахме първото с третото и второто с четвъртото събираеми в израза за $W(h,k)$). Сега $\psi'(y) = f'_y(x_0+h, y) - f'_y(x_0, y)$, откъдето

$$W(h,k) = f'_y(x_0+h, y_0+\theta_3 k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_3 k).$$

Прилагайки към дясната част теоремата за крайните нараствания по x, получаваме както по-горе

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}\left(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k\right) \text{ и } \lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}\left(x_0, y_0\right),$$

откъдето $f''_{xy}\left(x_0, y_0\right) = f''_{yx}\left(x_0, y_0\right)$. ■

От теоремата следва, че разместването на реда на диференциране е законно и за функции на повече променливи:

Следствие 2. *Ако функцията $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ притежава непрекъснати частни производни до ред k в дадена околност, то тяхните стойности не зависят от реда на диференциране.*

Нека например $f(x,y,z)$ е диференцируема функция на три променливи. Използвайки няколко пъти горната теорема, получаваме например, че

$$f'''_{xxz} = \left(f'_x\right)''_{xz} == \left(f'_x\right)''_{zx} = f'''_{xzx} = \left(f''_{xz}\right)'_x = \left(f''_{zx}\right)'_x = f'''_{zxx},$$

и по същият начин може да се разсъждава за всички частни производни от трети и по-висок ред.

Важен пример. В този раздел ще намерим висшите производни на помощната функция $\varphi(t)$, използвана в предния параграф в определението на производна по направление. Ще припомним нейната дефиниция: нека функцията $f\left(x,y\right)$ е дефинирана и диференцируема достатъчен брой пъти в околност на точката (x_0, y_0). Нека $\vec{e} = (h,k)$ е вектор на нарастването. Функцията $\varphi(t)$ е определена в околност на точката $t = 0$ с формулата

$$\varphi(t) = f\left(x_0 + th, y_0 + tk\right).$$

Както в §6, формулата за диференциране на съставна функция ни дава

$$\varphi'(t) = h\frac{df}{dx}\left(x_0 + ht, y_0 + kt\right) + k\frac{df}{dy}\left(x_0 + ht, y_0 + kt\right).$$

Прилагайки последователно към горното равенство формулата за диференциране на съставна функция, получаваме

$$\varphi''(t) = h\left(h\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) + k\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dx}\right)\right) + k\left(h\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right) + k\frac{d}{dy}\left(\frac{df}{dy}\right)\right) =$$

$$= h^2 \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(и тук във всички производни аргументите са $(x_0 + ht, y_0 + kt)$).

По същия начин може да се пресметне, че

$$\varphi'''(t) = h^3 \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2 k \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Читателят може би е забелязал, че получените формули за $\varphi''(t)$ и $\varphi'''(t)$ формално наподобяват известните изрази за $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$. Това не е случайно. Може да се докаже, че n-тата производна на $\varphi(t)$ се дава с формула, аналогична на бинома на Нютон, т.е. на развитието на $(a+b)^n$:

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} h^{n-p} k^p \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-p} \partial y^p},$$

където $\binom{n}{p}$ е биномният коефициент $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p\ !\ (n-p)!}$.

Доказателството може да бъде проведено чрез индукция по n (аналогично на доказателството на формулата за бинома на Нютон).

Символично, равенството може да се запише във вида

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy} \right)^n f\left(x_0 + ht, y_0 + kt\right).$$

Упражнения.

1. Нека $f(x, y)$ е функцията, определена с равенствата

$$f(x, y) = xy \ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ при } (x, y) \neq (0, 0)\,,\ f(0, 0) = 0.$$

Докажете, че $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ съществуват и са непрекъснати навсякъде в $\mathbb{R}^2$ и че смесените производни в нулата съществуват. Покажете, че

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0).$$

Обяснете защо този факт не противоречи на теорема 1.

1.8 Формула на Тейлор за функции на много променливи. Локални екстремуми.

Формула на Тейлор.В началото ще припомним формулата на Тейлор за функции на една променлива.(Виж част I, §2.7.) Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и притежава производни до ред n в тази околност, за достатъчно малки нараствания $h = \Delta x$ е в сила формулата

$$f\left(x_0+h\right) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k \;+\; R_n(h)$$

(ще напомним, че под нулева производна на една функция се разбира самата функция). За остатъка $R_n(h)$ е в сила оценката $R_n(h) = o(h^n)$, т.е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{R_n(h)}{h^n} = 0.$$

Ако $f(x)$ притежава и $n+1$-ва производна в x_0, е в сила по-точна оценка; най-често за остатъка се използва формулата на Лагранж

$$R_n(h) \;=\; \frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta h\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

за подходящо избрано $\theta \in (0,1)$.

В този параграф ние ще изведем аналогична формула за функция на две променливи. Ще използваме същия похват, както и в предишните параграфи: свеждане на въпроса към функция на една променлива.

Нека $f\left(x,y\right)$ е n-кратно диференцируема функция на n променливи, дефинирана в околност на точката (x_0,y_0). Нека $\vec{e}=(h,k)$ е вектора на нарастването. Да предположим, че отсечката, свързваща точките (x_0,y_0) и (x_0+h,y_0+k), се съдържа в дефиниционната област на функцията f. Тогава ние можем да образуваме познатата вече помощна функция

$$\varphi(t) = f\left(x_0+th, y_0+tk\right),$$

определена за $t\in[0,1]$. В предния параграф ние пресметнахме производните на тази функция:

$$\varphi'(t) = h\frac{df}{dx}\left(x_0 + ht, y_0 + kt\right) + k\frac{df}{dy}\left(x_0 + ht, y_0 + kt\right),$$

$$\varphi''(t) = h^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\varphi'''(t) = h^3\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

и, в общия случай,

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} h^{n-p}k^p \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-p}\partial y^p}, \quad \text{където } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p\,!\,(n-p)!}.$$

Както видяхме в предния параграф, тя притежава производни до ред n включително, и ние можем за всяко $k \leq m-1$ да напишем за нея формулата на Тейлор с $t_0 = 0$ и $\Delta t = 1$:

$$\varphi(1) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!} + R_n,$$

с $R_n = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$ за някое $\theta \in (0,1)$. Тъй като $\varphi(0) = f\left(x_0, y_0\right)$ и $\varphi(1) = f\left(x_0 + h, y_0 + k\right)$, то припомняйки си формулите от предходния параграф за производните на $\varphi(t)$, получаваме

Формула на Тейлор с остатъчен член във вид на Лагранж. *Ако $f(x,y)$ притежава частни производни до ред $k+1$ включително в някаква околност на (x_0, y_0), в сила е равенството*

$$f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f\left(x_0 + h, y_0 + k\right) \ + \ R_n\left(h, k\right),$$

където

$$R_n\left(h,k\right) \ = \ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k\right)$$

за подходящо $\theta \in (0,1)$.

Забележка. За остатъчния член може да бъде използвана всяка от другите познати от част I формули - формата на Шлемилх-Рош или интегралната формула от зад. 3 на §4.3; разликите не са съществени.

Следствие (остатъчен член във формата на Пеано). *За остатъчния член* $R_n(h,k)$ *е в сила съотношението* $R_n(h,k) = o\left(||h,k||^n\right)$, *т.е.*

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{R_n(h,k)}{||h,k||^n} = 0.$$

Доказателство. Да означин

$$r = ||(h,k)|| = \sqrt{h^2+k^2}.$$

Тогава числата $|h/r|$ и $|k/r|$ не надминават единица. Знаем, че

$$R_n(h,k) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}h^{n+1-p}k^p\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-p}\partial y^p}\left|f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)\right|.$$

За да докажем равенството $R_n(h,k) = o(r^n)$, е достатъчно да проверим това равенство за всяко от събираемите отдясно. Имаме

$$\frac{1}{r^n}\left|\binom{n+1}{p}h^{n+1-p}k^p\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-p}\partial y^p}f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)\right| \le$$

$$\le |h|\,.\,|h/r|^{n-p}\,.\,|k/r|^p\left|\binom{n+1}{p}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-p}\partial y^p}f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)\right|.$$

Нека C_1 е една горна граница за функцията $\left|f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)\right|$, и $C = \binom{n+1}{p}.C_1$. Тогава

$$\left|\frac{\binom{n+1}{p}h^{n+1-p}k^p\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1-p}\partial y^p}f\left(x_0+\theta h, y_0+\theta k\right)}{r^n}\right| \le C\ \ |h|\,,$$

което доказва твърдението. ■

Най-често формулата на Тейлор се използва за малки стойности на n. Ще я напишем при $n=1$ и $n=2$. При $n=1$ получаваме

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right)=f\left(x_0, y_0\right)+h \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)+k \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right),$$

което съвпада с доказаната в §4 формула за нарастването.

При $n=2$ имаме формулата

$$\boxed{\begin{aligned} f\left(x_0+h, y_0+k\right)=f\left(x_0, y_0\right)+\left(h \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right)+k \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right)\right)+ \\ +\frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2 h k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(x_0, y_0\right)+o\left(\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2\right),\end{aligned}}$$

която ще използваме по-нататък.

Локални екстремуми. Определението на локален екстремум на функция на много променливи звучи по същия начин, както и за функция на една променлива:

Определение. *Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в областта $D \subset \mathbb{R}^2$. Точката $P_0=\left(x_0, y_0\right) \in D$ се нарича точка на локален максимум за $f(x, y)$, ако*

а/ P_0 е вътрешна за D (т.е. съдържа се в D заедно с някаква своя кръгова околност, и

б/ съществува $\varepsilon>0$ такова, че $f(P) \leq f\left(P_0\right)$ за всяко $P \in D$, за което $\rho\left(P, P_0\right)<\varepsilon$.

С други думи, стойността на функцията в точката P_0 е най-голяма в сравнение със съседните точки.

Трябва да се прави разлика между понятията локален и глобален максимум - в последния се иска стойността на функцията да е по-голяма от стойностите във *всички* точки на D. Да си представим, че изкачваме планината и сме достигнали връх. Този връх може да не е най-високия (максимумът не е глобален), но всички съседни точки се намират по-ниско, т.е. надморската височина има локален максимум.

Ако в б/ вместо $f(P) \leq f\left(P_0\right)$ пишем $f(P) \geq f\left(P_0\right)$, получаваме определението на локален минимум.

Накрая, под точка на локален екстремум ще разбираме точка, която е или локален минимум, или локален максимум.

Ще напомним резултатите в едномерния случай (виж част I, §2.9): Нека точката x_0 е вътрешна за дефиниционния интервал на функцията $f(x)$. За да бъде x_0 точка на локален екстремум, имаме следните условия:

– необходимо условие: ако x_0 е локален екстремум, то $f'(x_0) = 0$ (теорема на Ферма).

– достатъчно условие: ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 е локален минимум; ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 е локален максимум. (доказва се чрез развитие по Тейлор от ред 2 на $f(x)$ около точката x_0.)

Елементарни примери показват, че нито необходимото условие е достатъчно, нито достатъчното условие е необходимо.

За функции на няколко променливи ситуацията е аналогична. Ще изложим необходимото условие:

Теорема 1. (необходимо условие за локален екстремум). *Нека точката (x_0, y_0) е локален екстремум за функцията $f(x, y)$. Ако в (x_0, y_0) тази функция притежава частни производни, то всички те са равни на нула, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0, y_0) = 0.$$

Доказателство. Нека за определеност (x_0, y_0) е точка на локален максимум. Ще използваме съответните частични функции на една променлива. По-подробно,да означим чрез

$$\varphi_i(x) = f(x, y_0)$$

функцията на едно променливо x, получена чрез фиксиране $y = y_0$. Очевидно $\varphi_i(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0 и притежава локален максимум в тази точка (докажете!). Тогава според споменатата малко по-горе теорема на Ферма (необходимо условие за локален екстремум на функция на една променлива) имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi'(x_0) = 0.$$

Аналогично, можем да разгледаме частичната функция $\psi(y) = f(x_0, y)$. Тя очевидно има локален максимум при $y = y_0$, откъдето по същия начин се получава, че $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \psi'(y_0) = 0$. ■

Удобно е да въведем следното понятие:

Определение. *Точка, вътрешна за дефиниционната област, в която всички частни производни на функцията f се анулират, наричаме критична точка за дадената функция.*

От горната теорема веднага следва едно полезно наблюдение:

Следствие 2. *Ако $f(x, y)$ е еднократно гладка непрекъсната функция, дефинирана върху компактното множество $D \subset \mathbb{R}^2$, то нейните най-голяма и най-малка стойности се достигат или върху контура на D, или в някоя от критичните точки на функцията.*

Доказателство. Наистина, според втората теорема на Вайерщрас минималната и максималната стойност на $f(x)$ се достигат в някои точки на D, които могат да бъдат вътрешни или контурни. Ако глобалният максимум се достига във вътрешна точка на D, то тази точка е също и локален максимум и следователно е критична точка. Разбира се, същото е вярно и за глобалния минимум. ■

За намиране на достатъчното условие ще изследваме члена от развитието по Тейлор, съдържащ вторите производни на функцията. Както ще видим, този член представлява квадратична функция на координатите h, k на нарастването.

Ще припомним някои понятия от линейната алгебра, засягащи такива функции (наричани обикновено квадратични форми). Нека $\mathcal{A}(h, k)$ е квадратична форма в $\mathbb{R}^2$, дефинирана с формулата

$$\mathcal{A}(h, k) \ = \ Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Определение. *Квадратичната форма $\mathcal{A}$ се нарича*

– положително определена (съотв. отрицателно определена), ако за всеки ненулев вектор $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, $(h, k) \neq \vec{0}$, имаме $\mathcal{A}(h, k) > 0$ (съотв. $\mathcal{A}(h, k) < 0$).

– знакопроменлива, ако съществуват вектори $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in \mathbb{R}^2$, така че $\mathcal{A}(h_1, k_1) > 0$, $\mathcal{A}(h_2, k_2) < 0$.

Примери. В пространството $\mathbb{R}^2$ с координати x, y можем да разгледаме квадратичните форми, зададени с формулите*:

- $x^2 + y^2$ – положително определена,
- $-x^2 - y^2$ – отрицателно определена,
- $x^2 - y^2$ – знакопроменлива,

Критерий за определеност на квадратична форма. *Нека*

$$\mathcal{A}(h,k) \;=\; Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$

е написаната по-горе квадратична форма с коефициенти A, B, C, *и нека*

$$D = B^2 - A\ C$$

е нейната дискриминанта. Тогава:

1/ Ако $D < 0$ *и* $A > 0$, *то формата* $\mathcal{A}(h,k)$ *е положително определена.*

2/ Ако $D < 0$ *и* $A < 0$ *то формата* $\mathcal{A}(h,k)$ *е отрицателно определена.*

3/ Ако $D > 0$, *то формата* $\mathcal{A}(h,k)$ *е знакопроменлива.*

Доказателство. Доказателството се основава на познатото от училище преобразуване на квадратния тричлен - т.н. отделяне на пълен квадрат. Да предположим, че $A \neq 0$. Имаме

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = A\left(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \frac{C}{A}k^2\right) =$$

$$= A\left(\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}k^2\right).$$

Нека $D > 0$. Тогава при $(h,k) \neq (0,0)$ изразът в скобите е строго положителен, и следователно $\mathcal{A}(h,k)$ има знака на A.Това доказва 1/ и 2/.

*В алгебрата се доказва, че всяка квадратична форма в $\mathbb{R}^2$ се привежда към една от изброените чрез линейна смяна на променливите.

Нека сега $D = B^2 - AC > 0$. Тогава за двойки (h, k), за които $h = -\frac{B}{A}k$, изразът в скобите е отрицателен, а за двойки от вида $(h, 0)$ - положителен.

Условието $A \neq 0$ не намалява общността; наистина, ако $A = 0$, но $C \neq 0$, при преобразованието можем да делим на C вместо на A, и резултатът е същия. Накрая, ако $A = C = 0$, то $\mathcal{A}(h, k) = 2Bhk$. За такава форма директно се проверява, че е налице случая 3/, т.е. тя е знакопроменлива (докажете!). ■

Сега можем да формулираме достатъчното условие за екстремум.

Теорема 3. (достатъчно условие за локален екстремум.) *Нека $f(x, y)$ е двукратно гладка функция, дефинирана в околност на точката (x_0, y_0). Нека освен това (x_0, y_0) е критична точка, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Да означим

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Тогава

1/ Ако $B^2 < AC$ и $A > 0$, то точката (x_0, y_0) е строг локален минимум за функцията f.

2/ Ако $B^2 < AC$ и $A < 0$, то точката (x_0, y_0) е строг локален максимум за функцията f.

3/ Ако $B^2 < AC$, то точката (x_0, y_0) не е точка на локален екстремум за f.

Доказателство на достатъчното условие. Ще използваме развитието на функцията в ред на Тейлор до членове от втора степен включително. Нека $f(x, y)$ е двукратно гладка функция, и (x_0, y_0) е нейна критична точка, т.е. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Да дадем на x и на y нараствания съответно h и k. По формулата на Тейлор

$$\Delta f(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(h^2 f''_{xx}(x_0,y_0) + 2hk f''_{xy}(x_0,y_0) + k^2 f''_{yy}(x_0,y_0)\Big) + r(h,k)$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{A}(h,k) + r(h,k),$$

тъй като по предположение първите производни на функцията се анулират. Остатъкът

$$r(h,k) = o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right)$$

е малък по порядък, и при достатъчно малки h и k знакът на разликата отляво съвпада със знака на първото събираемо отдясно (което е квадратична форма на h и k, която сме означили с $\mathcal{A}(h,k)$). Да означим, както по-горе, $f''_{xx}(x_0,y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0,y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0,y_0) = C$.

Според доказания по-горе критерий за определеност на квадратичната форма $\mathcal{A}(h,k)$ получаваме:

– при $B^2 < AC$ и $A > 0$ имаме винаги $\Delta f(h,k) > 0$, т.е (x_0,y_0) е точка на локален минимум;

– при $B^2 < AC$ и $A < 0$ имаме винаги $\Delta f(h,k) < 0$, т.е (x_0,y_0) е точка на локален минимум;

– и най-сетне, при $B^2 > AC$ при някои стойности на h и k ще имаме $\Delta f(h,k) < 0$, а при други - $\Delta f(h,k) > 0$; следователно в този случай (x_0,y_0) не е точка на локален екстремум. ■

Забележка. Нищо не може да се твърди в случаите, когато $B^2 - AC = 0$: този случай може да има или да няма локален екстремум. Така, ако разгледаме функциите

$$f(x,y) = x^2 + y^4 \quad \text{и} \quad g(x,y) = x^2 - y^4$$

в $\mathbb{R}^2$, то в критичната точка $(0,0)$ имаме

$$\mathcal{A}_f(h,k) = \mathcal{A}_g(h,k) = h^2,$$

но първата функция притежава локален екстремум в тази точка, а втората – не.

В частност, оттук се вижда, че достатъчното условие от теоремата не е необходимо.

Глобални екстремуми. В повечето случаи е важно да намерим най-голямата и на-малката стойности на дадена функция върху цялото дефиниционно множество, т.е. глобалният минимум и максимум на функцията. Да предположим, че дефиниционното множество D на функцията $f(x)$ е компактно множество в $\mathbb{R}^n$. Тогава по теоремата на Вайерщрас $f(x)$ достига най-малка и най-голямата си стойност в подходящи точки на D. Тогава получаваме следната алтернатива (виж следствие 2): глобалният максимум може да се достигне във вътрешна или контурна точка на D. Ако максимумът се достига във вътрешна точка, то той е и локален, и ние можем да използваме развитата по-горе теория. Разбира се, всичко казано тук се отнася и за глобалния минимум.

Ние обаче все още не разполагаме със средства за откриване на екстремумите върху контура bD на дефиниционната област. За случая на "гладък"контур това ще бъде направено в §9.

В някои случаи подобни разсъждения могат да бъдат проведени и за некомпактни области – виж напр. задачи 2 и 3.

Приложение: Метод на най-малките квадрати. В този пункт ще дадем едно просто приложение на необходимото условие за локален екстремум, което обаче намира широко приложение в естествените науки. Нека x, y, z са някакви величини, и ние искаме да покажем, че между тях съществува линейна зависимост от вида

$$z = ax + by + c.$$

Проблема е да се намерят коефициентите a, b и c.

Разбира се, тяхното определяне трябва да се базира на направените измервания. Да предположим, че е проведена серия от n експеримента, в резултат на които са измерени величините $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$. Трябва да се намерят такива стойности на коефициентите, така че експериментално измерените стойности z_k най-малко се различават от теоретично намерените по формулата $z_k = ax_k + by_k + c$. Метода на най-малките квадрати се състои в следното: да се минимизира сумата от квадратите на отклоненията. По-точно, ако означим

$$F(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right)^2 ,$$

трябва да определим къде тази функция достига минималната си стойност. За критичните точки на тази функция получаваме уравненията:

$$F'_a = 2\sum_{k=1}^{n} x_k\left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0,$$

$$F'_b = 2\sum_{k=1}^{n} y_k\left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0,$$

$$F'_c = 2\sum_{k=1}^{n} \left((ax_k + by_k + c) - z_k\right) = 0.$$

Да въведем нови означения: Нека означим с $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ n-мерните вектори $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$, и нека $\vec{1}$ да означава n-мерният вектор, съставен само от единици. Тогава $F(a, b, c)$ се написва като

$$F(a, b, c) = \left|\left|\vec{z} - a.\vec{x} - b.\vec{y} - c.\vec{1}\right|\right|^2.$$

Уравненията на критична точка, след разкриване на скобите, са линейни относно a, b и c и имат вида:

$$a\left\langle \vec{x}, \vec{x}\right\rangle + b\left\langle \vec{x}, \vec{y}\right\rangle + c\left\langle \vec{x}, \vec{1}\right\rangle = \left\langle \vec{x}, \vec{z}\right\rangle,$$

$$a\left\langle \vec{y}, \vec{x}\right\rangle + b\left\langle \vec{y}, \vec{y}\right\rangle + c\left\langle \vec{y}, \vec{1}\right\rangle = \left\langle \vec{y}, \vec{z}\right\rangle,$$

$$a\left\langle \vec{1}, \vec{x}\right\rangle + b\left\langle \vec{1}, \vec{y}\right\rangle + c\left\langle \vec{1}, \vec{1}\right\rangle = \left\langle \vec{1}, \vec{z}\right\rangle.$$

В линейната алгебра се доказва, че ако векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{1}$ са линейно независими*, то детерминантата, съставена от коефициентите пред неизвестните, е различна от нула (т.н. детерминант на Грам). Следователно системата притежава единствено решение за a, b и c. Тъй като за функцията $F(a, b, c)$ е изпълнено

$$\lim_{||(a,b,c)|| \to \infty} F(a, b, c) = +\infty,$$

то така намерената единствен критична точка е локален и глобален минимум на функцията (виж зад. 2).

*Ако векторите $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{1}$ са линейно зависими, това означава, че една от величините x, y се изразява линейно чрез другата и е излишна в дадения модел.

Упражнения.

1. Нека в $\mathbb{R}^2$ е зададена функцията $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$. Докажете, че:

а/ $f(x,y)$ няма локален екстремум в точката $(0,0)$. (Упътване: разгледайте точките от вида $(0,y)$ и $(x, 2x^2)$).

б/ Ограничението на функцията върху произволна права през точката $(0,0)$ притежава строг локален минимум в тази точка.

2. Нека $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, е непрекъсната функция такава, че $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty$. Докажете, че минималната стойност на $f(x)$ се достига в някоя точка.

3. Нека $f(x)$ е еднократно гладка функция в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяваща условията на предната задача. Докажете, че ако $f(x)$ притежава само една критична точка, то в нея се достига глобалният минимум.

Въпроси за самопроверка.

1. Напишете формулата на Тейлор за функция на две променливи с остатъчен член във формата на Лагранж. Напишете и частния случай, включващ производни до ред 3 включително.

2. Дайте дефиницията за локален екстремум на функция на две променливи.

3. Формулирайте необходимото условие за локален екстремум (включващо първите производни на функцията). Достатъчно ли е това условие?

4. Какво е квадратична форма на две променливи? Какво означава такава форма да е положително, илиотрицателно, определена?

5. Формулирайте критерия за положителнаили отрицателна определеност на квадратична форма.

6. Формулирайте достатъчното условие за локален екстремум, включващо вторите производни в точката.

7. Опишете метода на най-малките квадрати.

1.9 Теорема за неявната функция.

Първата теорема, разглеждана в този параграф, се отнася до решаване на уравнения от вида $F(x, y) = 0$ спрямо една от променливите, например y. Другата променлива - x - се разглежда като параметър, и очевидно решението трябва да зависи от нея. Да запишем това решение във вида $y = f(x)$. За да проверим дали така дефинираното y е решение на търсеното уравнение, трябва да го заместим в уравнението. Стигаме до равенството

$$F\left(x, f(x)\right) \equiv 0.$$

Определение. *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява тъждествено горното равенство за всяко x от дефиниционната си област, ще казваме, че тя е неявна функция, определена от уравнението $F(x, y) = 0$.*

Геометрически това може да се каже така: множеството от точки в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството $F(x, y) = 0$, да се представи като графика на функцията $f(x)$.

По-долу ние разглеждаме въпроса за съществуване и единственост на неявната функция. Разбира се, ние ще се интересуваме от неявни функции с хубави свойства, в частност диференцируеми. Ако $f(x)$ е такава функция, то, диференцирайки горното равенство по x и използвайки теоремата за диференциране на съставни функции, получаваме

$$F'_x\left(x, f(x)\right) + f'(x)F'_y\left(x, f(x)\right) \equiv 0,$$

откъдето

$$f'(x) = -\frac{F'_x\left(x, f(x)\right)}{F'_y\left(x, f(x)\right)}.$$

Оттук се вижда. че е естествено да наложим на функцията F условието $F'_y(x, y) \neq 0$.

Ще разгледаме един прост пример. Да вземем уравнението

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

определящо окръжност с център в началото и радиус R в равнината $\mathbb{R}^2$. Ясно е, че за да има уравнението решение, трябва $x \in [-R, R]$. В крайните точки $x = \pm R$ се нарушава условието $F'_y(x, y) \neq 0$. Лесно се вижда, че в тези точки окръжността не може да бъде представена като графика на диференцируема функция (тангентата ѝ става вертикална).

За всяко x от отворения интервал $(-R, R)$ това уравнение има точно две решения относно y:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Ако се интересуваме само от непрекъснати функции, получаваме само две неявни функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, т.е. отново няма еднозначност. За да се избегне нееднозначността, нещата трябва да се разглеждат локално – да се фиксира едно решение в дадена точка (тя може да лежи върху горната или долната полуокръжност), и да се разгледа непрекъснатата функция, вземаща съответната стойност в тази точка. Тогава, в зависимост от избраното решение в началната точка, ще получим уравнението на горната или долната полуокръжност.

Сега вече сме подготвени да дадем точната формулировка на теоремата:

Теорема 1. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение). *Нека $F(x, y)$ е диференцируема функция в $\mathbb{R}^2$. Нека (x_0, y_0) е точка от дефиниционното ѝ множество, удовлетворяваща условията*

$$F(x_0, y_0) = 0\,,\; F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогава съществува единствена непрекъсната функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в достатъчно малък интервал от вида $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, която удовлетворява условията:

1/ $f(x_0) = y_0$, и

2/ $F(x, f(x)) \equiv 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (основно свойство).

Функцията $f(x)$ е диференцируема, като

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Забележка. Функцията $f(x)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/, се нарича неявна функция, определена от уравнението $F(x, y) = 0$.

Може да се каже, че $y = f(x)$ е решение на това уравнение, зависещо от параметъра x. Условието 2/ означава точно това - че решението удовлетворява съответното уравнение. Условието 1/ се добавя, за да се получи единственост.

Предположението, че $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, е съществено за теоремата: това личи и от формулата за $f'(x)$, в която F'_y е в знаменателя.

Доказателство на теоремата за неявната функция. За определеност можем да предположим, че $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Тогава неравенството $F'_y(x, y) > 0$ е вярно и в някаква околност U на (x_0, y_0) в $\mathbb{R}^2$.

Да разгледаме $F(x_0, y)$ като функция на y; от горното следва, че тя е строго монотонно растяща в някаква околност на y_0. Тъй като $F(x_0, y_0) = 0$, то при достатъчно малки стойности на $\varepsilon > 0$ ще имаме

$$F(x_0, y) > 0 \,\text{при}\, y \in (y_0, y_0 + \varepsilon]\,, \quad \text{и} \quad F(x_0, y) < 0 \,\text{при}\, y \in [y_0 - \varepsilon, y_0)\,.$$

Да прекараме през точките $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ и $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ хоризонтални отсечки: тогава знакът на $F(x, y)$ се запазва в някаква околност на тези точки (виж чертежа, на който са означени знаците на $F(x, y)$ в съответните точки).

Тогава можем да изберем (достатъчно малко) $\delta > 0$, така че знакът на $F(x, y)$ да се запазва и върху горната и долната основа на полученив правоъгълник.

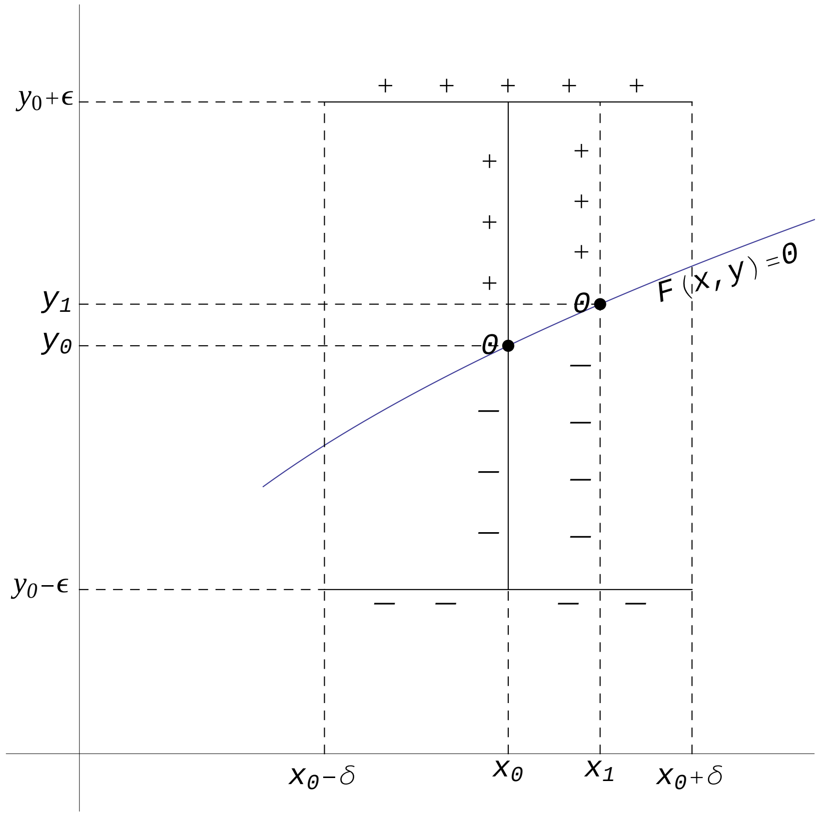
С други думи, за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имаме $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$.

Освен това можем да считаме, че навсякъде във въпросния правоъгълник $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ продължава да е изпълнено изискването $F'_y > 0$.

Да фиксираме $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; тогава функцията $F(x_1, y)$ е строго монотонно растяща в интервала $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, взема отрицателна стойност в левия му край и положителна - в десния. Следователно съществува *единствено* $y_1 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ такова, че $F(x_1, y_1) = 0$. Полагайки $f(x_1) = y_1$, получаваме функция, дефинирана в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и удовлетворяваща условията 1/ и 2/ от точка а/.

Ще отбележим едно следствие от горната конструкция: ако (x, y) е произволна точка от Δ такава, че $F(x, y) = 0$, то $y = f(x)$.

Ще докажем непрекъснатостта на така дефинираната функция $f(x)$. Най-напред ще докажем непрекъснатостта в точката x_0. Горната



Доказателство на теоремата за неявната функция.

конструкция може да се изложи по следния начин: за всяко достатъчно малко $\varepsilon > 0$ ние намерихме $\delta > 0$, така че за всяко x, за което $|x - x_0| < \delta$, ще имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; това е точно дефиницията на Коши за непрекъснатост. По същия начин се доказва и непрекъснатостта на $f(x)$ във произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Диференцируемост на неявната функция: Ако предварително ни е известно, че неявната функция $f(x)$ е диференцируема, то, както беше показано в началото на параграфа, формулата за $f'(x)$ се получава чрез диференциране на равенството $F(x, f(x)) \equiv 0$.

За да докажем диференцируемостта на $f(x)$, ще използваме формулата за нарастването за диференцируемата функция $F(x, y)$. Нека x е достатъчно близко до

x_0, $y = f(x)$, $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$. Тогава

$$\Delta F = F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0 - 0 = 0,$$

и формулата за нарастването дава

$$0 = \Delta F = F'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

където $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогава

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Оттук следва диференцируемостта на $f(x)$ в x_0, както и формулата за производната и; разбира се, същата формула е валидна за всяко x от дефиниционния интервал. ■

Геометрична интерпретация. Нека $F(x, y)$ е еднократно гладка функция в $\mathbb{R}^2$. Да означим с M множеството на нулите на $F(x, y)$, т.е. от точките (x, y) в равнината, за които $F(x, y) = 0$. Ще предположим, че в нито една точка от M двете първи частни производни $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ не се анулират едновременно. Тогава доказаната по-горе теорема допуска следната геометрична интерпретация:

Теорема 2. *При горното условие множеството M локално (т.е. в някаква околност на всяка своя точка) се представя като графика на гладка функция.*

Наистина, да фиксираме някаква точка $(x_0, y_0) \in M$. Ако имаме $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, и $f(x)$ е съответната неявна функция, от горното доказателство се вижда, че в някаква околност на (x_0, y_0) равенствата $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ са еквивалентни. Аналогично, ако $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то около (x_0, y_0) множеството M се представя с уравнението $x = f(y)$.

Теорема за неявната функция за едно уравнение и няколко параметъра. В следващия по сложност случай, който ще разгледаме, отново имаме едно уравнение $F(x, y) = 0$, което трябва да бъде решено относно променливата y, но в този случай параметъра x е вече векторна - n-мерна - променлива, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формулировката и доказателството в този случай почти напълно съвпадат с дадените по-горе, и ние само ще формулираме теоремата.

Теорема 3. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение и няколко параметъра). *Нека $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$ е* *диференцируема функция в* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Нека* $(x^0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ *е точка от дефиниционното ѝ множество, удовлетворяваща условията*

$$F\left(x^0, y_0\right) = 0\,,\; F'_y\left(x^0, y_0\right) \neq 0.$$

Тогава съществува единствена непрекъсната функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, *дефинирана и непрекъсната в достатъчно малко кълбо* $B(x^0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ *с център* x^0 *и радиус* δ, *която удовлетворява условията:*

1/ $f(x^0) = y_0$, *и*

2/ $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \equiv 0$ *за всяко* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(x^0, \delta)$.

Функцията $f(x)$ *е диференцируема, като*

$$f'(x_i) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad \text{за } i = 1, \ldots, n.$$

Теорема за неявната функция за повече уравнения. Тук ще формулираме и докажем теорема, аналогична на дадената по-горе, за случая на 2 уравнения с 2 неизвестни и 2 параметъра. Нека имаме уравненията

$$F(x, y, u, v) = 0,$$
$$G(x, y, u, v) = 0,$$

където F и G са еднократно гладки функции на четири променливи, и нека нашата цел е да ги разрешим относно променливите u и v, т.е. да изразим u и v чрез параметрите x и y. По-точно, ние искаме да намерим функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ такива, че при заместването им в уравненията да получим тъждества относно x и y:

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$
$$G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0.$$

Да предположим, че диференцируемите функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са вече намерени, да се опитаме да пресметнем техните производни, например, по x. Диференцирайки по x горните тъждества, получаваме

$$F'_x + u'_x F'_u + v'_x F'_v \equiv 0,$$

$$G'_x + u'_x G'_u + v'_x G'_v \equiv 0.$$

Тези равенства могат да се разглеждат като система от линейни уравнения относно неизвестните u'_x, v'_x. Както знаем от линейната алгебра, ако детерминантата от коефициентите пред неизвестните не се анулира, те имат единствено решение, зададено с формулите на Крамер. С други думи, ако предположим, че

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0,$$

то частните производни на $u(x,y)$ и $v(x,y)$ относно x ще се задават с формулите

$$u'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}, \; v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}.$$

Ако се опитаме да намерим u'_y, v'_y, отново ще стигнем до условието $\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$; ясно е, че това условие замества условието $F'_y \neq 0$, наложено в случая на едно уравнение. Имайки това пред вид, вече можем да формулираме теоремата в случая на 2 уравнения с 2 неизвестни и 2 параметъра:

Теорема 4. (Теорема за неявната функция - случай на 2 уравнения с 2 неизвестни.)

Нека $F(x,y,u,v)$ и $G(x,y,u,v)$ са диференцируеми функции в $\mathbb{R}^4$. Нека (x_0,y_0,u_0,v_0) е точка от дефиниционното ѝ множество, удовлетворяваща условията

$$F(x_0,y_0,u_0,v_0) = G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$$

и

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}(x_0,y_0,u_0,v_0) \neq 0.$$

Тогава съществува единствена двойка функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, дефинирани и диференцируеми в достатъчно малка околност на точката (x_0,y_0), които удовлетворяват условията:

1/ $u(x_0, y_0) = u_0, \;\; v(x_0, y_0) = v_0,$

и

2/ $F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0$ *и* $G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0$ *за всяка точка* (x, y) *от дефиниционната им област.*

Доказателство. Трябва да решим уравненията

$$F(x, y, u, v) = 0, \;\; G(x, y, u, v) = 0$$

относно u и v в околност на точката (x_0, y_0, u_0, v_0) при условие, че $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ и $\frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$.

Ще следваме обичайния метод на решаване на системи от две уравнения - ще определим едната от неизвестните величини от едното уравнение и ще я заместим в другото, като получим в резултат едно уравнение с едно неизвестно.

Да отбележим най-напред, че от условието на теоремата следва, че поне една от частните производни F'_u, F'_v, G'_u, G'_v не се анулира в точката (x_0, y_0, u_0, v_0); може да предположим, че $G'_v(x_0, y_0, u_0, v_0) \neq 0$. Следователно може да приложим теоремата за неявната функция (за едно уравнение) за уравнението

$$G(x, y, u, v) = 0$$

и да го решим относно променливата v. Получаваме функция $\varphi(x, y, u)$ със свойствата

$$G(x, y, u, \varphi(x, y, u)) \equiv 0, \quad \varphi(x_0, y_0, u_0) = v_0.$$

Чрез диференциране на горното тъждество по u получаваме

$$\varphi'_u(x, y, u) = -\frac{G'_u(x, y, u, \varphi(x, y, u))}{G'_v(x, y, u, \varphi(x, y, u))}.$$

Да заместим променливата v в първото уравнение с $\varphi(x, y, u)$; получаваме уравнението

$$\widetilde{F}(x, y, u) \overset{def}{=} F(x, y, u, \varphi(x, y, u)) = 0.$$

По теоремата за диференциране на съставни функции получаваме

$$\widetilde{F}'_u = F'_u + \varphi'_u F'_v = F'_u - \frac{G'_u}{G'_v} F'_v = \frac{\frac{D(F,G)}{D(u,v)}}{G'_v},$$

което по условие не се анулира в точката (x_0, y_0, u_0, v_0). Следователно можем да приложим теоремата за неявната функция към уравнението $\widetilde{F}(x, y, u) = 0$. Да означим получената функция с $u(x, y)$, и нека $v(x, y) = \varphi(x, y, u(x, y))$. Лесно се вижда, че така построената двойка функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворява исканите условия, т.е.

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \quad G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

$$u\,(x_0, y_0) = u_0, \quad v\,(x_0, y_0) = v_0. \blacksquare$$

Забележка. По абсолютно същия начин може да се формулира и общия вариант на теоремата за неявната функция: той се отнася за решаването на система от n уравнения с n неизвестни относно m параметъра. (Забележете, че броя на уравненията трябва да е равен на броя на неизвестните, а броя на параметрите е произволен.) Отново в условията на теоремата трябва да се поиска функционалната детерминанта на уравненията по неизвестните не се анулира. Доказателството отново се извършва по метода на заместването, като n-те уравнения с n неизвестни се свеждат към $n-1$ уравнения с $n-1$ неизвестни.

Теорема за обратното изображение. Едно от важните приложения на теоремата за неявната функция е теоремата за обратното изображение. Нека $\Phi(u, v)$ е изображение от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, дефинирано с формулите

$$x = x(u, v), \ \ y = y(u, v)$$

за $(u, v) \in D$, където D е отворено множество в $\mathbb{R}^2$. Нека освен това

$$\frac{D\,(x, y)}{D\,(u, v)}(u, v) \neq 0 \quad \text{навсякъде в} \quad D$$

(такова изображение ще наричане регулярно). Теоремата гласи, че всяко регулярно изображение локално (т.е в малка околност на всяка точка) е обратимо.

Теорема за обратното изображение. Едно от важните приложения на теоремата за неявната функция е теоремата за обратното изображение. Нека $\Phi(u, v)$ е изображение от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, дефинирано с формулите

$$x = x(u, v), \ \ y = y(u, v)$$

за $(u, v) \in D$, където D е отворено множество в $\mathbb{R}^2$. Нека освен това

$$\frac{D\,(x, y)}{D\,(u, v)}(u, v) \neq 0 \quad \text{навсякъде в} \quad D$$

(такова изображение ще наричане регулярно). Теоремата гласи, че всяко регулярно изображение локално (т.е в малка околност на всяка точка) е обратимо.

Теорема 5. (Теорема за обратното изображение). *Нека $\Phi(u,v)$ е изображение, удовлетворяващо горните условия. Нека $(u_0,v_0)\in D$. Да означим $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$. Тогава в околност на точката (x_0,y_0) съществува диференцируемо и регулярно изображение*

$$\Psi(x,y):\ u=u(x,y),\ v=v(x,y),$$

обратно на изображението $\Phi(u,v)$.

Доказателство. Да разгледаме графиката Γ_Φ на изображението $\Phi(u,v)$, т.е. множеството от всички точки $(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4$, за които $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Очевидно множеството Γ_Φ може да се зададе с уравненията

$$F(x,y,u,v)\stackrel{def}{=}x(u,v)-x=0,\ \ G(x,y,u,v)\stackrel{def}{=}y(u,v)-y=0$$

Да вземем точката $(x_0,y_0,u_0,v_0)\in\Gamma_\Phi$. Имаме

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}(x_0,y_0,u_0,v_0)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u_0,v_0)\neq 0$$

и следователно около тази точка можем да приложим теоремата за неявната функция, считайки u и v за независими променливи и изразявайки чрез тях x и y. С други думи, в някаква околност на точката (x_0,y_0) съществуват единствени функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, и определено от тях изображение $\Psi(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$, удовлетворяващи условията

1/ $u(x_0,y_0)=u_0$, $v(x_0,y_0)=v_0$, и
2/ $F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0$.

Равенствата 2/ могат да се напишат във вида

$$u(x(u,v),y(u,v))\equiv u,\ \ v(x(u,v),y(u,v))\equiv v,$$

или, другояче написано,

$$\Psi(\Phi(u,v))\equiv(u,v).$$

Това означава, че изображенията $\Psi(x,y)$ и $\Phi(u,v)$ са обратни едно на друго.

Накрая, регулярността на изображението $\Psi(x,y)$ следва от основното свойство на функционалните детерминанти. Наистина, от основното свойство на функционалните детерминанти следва, че

$$\frac{D\,(x,y)}{D\,(u,v)}.\frac{D\,(u,v)}{D\,(x,y)}=1$$

и следователно

$$\frac{D\,(u,v)}{D\,(x,y)}\neq 0. \quad \blacksquare$$

Въпроси за самопроверка.

1. Напишете дефиницията на неявна функция, определена от уравнението $F(x,y)=0$ (условия 1/ и 2/ от теорема 1).

2. Докажете теоремата за неявната функция в случая на едно уравнение, използвайки дадения чертеж.

3. Напишете формулата производна на неявна функция. Изчислете по тази формула производната на неявната функция, определена от уравнението $x^2+y^2=1$, и проверете дали се получава същия резултат, както при диференцирането на функцията $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

4. Напишете свойствата на двойката неявни функции, определени от две уравнения с две неизвестни и два параметъра. Опишете процедурата, по която могат да бъдат пресметнати производните на неявните функции в този случай.

5. Формулирайте теоремата за обратното изображение за изон=бражения на $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Докажете, че полярната смяна на координатите

$$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta$$

удовлетворява условията на теоремата около всяка точка на равнината, освен началото.

1.10 Условни локални екстремуми. Множители на Лагранж.

В задачата за търсене на максимална и минимална стойности на функция на много променливи в област $D \subset \mathbb{R}^n$, разгледана в §7, остана открит следния проблем: да се намерят екстремалните стойности на функцията върху границата bD на областта D. Ако например D е кълбо, то възниква въпросът за търсене на екстремумите на функцията върху ограничаващата го сфера. На такава задача е посветен настоящият параграф.

Нека M е подмножество на $\mathbb{R}^n$ и $f(x)$ е функция, дефинирана върху M (ще я наричаме целева функция).

Определение. *Казваме, че точката $P_0 \in M$ е точка на условен локален максимум на функцията $f(P)$ върху множеството M, ако съществува $\varepsilon > 0$, така че за за всяка точка $P \in M$, за която $\rho(P, P_0) < \varepsilon$, да имаме*

$$f(P) \leq f(P_0).$$

Казваме, че $P_0 \in M$ е точка на условен локален минимум на $f(P)$ върху M, ако за всяка такава точка P имаме $f(P) \geq f(P_0)$.

Най-сетне, казваме, че P_0 е точка на условен локален екстремум., ако е изпълнено някое от горните условия.

Както се вижда, това определение се различава от даденото в §5 определение на (безусловен) локален максимум по това, че се разглеждат само стойностите на $f(P)$ върху множеството M.

Като пример ще разгледаме една елементарна геометрична задача: измежду всички правоъгълници с даден периметър да се намери този с максимално лице. Ако означим с x и y страните на правоъгълника, стигаме до следната формулировка:

Ако множеството $M \subset \mathbb{R}^2$ е множеството на всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи условията $x > 0, y > 0, x + y = p$, да се намери максималната стойност върху M на функцията $f(x, y) = xy$.

Разбира се, задачата се решава елементарно, като се изрази y чрез x и след това се намери максимума на получената функция на една променлива. Ние обаче използваме задачата за илюстриране на развитите по-долу методи.

Множители на Лагранж - случай на едно уравнение в $\mathbb{R}^2$. В тази точка ще разгледаме случая, когато M е множеството от всички точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, за които $F(x,y) = 0$. Тук $F(x,y)$ е еднократно гладка функция на 2 променливи, дефинирана в област в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяваща условието за регулярност

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y) \neq \vec{0},$$

т.е. първите частни производни на $F(x,y)$ никъде не се анулират едновременно. Налице е следното необходимо условие за условен локален екстремум:

Теорема 1. *Нека M е множеството, зададено с условието $F(x,y) = 0$, и нека функцията $f(x,y)$ достига условен локален екстремум върху M в точката $(x_0, y_0) \in M$. Тогава съществува константа λ такава, че*

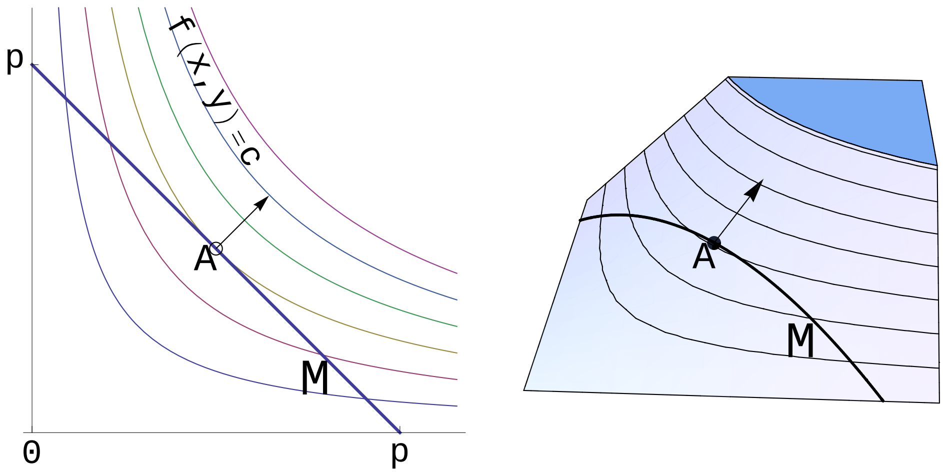
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) = \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0)\,.$$

Константата λ се нарича <u>множител на Лагранж</u>, съответстващ на дадената екстремална задача.

Преди доказателството ще дадем геометрична интерпретация на твърдението на теоремата. Да си спомним Теорема 2 от §5, чието доказателство дадохме в предния параграф. Теоремата гласи, че градиентът на функцията в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през същата точка. Според Теорема 1, векторите $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ и $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0)$ са колинеарни; това означава, че линиите на ниво на функциите $f(x,y)$ и $F(x,y)$, минаващи през точката (x_0, y_0), имат обща тангента, т.е. се допират помежду си. Очевидно линията на ниво на $F(x,y)$, минаваща през (x_0, y_0), съвпада с множеството M, описвано с уравнението $F(x,y) = 0$. Така стигаме до следната формулировка на резултата на теорема 1:

В точката (x_0, y_0) множеството M се допира до линията на ниво на $f(x,y)$, минаваща през тази точка.

На чертежа теоремата е илюстрирана за задачата за правоъгълниците, дадена по-горе; представени са множеството M (отсечка), и линиите на ниво на функцията $f(x,y)=xy$. Условният локален максимум се достига в точката $A=(p/2,p/2)$.



Вляво -линии на ниво на функцията $f(x,y)=xy$,
точка на условен локален екстремум на $f(x,y)$ върху M.
Вдясно - съответните линии върху графиката на $f(x,y)$.

Можем да дадем и друга интерпретация на теоремата: да си представим, както в §5, планинска местност, като целевата функция $f(x,y)$ задава надморската височина в дадена точка, а множеството M разглеждаме като пътека в тази местност. Тогава в най-високата си точка пътеката става хоризонтална, т.е. допира се до хоризонталата, минаваща през тази точка.

Доказателство на теорема 1. Трябва да докажем равенствата

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lambda\,\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lambda\,\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\,.$$

Ще използваме теоремата за неявната функция, за да параметризираме множеството M около точката (x_0,y_0). (Виж теорема 2 от предния параграф.) Тъй като $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F\,(x_0,y_0)\neq\vec{0}$, можем да предположим например, че $\frac{\partial F}{\partial y}\,(x_0,y_0)\neq 0$. Тогава в някаква околност на точката x_0 съществува еднократно гладка функция $\varphi\,(x)$, удовлетворяваща условията

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Диференцирайки последното равенство по x в точката x_0, получаваме

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \varphi'(x)\, \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0,$$

откъдето

$$\varphi'(x_0) \;=\; -\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}.$$

От друга страна, замествайки y с $\varphi(x)$, получаваме функцията на едно променливо $g(x) = f(x, \varphi(x))$, определена в околност на x_0. Да предположим за определеност, че в (x_0, y_0) имаме относителен локален максимум. Точките от вида $(x, \varphi(x))$ принадлежат на M; следователно, за x близки до x_0 ще имаме $f(x, \varphi(x)) \le f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0)$. С други думи, имаме $g(x) \le g(x_0)$, и следователно $g(x)$ притежава локален максимум в точката x_0. Оттук следва, че производната и в тази точка се анулира:

$$g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \varphi'(x_0)\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$$

Да заместим $\varphi'(x_0)$ с получения по-горе израз; получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right) = 0.$$

Полагайки $\lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$, виждаме, че и двете искани равенства са изпълнени. ■

Забележка. Лесно се вижда, че необходимото условие за локален екстремум, дадено в теоремата, не е достатъчно. Наистина, нека $F(x,y) = y$ (множеството M съвпада с абсцисната ос) и $f(x,y) = x^3 + y$. Тогава в точката $(0,0)$ градиентите на функциите f и F са колинеарни, но в тази точка нямаме условен локален екстремум.

От твърдението на теоремата лесно се извежда рецепта за откриване на точките, в които може да се очаква условен локален екстремум на $f(x, y)$ върху M. "Подозрителната"точка x трябва да удовлетворява уравненията

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y), \quad F(x, y) = 0.$$

Така получаваме 3 уравнения за трите неизвестни x, y, и λ. По-нататък целта е да се елиминира променливата λ и да се намерят стойностите на x и y. След това трябва да се провери дали така получената точка е наистина точка на екстремум, и от какъв вид е той; обикновено това се вижда непосредствено.

Случай на едно уравнение в $\mathbb{R}^n$. По абсолютно същия начин се развиват нещата, когато M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, дефинирано с условието $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, и целевата функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е гладка функция в околност на M. Отново искаме частните производни на функцията $F(x_1, \ldots, x_n)$ да не се анулират едновременно, т.е. във всички точки да имаме $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_1, \ldots, x_n) \neq \vec{0}$.

Тогава имаме аналогична теорема: ако $x = (x_1, \ldots, x_n)$ е точка на условен локален екстремум на $f(x)$ върху M. Тогава съществува константа λ такава, че

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x_1, \ldots, x_n).$$

Това векторно равенство дава n на брой уравнения. Заедно с уравнението $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ получаваме $n+1$ уравнения за $n+1$ неизвестни $x_1, \ldots, x_n, \lambda$, откъдето чрез изключване на λ се определят точките, в които би могъл да се очаква локален екстремум.

Множители на Лагранж в случай на две уравнения. Нека сега M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено с условията

$$F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Ще предположим, че $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, \ldots, x_n)$ са еднократно гладки функции в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция. *Ще казваме, че двойката условия* $F(x_1,\ldots,x_n)$, $G(x_1,\ldots,x_n)=0$ *е* *регулярна*, *ако градиентите* $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x)$ *и* $\overrightarrow{\text{grad}}\, G(x)$ *са линейно независими във всяка точка* x.

Теорема 2. *Нека* M *е подмножеството на* $\mathbb{R}^n$*, определено с регулярната двойка условия* $F(x)=G(x)=0$*, и нека* $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ *е гладка функция в околност на* M*. Ако* $x^0\in\mathbb{R}^n$ *е точка на относителен локален екстремум на* $f(x)$ *върху* M*, то съществуват константи* λ *и* μ *такива, че*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\left(x^0\right) \;=\; \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, F\left(x^0\right) \;+\; \mu\, \overrightarrow{\text{grad}}\, G\left(x^0\right).$$

И в този случай константите λ и μ се наричат множители на Лагранж.

Доказателство. За удобство ще разгледаме случая на четиримерното пространство $\mathbb{R}^4$, координатите в което ще означаваме с (x,y,u,v). Нека $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)$ е точка на условен локален екстремум за функцията $f(x,y,u,v)$ върху M. Ще осмислим условието за регулярност. От линейната алгебра знаем, че ако два вектора са линейно независими, то образуваната от тях матрица (на която тези вектори са редове) има максимален ранг. Следователно условието за регулярност в точката P_0 може да се напише във вида:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_u & F'_v \\ G'_x & G'_y & G'_u & G'_v \end{pmatrix}(P_0) \;=\; 2.$$

Следователно в горната матрица има поне една 2x2 поддетерминанта, която не се анулира; нека това е детерминантата, образувана от двата последни стълба. Това означава, че

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}(P_0) \;\neq\; 0.$$

Следователно, по теоремата за неявната функция за две уравнения (теорема 4 от §9), съществуват функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, дефинирани в околност на точката (x_0,y_0), така че

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\; G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\; u(x_0,y_0)=u_0,\; v(x_0,y_0)=v_0.$$

С други думи, около точката P_0 множеството M може да се представи с уравненията

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

Да разгледаме двете линейни уравнения

$$f'_u(P_0) = \lambda\, F'_u(P_0) \; + \; \mu\, G'_u(P_0)$$
$$f'_v(P_0) = \lambda\, F'_v(P_0) \; + \; \mu\, G'_v(P_0)$$

относно променливите λ и μ. Тъй като детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула, тези уравнения имат единствено решение. Трябва да докажем, че така намерените λ и μ удовлетворяват условията на теоремата, т.е., че са изпълнени и равенствата

$$f'_x(P_0) = \lambda\, F'_x(P_0) \; + \; \mu\, G'_x(P_0)\,, \;\; f'_y(P_0) = \lambda\, F'_y(P_0) \; + \; \mu\, G'_y(P_0)\,.$$

Още не сме използвали, че P_0 е условен локален екстремум. Да означим

$$\Phi(x,y) \; = \; f\,(x,y,u(x,y),v(x,y))\,.$$

Щом $P_0 = (x_0,y_0,u_0,v_0)$ е точка на условен локален екстремум за f, то точката (x_0,y_0) е точка на обикновен локален екстремум за $\Phi(x,y)$ (използваме същите разсъждения като в теорема 1), и следователно

$$\Phi'_x(x_0,y_0) = \Phi'_y(x_0,y_0) = 0.$$

Ще докажем, че $f'_x(P_0) = \lambda\, F'_x(P_0) + \mu\, G'_x(P_0)$. Наистина, диференцирайки по x уравненията $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = G(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0$, получаваме равенствата

$$F'_x = -u'_x\, F'_u - v'_x\, F'_v,$$
$$G'_x = -u'_x\, G'_u - v'_x\, G'_v.$$

Равенството $\Phi'_x(x_0,y_0) = 0$ означава, че в точката P_0 се изпълнява равенството

$$f'_x = -u'_x\, f'_u - v'_x\, f'_v.$$

Да умножим равенството за F'_x с числото λ, равенството за F'_y - с числото μ, и да съберем получените равенства. Получаваме търсеното съотношение $f'_x(P_0) = \lambda\, F'_x(P_0) + \mu\, G'_x(P_0)$. Съотношението $f'_y(P_0) = \lambda\, F'_y(P_0) + \mu\, G'_y(P_0)$ се получава по абсолютно същия начин, което доказва теоремата. ■

Теорема за множителите на Лагранж в общия случай. Нека сега M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено с условията

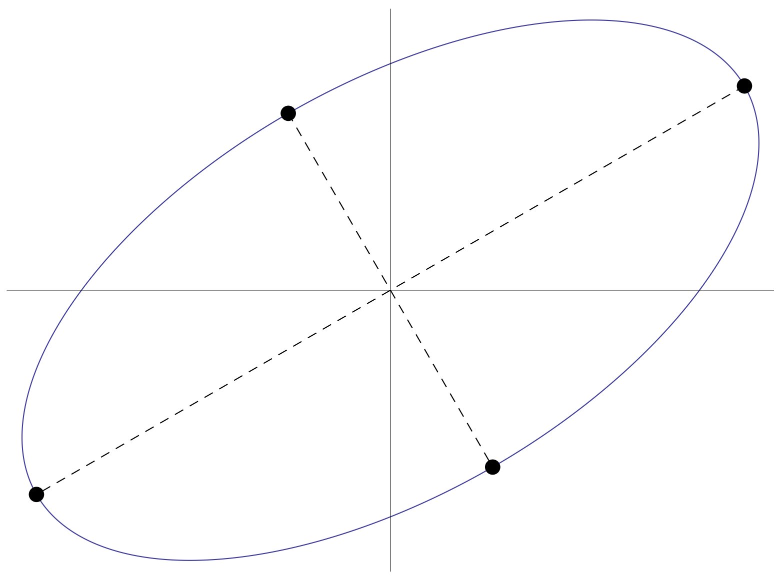
$$F_1(x_1,\ldots,x_n) = F_2(x_1,\ldots,x_n) = \ldots = F_k(x_1,\ldots,x_n) = 0,$$

където $F_1(x_1,\ldots,x_n)\,,\ldots,F_k(x_1,\ldots,x_n)$ е регулярна система от еднократно гладки функции. Регулярността означава, че техните градиенти

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_1(x), \ldots, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_k(x)$ са линейно независими за всяко x от дефиниционната им област. (Разбира се, предполагаме, че $k < n$.) Нека $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ достига условен локален екстремум върху M в точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in M$.

Тогава по същия начин се доказва, че съществуват константи $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (множители на Лагранж) такива, че

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\left(x^0\right) = \lambda_1\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_1\left(x^0\right) + \ldots + \lambda_k\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F_1\left(x^0\right).$$



Полуоси на елипсата.

Пример: Канонизация на елипса. Центрираното уравнение на елипса в равнината има вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

като квадратичната форма от лявата страна е положително определена, т.е. $a > 0$ и $b^2 < ac$.* Очевидно центърът на елипсата съвпада с началото

*Ако тази форма е знакопроменлива, се получава уравнението на хипербола.

на координатите. Задачата е: да се намерят дължината и посоката на голямата и малката полуоси на тази елипса.

Лесно се вижда, че интересуващите ни точки могат да се определят геометрически: от всички точки на елипсата, най-близо до началото се намират краищата на малката полуос, а най-далече - краищата на голямата полуос.

Следователно нашата задача може да се формулира като задача за условен екстремум - ние трябва да намерим минимума и максимума върху елипсата на разстоянието до началото на координатите. По-удобно е обаче като целева функция да се вземе не разстоянието до началото, а неговия квадрат. В крайна сметка, достигаме до следната задача:

Нека M е подмножеството на $\mathbb{R}^2$, дефинирано с уравнението

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0.$$

Да се намерят минималната и максималната стойности върху M на функцията $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Лесно се пресмята, че равенствата

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y),$$

сега добиват вида

$$2x = \lambda (2ax + 2by)$$

$$2y = \lambda (2bx + 2cy).$$

Оттук веднага намираме геометричния смисъл на параметъра λ. Наистина, да умножим първото уравнение с x, второто - с y, и да ги съберем. Вземайки пред вид равенството $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, получаваме $\lambda = x^2 + y^2$, т.е. λ съвпада с квадрата на разстоянието от екстремалната точка (x,y) до началото на координатите.

Разглеждаме горните равенства като система от две линейни уравнения за неизвестните x и y. Тъй като точката $(0,0)$ не принадлежи на елипсата, то $\lambda \neq 0$. Да положим $\mu = 1/\lambda$. Тогава уравненията се записват като:

$$(a-\mu)x+by=0$$
$$bx+(c-\mu)y=0.$$

От линейната алгебра знаем, че получената система хомогенни уравнения има ненулево решение точно тогава, когато детерминантата от коефициентите пред неизвестните е равна на нула. Така за λ получаваме квадратното уравнение

$$\begin{vmatrix} a-\mu & b \\ b & c-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

или, в развит вид,

$$\mu^2-(a+c)\mu+(ac-b^2)=0.$$

Корените μ_1 и μ_2 на това уравнение се наричат *собствени стойности* на съответната квадратична форма. Веднага се вижда, че в случая на елипса те винаги са строго положителни. Освен това, лесно се проверява, че ако коренът е двоен, т.е. $\mu_1=\mu_2$, то $a=c$ и $b=0$, и следователно множеството M е окръжност. Ако оставим този случай настрана, получаваме неравенствата $0<\mu_1<\mu_2$. Тъй като $\lambda=1/\mu$, получаваме $0<\lambda_2<\lambda_1$. Имайки пред вид геометричния смисъл на λ, намираме, че голямата полуос е равна на $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_1}}$, а малката - на $\dfrac{1}{\sqrt{\mu_2}}$.

Забележка. Ние достигнахме по аналитичен път до процедурата, известна в алгебрата и в аналитичната геометрия като канонизиране на квадратична форма. Подобни разсъждения могат да се проведат и в тримерния случай - за триосен елипсоид.

Упражнения.

1. Намерете максималната стойност на функцията $f(x_1,\dots,x_n)=x_1x_2\dots x_n$ върху множеството M, зададено с условията $x_1\geq 0,\dots,x_n\geq 0, x_1+\dots+x_n=1$.

2. Нека е даден елипсоид в $\mathbb{R}^3$, зададен с каноничното си уравнение. Да се намерят полуосите на елипсата, получена като сечение на елипсоида с равнина в $\mathbb{R}^3$, минаваща през началото на координатите.

Упътване. Задачата се свежда към намирането на максималната и минимална стойност на функцията $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ върху множеството M, определено с уравненията

$$F_1(x, y, x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$F_2(x, y, x) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Приравнявайки на нула частните производни на функцията
$f - \lambda F_1 - \mu F_2$, получаваме равенствата

$$\lambda = f(x, y, z), \quad x = \mu \frac{\alpha a^2}{a^2 - \lambda}, \quad y = \mu \frac{\beta b^2}{b^2 - \lambda}, \quad z = \mu \frac{\gamma c^2}{c^2 - \lambda}.$$

Умножавайки второто, третото и четвъртото равенство съответно с α, β, γ и събирайки резултатите, получаваме за λ квадратното уравнение

$$\frac{\alpha^2 a^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\beta^2 b^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\gamma^2 c^2}{c^2 - \lambda} = 0.$$

Ако λ_1 и λ_2 са корените на това уравнение, то $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$ са дължините на полуосите на търсената елипса.

Въпроси за самопроверка.

1. Дайте дефиниция на условен локален екстремум (у.л.е.) на функция върху дадено множество M. Какво е различието с дефиницията на (безусловен) локален екстремум, дадена в параграф 8?

2. Напишете необходимото условие за у.л.е. в случая, когато $M \subset \mathbb{R}^2$ се определя чрез регулярното уравнение $F(x, y) = 0$ (теорема 1). Напишете това условие във векторна и във скаларна форма. Достатъчно ли е това условие?

3. Опишете геометричният смисъл на горното условие.

4. Опишете процедурата (рецептата) за намиране на точките, в които функцията $f(x, y)$ би могла да има у.л.е. върху M.

5. Напишете необходимото условие за у.л.е. в случая, когато M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено с равенството $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

6. Нека M е подмножество на $\mathbb{R}^n$, зададено с равенствата $F(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Дайте условие за регулярност на тази двойка условия. Напишете необходимото условие за у.л.е., както и съответната система уравнения.

7. Какво екстремално свойство удовлетворяват крайните точки на полуосите на елипсата? Опишете съответната екстремална задача и начина на нейното решаване.

Глава 2

Интегрално смятане на функции на няколко променливи

2.1 Мярка на Пеано-Жордан.

Нашата първа стъпка към дефинирането на Римановия интеграл в равнината, както и в произволно крайномерно Евклидово пространство, ще бъде да въведем мярка в такива пространства: т.н. *мярка на Пеано-Жордан*. За да използваме геометричната интуиция, ние ще работим главно в случая на равнината $\mathbb{R}^2$, отбелязвайки какво е необходимо да се промени в случая на пространства с размерност по-голяма от 2. Трябва да се отбележи, че ако разликата между едномерния и двумерния случай е доста съществена (както читателят ще се убеди по-долу), то между размерност 2 и размерности 3,4,...,1000,.. такава почти няма, и всички определения и доказателства се пренасят почти без изменения.

Определение на мярката на Пеано - Жордан. Нашата цел ще бъде да определим мярката, или лицето, на равнинна фигура. Ще тръгнем от две естествени правила:

- Лицето на правоъгълник е равно на произведението на страните му, и
- По-голямата фигура има и по-голямо лице, т.е. ако D, D' са фигури в равнината и $D \subset D'$, то лицето на D не надминава лицето на D'.

Така, нашата основна "тухличка"при изграждането на мярката в равнината ще бъдат затворените правоъгълници, т.е. множества от вида

$$\Delta = [a, b] \times [c, d] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\right\}.$$

За всеки правоъгълник ще въведем мярка (или лице): $\mu(\Delta) = (b - a)(d - c)$.

Нека подчертаем, че тук разглеждаме не какви да е правоъгълници, а само правоъгълници със страни, успоредни на координатните оси. Освен това, разглеждаме затворени правоъгълници; тяхната вътрешност се състои от произведението на съответните отворени интервали:

$$\Delta^o = (a, b) \times (c, d),$$

а контурът им се състои от четири отсечки.

В случая на пространство с размерност 3 и повече, навсякъде по-долу вместо "правоъгълник"трябва да се чете "правоъгълен паралелепипед" , като отново се разглеждат паралелепипеди със страни, успоредни на координатните оси. Под правоъгълен паралелепипед в $\mathbb{R}^n$ ще разбираме множество от вида

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\},$$

което обикновено се записва във вида

$$\Delta = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

Мярката отново се определя като произведение на страните:

$$\mu(\Delta) = (b_1 - a_1) \ldots\ldots (b_n - a_n).$$

Дефиниция. *Казваме, че множеството $E \subset \mathbb{R}^2$ е елементарно, ако то може да се представи като обединение на краен брой затворени правоъгълници.*

Ще отбележим, че обединение, сечение и разлика на елементарни множества е също елементарно множество.

Лема 1. *Всяко елементарно множество E може да се представи като обединение на краен брой правоъгълници с непресичащи се вътрешности (за краткост ще ги наричаме непресичащи се правоъгълници).*

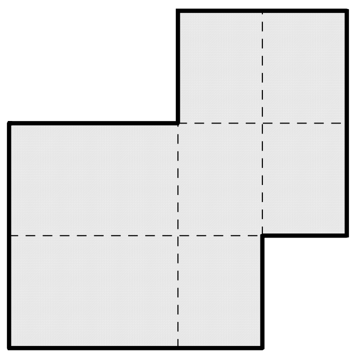
Доказателство. Да продължим отсечките, ограничаващи всеки от правоъгълниците, и да разсечем останалите правоъгълници по така получените прави. Полученото разбиване на множеството E очевидно удовлетворява изискванията на лемата. (На чертежа е представен случая, когато E е обединение на два правоъгълника.) ■

Дефиниция. *Нека E е елементарно множество, представено като обединение на непресичащи се правоъгълници:*

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \quad \Delta_i^o \cap \Delta_j^o = \emptyset \quad \text{за} \quad i \neq j.$$

Ще определим мярката $\mu(E)$ като

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right).$$



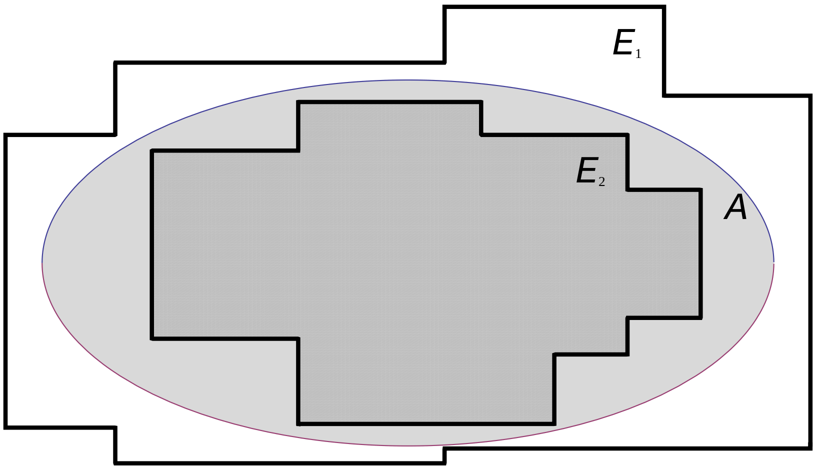
Представяне на елементарно множество като обединение на непресичащи се правоъгълници.

Разбира се, трябва да докажем, че определението е коректно, т.е. не зависи от начина на представяне на E като обединение на непресичащи се правоъгълници. Нека най-напред E е правоъгълник, представен като обединение на други правоъгълници; тогава твърдението е очевидно (и става още по-очевидно, ако направим допълнителни разрези както в предната лема). В общия случай, нека

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\Delta}_j$$

са две различни представяния на E като обединение на непресичащи се правоъгълници. За всяко i от 1 до n имаме $\Delta_i = \cup_{j=1}^{m} \left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$, което дава представяне на правоъгълника Δ_i като обединение на непресичащи се правоъгълници, и според отбелязаното по-горе $\mu\left(\Delta_i\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$. Следователно

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right)$$



Горна и долна мярка на множество.

и по същият начин

$$\sum_{j=1}^{m} \mu\left(\widetilde{\Delta}_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \mu\left(\Delta_i \cap \widetilde{\Delta}_j\right),$$

с което коректността на дефиницията е доказана. ■

Следващата стъпка е да се опитаме да апроксимираме произволна фигура в равнината чрез елементарни множества. Това може да стане по различни начини. За илюстрация, нека си представим, че имаме фигура, нарисувана върху милиметрова хартия, и искаме да пресметнем приблизително нейното лице. Въпросът е: дали да броим тези квадратчета, които се засичат с фигурата само частично, т.е. пресичат нейния контур. Единият начин е да сумираме лицата на всички квадратчета, които имат обши точки с фигурата; така ще получим оценка отгоре за лицето и. Другият начин е да броим само онези квадратчета, които се съдържат изцяло вътре във фигурата; така получаваме оценка отдолу. Другояче казано, ние апроксимираме отвън и отвътре нашата фигура с множества, съставени от квадратчета, т.е. с елементарни множества. Така се стига до понятията горна и долна мярка на множество:

Дефиниция. *Нека A е ограничено подмножество на $\mathbb{R}^2$. Ще определим горна мярка на множеството A (с означение $\mu^*(A)$) като точната долна граница на мерките на всички елементарни множества, съдържащи A:*

$$\mu_*(A) = \inf\left\{\mu(E) : E \text{ - елементарно, } A \subset E\right\}.$$

Аналогично, определяме долна мярка на A с формулата

$$\mu_*(A) = \sup\left\{\mu(E) : E \text{ - елементарно, } E \subset A\right\}.$$

Забележка. Понякога ще е удобно да налагаме малко по-силни условия: да искаме $A \subset E^o$ в дефиницията на горна мярка, и $E \subset A^o$ дефиницията на долна мярка. (Ще напомним, че A^o означава вътрешността на множеството A, т.е. всички точки, които влизат в A заедно с някаква своя кръгова околност - виж §1.2). Лесно се вижда, че това не променя техните стойности.

Очевидно за всяко множество A имаме $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. За някои множества обаче тези две числа може да се различават. Например, да вземем множеството от всички точки в квадрата, които имат рационални координати:

$$A = \left\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Лесно се вижда, че $\mu^*(A) = 1$, но $\mu_*(A) = 0$ (множеството A не съдържа неизродени правоъгълници). Поради това ние ще определим мярката само върху някои множества в $\mathbb{R}^2$ - т. нар. измерими множества:

Дефиниция. *Ограниченото множество $A \subset \mathbb{R}^2$ се нарича измеримо, ако неговата горна и долна мярки съвпадат. Общата им стойност се бележи с $\mu(A)$ и се нарича мярка на Пеано-Жордан на множеството A.*

Лема 2. *Множеството A е измеримо тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват елементарни множества E_1, E_2, така че $E_2 \subset A \subset E_1$ и $\mu(E_1) - \mu(E_2) < \varepsilon$.*

Доказателство. Да предположим, че горното свойство е изпълнено. Тъй като

$$\mu(E_2) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(E_1),$$

то

$$\mu^*(A) - \mu_*(A) \leq (E_1) - (E_2) < \varepsilon.$$

Тъй като $\varepsilon > 0$ е произволно, то $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, т.е. A е измеримо.

Обратно, нека A е измеримо, т.е. $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, От дефиницията на горна и долна мярка следва, че можем да изберем елементарни множества $E_1 \supset A$, $E_2 \subset A$ такива, че

$$\mu(E_1) < \mu^*(A) + \varepsilon/2 \text{ и } \mu(E_2) > \mu_*(A) - \varepsilon/2,$$

и следователно $\mu(E_1) - \mu(E_2) < \varepsilon$. ■

Нека дадем някакво описание на измеримите множества в равнината и операциите, които могат да се извършват с тях.

Дефиниция. *Множеството се нарича пренебрежимо по Пеано-Жордан, ако $\mu^*(A) = 0$ (от тук, разбира се, следва, че то е и измеримо).*

Лема 3. *Всяко подмножество на пренебрежимо множество е пренебрежимо. Обединение на краен брой пренебрежими множества също е пренебрежимо.*

Доказателство. Първото твърдение е очевидно. За второто, достатъчно е да докаже твърдението за случая на две множества.

Наистина, нека $\mu^*(A_1) = \mu^*(A_2) = 0$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. Тогава според дефиницията на μ^* можем да намерим елементарни множества E_1, E_2, така че $\mu(E_1), \mu(E_2) < \varepsilon/2$, $A_1 \subset E_1$, $A_2 \subset E_2$. Множеството $E = E_1 \cup E_2$ е също елементарно, при което $A_1 \cup A_2 \subset E$, и $\mu(E) < \varepsilon$, т.е. $\mu^*(A_1 \cup A_2) = 0$. ■

Сега можем да формулираме необходимо и достатъчно условие за измеримост на множество. За тази цел ще използваме понятието контур на множество, въведено в §1.2.

Теорема 1 (критерий за измеримост). *Едно ограничено множество A е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур bA е пренебрежимо множество.*

Доказателство. Нека е измеримо множество, т.е. $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \mu(A)$. Да изберем произволно $\varepsilon > 0$. От дефиницията на горна и долна мярка следва съществуването на елементарно множество E_1 такова, че $A \subset E_1^o$ и $\mu(E_1) < \mu(A) + \varepsilon/2$, и на елементарно множество E_2 такова, че $E_2 \subset A^o$ и $\mu(E_2) > \mu(A) - \varepsilon/2$. Очевидно $E_2 \subset E_1$. Да означим $E = E_1 \setminus E_2$; тогава $\mu(E) = \mu(E_1) - \mu(E_2) < \varepsilon$ и контурът bA на множеството A се съдържа в E, откъдето следва, че bA е пренебрежимо множество. По аналогичен начин се доказва и обратното твърдение, чието доказателство ще пропуснем ■

Следствие. *Обединението, сечението и разликата на две измерими множества е също измеримо.*

Доказателство. Нека A и B да са измерими множества, и нека множеството C да е равно или на тяхното обединение $A \cup B$, или на тяхното сечение $A \cap B$, или на разликата $B \setminus A$. Във всеки от тези три случая имаме

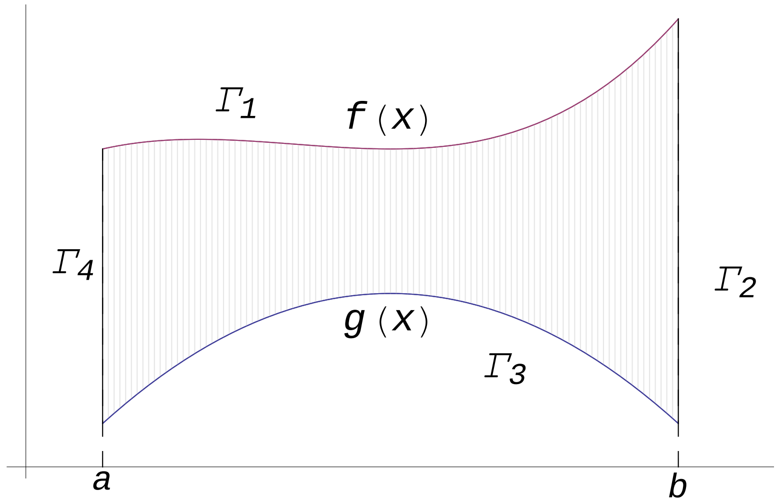
$$bC \subset bA \cup bB$$

(докажете!). Тъй като bA и bB са пренебрежими, то от направената погоре забележка следва, че и bC е пренебрежимо, т.е. множеството C е измеримо. ■

Ще напомним един начин на аналитично описание на фигурите в равнината (виж I, §4.5):

Дефиниция. *Нека в интервала $[a, b]$ са зададени непрекъснатите функции $g(x)$ и $f(x)$, като навсякъде е изпълнено $g(x) \leq f(x)$. Тогава криволинеен трапец, определен от функциите g и f, наричаме фигурата D, съставена от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяващи неравенствата*

$$a \leq x \leq b \quad , \quad g(x) \leq y \leq f(x)\,.$$



Криволинеен трапец.

Всички фигури, срещани в елементарната геометрия, могат да бъдат представени или като криволинеен трапец, или като обединение на краен брой криволинейни трапци.

Пример. Нека D_R да е затворен кръг с център в началото на координатите и радиус R. Очевидно точката (x, y) принадлежи на D_R точно тогава, когато е изпълнено неравенството $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$. Да решим това неравенство относно y; получаваме, че $|y| \leq \sqrt{R^2 - x^2}$. Оттук се вижда, че множеството D_R може да се представи с неравенствата

$$-R \leq x \leq R \quad , \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

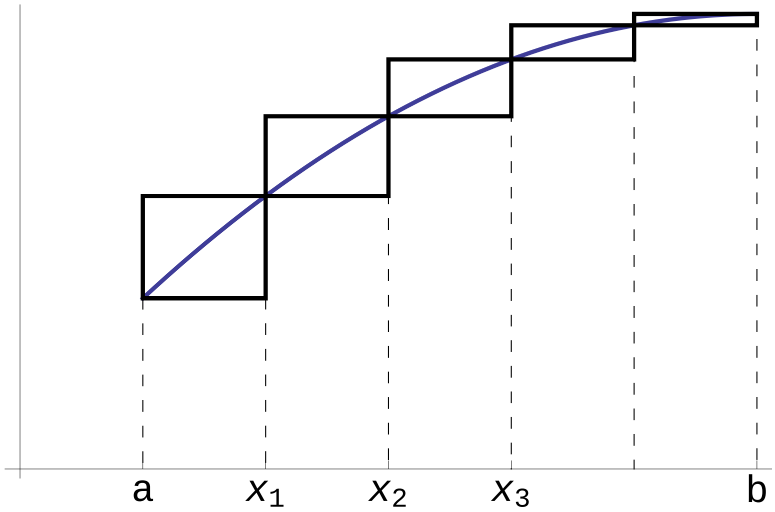
и следователно е криволинеен трапец.

Следващата теорема показва, че категорията на измеримите множества е достатъчно широка и обхваща почти всички множества, срещани в анализа:

Теорема 2. *Всеки криволинеен трапец е измеримо множество.*

Доказателство. Да означим с Γ контура на областта D. Очевидно Γ се състои от четири части, които ще означим с Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, където;

Γ_1 е графиката на непрекъсната функция $f(x)$ в интервала $[a, b]$.



Измеримост на графиката на непрекъсната функция (лема 4).

Γ_2 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(b, f(b))$ с $(b, g(b))$.

Γ_3 е графиката на $g(x)$ в интервала $[a, b]$.

Γ_4 е вертикалната отсечка, свързваща точката $(a, f(a))$ с $(a, g(a))$.

Оставяме на читателя да докаже, че отсечките Γ_2 и Γ_4 са пренебрежими множества. Тогава теоремата следва от критерия за измеримост и от следната лема, приложена за $g(x)$ и $f(x)$:

Лема 4. *Ако $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$, нейната графика*

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$$

е пренебрежимо множество.

Доказателство на лемата. Да разделим интервала $[a, b]$ на подинтервали с помощта на делящите точки $a = x_0 < \ldots < x_n = b$, и нека m_i и M_i да означават съответно минималната и максималната стойности на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в компактния интервал $[a, b]$ и следователно равномерно непрекъсната в него. Тогава за всяко дадено $\varepsilon > 0$ можем да намерим разбиване такова, че $M_i - m_i < \varepsilon$ за всяко i от 1 до n. Да означим с Δ_i

правоъгълника

$$\Delta_i = [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]\,, \quad i = 1, \dots n.$$

Нека положим $E = \cup_{i=1}^{n} \Delta_i$. Очевидно $\Gamma_f \subset E$. От друга страна

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Delta_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right)\left(M_i - m_i\right) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{i-1}\right) = \varepsilon(b-a)$$

и може да бъде направено колкото си искаме малко. С това лема 4, а с нея и теорема 2, са доказани. ■

Адитивност на мярката на Пеано - Жордан. Ще докажем основното свойство на мярката:

Теорема 3. *Нека A и B са измерими множества с непресичащи се вътрешности и нека $C = A \cup B$. Тогава*

$$\mu(C) = \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right).$$

Можем да си представим ситуацията и по следния начин: с помощта на някаква крива линия или друго пренебрежимо множество измеримото множество C е разделено на две части; ще покажем, че при това общата мярка се запазва.

Доказателство. Да изберем елементарни множества E_1 и E_2 такива, че $A \subset E_1$, $E_2 \subset A^o$ и $\mu\left(E_1\right) < \mu(A) + \varepsilon/2$, $\mu\left(E_2\right) > \mu(A) - \varepsilon/2$. По същия начин можем да намерим елементарни множества F_1 и F_2 такива, че $B \subset F_1$, $F_2 \subset B^o$ и $\mu\left(F_1\right) < \mu(B) + \varepsilon/2$, $\mu\left(F_2\right) > \mu(B) - \varepsilon/2$. Тогава $C \subset E_1 \cup F_1$ и следователно

$$\mu(C) \leq \mu\left(E_1\right) + \mu\left(F_1\right) < \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right) + \varepsilon,$$

откъдето следва, че $\mu(C) \leq \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right)$.

За доказателство на обратното неравенство да отбележим, че E_2 и F_2 не се пресичат (тук използваме, че $A^o \cap B^o = \emptyset$) и следователно $\mu\left(E_2 \cup F_2\right) = \mu\left(E_2\right) + \mu\left(F_2\right)$. Тъй като $E_2 \cup F_2 \subset C$, то

$$\mu(C) \geq \mu\left(E_2\right) + \mu\left(F_2\right) > \mu\left(A\right) + \mu\left(B\right) - \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно, от тук следва теоремата. ■

Чрез индукция по броя на събираемите лесно се доказва следното

Следствие. *Ако* $A_1, \ldots, A_k$ *са измерими множества, като* $A_i^o \cap A_j^o = \emptyset$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\mu\left(A_1 \cup \ldots \cup A_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu\left(A_i\right).$$

Въпроси за самопроверка.

1. Дайте дефиниция на елементарно множество. Докажете чрез рисунки, че обединение, сечение, и разлика на елементарни множества е също елементарно. Дефинирайте мярка на елементарно множество.

2. Дефинирайте горна и долна мярка на ограничено множество. Кои ограничени множества са измерими?

3. Докажете, че едно множество е измеримо точно тогава, когато горната мярка на контура му е нула. Докажете като следствие, че обединение, сечение, и разлика на измерими множества множества е също измеримо.

4. Кога едно подмножество на равнината се нарича криволинеен трапец? Дайте примери. Докажете, че всеки криволинеен трапец е измеримо множество.

5. Формулирайте и докажете адитивността на мярката на Пеано-Жордан.

2.2 Дефиниция на многомерния интеграл.

В настоящия параграф ще дадем дефиниция на двоен интеграл (която лесно се прехвърля и за интеграл върху пространство с по-висока от две размерност). Ще напомним, че в едномерния случай имаме две еквивалентни дефиниции на определения интеграл - дефиниция на Риман и дефиниция на Дарбу. За двойния интеграл ние ще дадем само дефиницията на Риман. В многомерния случай се налага да се разгледат две дефиниции - обща и специална. (Смисълът на тези думи ще бъде обяснен по-долу.)

Специална дефиниция на двойния интеграл. Нека $f(x,y)$ е функция, дефинирана в измеримо (и следователно ограничено) подмножество на равнината. Ще започнем с частния случай, когато дефиниционното множество е правоъгълник.

Двоен интеграл върху правоъгълник: дефиниция на Риман. Нека $f(x,y)$ е дефинирана в правоъгълника $\Delta = [a,b] \times [c,d]$. Да изберем делящи точки $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_m$ така че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Ще означим с Δ_{ij} правоъгълника $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$; тогава

$$\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \Delta_{ij}.$$

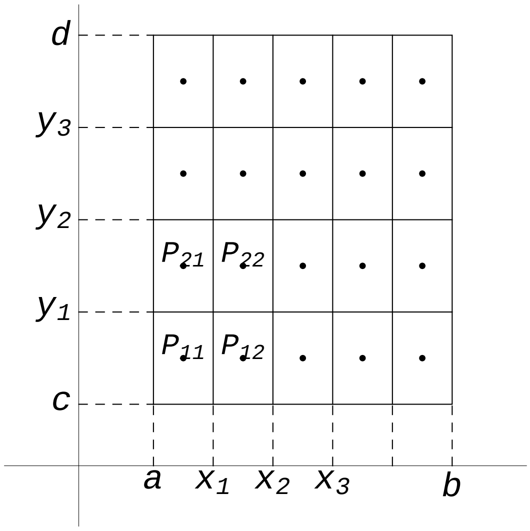
Да изберем по една точка $P_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in \Delta_{ij}$; това означава, че $\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_{ij} \in [y_{j-1}, y_j]$.

Съвокупността от всички делящи и междинни точки ще наричаме <u>разбиване</u> на Δ. За всяко такова разбиване τ ще означаваме с $R_\tau(f)$ (или просто R_τ) съответната <u>риманова сума</u>:

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_{ij}, \eta_{ij}\right) \left(x_i - x_{i-1}\right) \left(y_j - y_{j-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f\left(P_{ij}\right) \mu\left(\Delta_{ij}\right).$$

Ще въведем понятието <u>диаметър</u> на разбиването τ като максимума на диагоналите на правоъгълниците Δ_{ij}, влизащи в това разбиване:

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_j - y_{j-1}\right)^2}.$$



Разбиване на правоъгълника $\Delta = [a, b] \times [c, d]$.

(Ще отбележим, че диаметърът не зависи от избора на междинните точки, а само от делящите.)

Дефиниция. *Казваме, че двойният интеграл от $f(x, y)$ по правоъгълника Δ е равен на числото $I(f)$, ако*

$$I(f) = \lim_{diam\, \tau \to 0} R_\tau(f).$$

Забележка. Лесно се вижда, че изискването "diam $\tau \to 0$"е равносилно с това, максималната дължина на подинтервалите $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ също да клони към нула.

Двойният интеграл се означава по следния начин:

$$I(f) = \iint\limits_{\Delta} f(x, y)\, dxdy.$$

Ще опишем по-подробно понятието за граница, използвано в горната дефиниция:

Равенството $I(f) = \lim_{diam\,\tau \to 0} R_\tau(f)$ означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко разбиване τ, за което $diam\,\tau < \delta$, да имаме $|I(f) - R_\tau(f)| < \varepsilon$.

Разбира се, тази граница не е длъжна да съществува; ако тя съществува, функцията $f(x, y)$ се нарича интегруема по Риман в Δ.

Двоен интеграл върху произволно измеримо множество. Нека $f(x, y)$ е дефинирана за $(x, y) \in D$, където D е измеримо подмножество на равнината. Тъй като D е и ограничено, можем да изберем правоъгълник Δ, съдържащ D. Да означим с $\widetilde{f}(x, y)$ или $\widetilde{f}(P)$, продължението на функцията f с нулеви стойности върху цялото Δ:

$$\widetilde{f}(P) = \begin{cases} f(P), & P \in D \\ 0, & P \in \Delta \setminus D \end{cases}$$

Дефиниция. *Ще дефинираме двойния интеграл от $f(x, y)$ върху D като равен на двойния интеграл от $\widetilde{f}(x, y)$ върху Δ, определен в предния абзац:*

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy \stackrel{def}{=} \iint\limits_\Delta \widetilde{f}(x, y)\, dxdy.$$

Лесно се вижда, че стойността на интеграла не зависи от избора на правоъгълника Δ.

По този начин дефиницията на Риман се пренася към случая на произволно измеримо дефиниционно множество; ще я наричаме специални дефиниция на Риман.

Обща дефиниция на двойния интеграл. Ще дадем една по-обща дефиниция на разбиване.

Нека D е измеримо множество в равнината, и нека D_i, $i = 1, \dots, n$, са измерими подмножества на D, такива, че

$$D = \cup_{i=1}^n D_i \quad \text{и} \quad D_i^o \cap D_j^o = \emptyset \text{ за } i \neq j$$

- ще казваме, че в този случай имаме измеримо разбиване на D. Ще казваме, че разбиването е специално, ако то се получава чрез разрязване по хоризонтални и вертикални линии, както беше направено в предишните точки на този параграф.

Всъщност, разликата между общите и специални дефиниция се състои в това, дали се използват произволни разбивания на дефиниционната област, или само специални.

Обща дефиниция на Риман. Нека D е измеримо множество в равнината, и $f(x, y)$ е функция, дефинирана в D. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е разбиване на измеримото множество D. Да изберем по една точка $P_i \in D_i$, $i = 1, \dots, n$.

Под риманова сума, съответстваща на разбиването τ и точките $\{P_i\}$, разбираме израза

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^n f(P_i)\, \mu(D_i).$$

Нуждаем се от определение на понятието диаметър на разбиването. Ще напомним, че ако A е ограничено подмножество в равнината, неговия диаметър е максималното разстояние [*] между две негови точки.

$$\operatorname{diam} A = \sup_{P,Q \in A} \rho(P, Q).$$

Ако τ е горното разбиване, дефинираме

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\dots,n} (\operatorname{diam} D_i).$$

[*] Така, диаметърът на един правоъгълник е равен на неговия диагонал, а диаметърът на един кръг е равен на неговия диаметър.

Лесно се вижда, че за специални разбивания тази дефиниция съвпада с дадената по-горе. Сега можем да възпроизведем дефиницията на Риман. Отново дефинираме

$$I(f) = \lim_{\operatorname{diam}\tau \to 0} R_\tau(f),$$

като тук се разглеждат произволни измерими разбивания на D.

Еквивалентност на двете дефиниции. Лесно се вижда, че ако една функция е интегруема по общата дефиниция на Риман, тя е интегруема и относно специалната. Наистина, ако границата в определението на интеграла съществува за общи разбивания, то тя ще съществува (и ще бъде същата), ако се ограничим само със специалните разбивания. Обратното твърдение се доказва малко по-сложно, и ние няма да го доказваме тук. В крайна сметка, общата и специалната дефиниции на Риман са еквивалентни, и във всеки конкретен случай ние имаме свободата да използваме тази, която е по-удобна за случая.

Класове интегруеми функции. Разбира се, дадената по-горе дефиниция ще има смисъл, ако тя е приложима за достатъчно много функции. Следните две твърдения (даваме ги без доказателство), показват, че повечето функции, които се използват в анализа, са интегруеми, т.е. границата на римановите суми наистина съществува.

Твърдение 1. *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната върху затвореното и измеримо множество D, тя е интегруема върху него.*

В някои случаи изискването за непрекъснатост навсякъде е прекалено силно и не обхваща някои важни случаи като например стъпаловидните функции. Оказва се, че е достатъчно да се поиска функцията да е ограничена и непрекъсната 'почти навсякъде', т.е. множеството на нейните точки на прекъсване да е пренебрежимо по Пеано-Жордан. Така, функцията може да има прекъсване върху точки, линии и т.н.

Твърдение 2. *Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и ограничена върху измеримото множество D. Да предположим, че съществува пренебрежимо подмножество A на D, така че $f(x, y)$ е непрекъсната във всички точки на $D \setminus A$. Тогава f е интегруема върху D.*

Троен интеграл. По същият начин, както по-горе, може да се определи понятието троен интеграл, т.е. интеграл от функция $f(x,y,z)$ на три променливи, дефинирана върху измеримо подмножество на $\mathbb{R}^3$. Тъй като дефиницията на троен интеграл по същество повтаря тази на двоен, ние ще я дадем накратко.

Нека $f(x,y,z)$ е дефинирана за $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $z \in [e,f]$. С други думи, нека дефиниционното множество на f да е правоъгълният паралелепипед

$$\Delta = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \subset \mathbb{R}^3.$$

Отново ще въведем делящи точки $x_0, \ldots, x_n$, $y_0, \ldots, y_m$, $z_0, \ldots, z_p$, така че $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, $e = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = f$. Така получаваме разбиването на правоъгълния паралелепипед Δ на по-малки правоъгълни паралелепипеди:

$$\Delta = \cup_{i=1}^{n} \cup_{j=1}^{m} \cup_{k=1}^{p} \Delta_{ijk},$$

където $\Delta_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$. Избираме по една точка

$$P_{ijk} = (\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk}) \in \Delta_{ijk},$$

и определяме римановата сума

$$R_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f\left(P_{ijk}\right) \mu\left(\Delta_{ijk}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} f\left(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \tau_{ijk}\right) \left(x_i - x_{i-1}\right) \left(y_j - y_{j-1}\right) \left(z_k - z_{k-1}\right).$$

И тук определяме диаметър на разбиването с формулата

$$\operatorname{diam} \tau = \max_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m, k=1,\ldots,p} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(y_j - y_{j-1}\right)^2 + \left(z_k - z_{k-1}\right)^2},$$

и определяме тройния интеграл от функцията $f(x,y,z)$ върху Δ с формулата

$$\iiint\limits_{\Delta} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\operatorname{diam} \tau \to 0} R_\tau(f).$$

В общия случай, когато функцията $f(x,y,z)$ е дефинирана в измеримото множество $V \subset \mathbb{R}^3$, избираме правоъгълен паралелепипед

$\Delta \subset \mathbb{R}^3$, съдържащ V. Разглеждаме функцията $\widetilde{f}(x,y,z)$, равна на $f(x,y,z)$ върху V и на нула върху $\Delta \setminus V$, и полагаме

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Delta \widetilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Общата дефиниция на Риман, както и твърденията 1 и 2 за интегруемост, се пренасят дословно за тройния интеграл, и ние няма да ги повтаряме.

Въпроси за самопроверка.

1.Дайте дефиниция на разбиване (делящи точки по x и по y, междинни точки), когато дефиниционното множество е правоъгълник. Какво е диаметър на разбиването?

2. Дайте определение на двоен интеграл като граница на римановите суми. Напишете подробната дефиниция (с ε и δ).

3. Дайте обща дефиниция на двойния интеграл. По какво се различават общата и специалната дефиниция?

4. Кога една функция е интегруема? Посочете два важни класа от интегруеми функции.

5. По какво се различава дефиницията на тройния интеграл от тази на двойния?

2.3 Основни свойства на многомерния интеграл.

Тук ще изброим и докажем основните свойства на двойния интеграл. Те не се различават особено от свойствата на едномерния риманов интеграл, изучени в първата част. В предния параграф ние въведохме няколко еквивалентни дефиниции на интеграла, и при доказателството на всяко свойство ще използваме тази от тях, която е най-удобна за случая. Интеграла от $f(x,y)$ върху D ще означаваме с $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ или просто с $I(f)$.

Свойствата на тройния интеграл дословно съвпагат с тези на двойния, и ние няма да ги отбелязваме отделно.

Свойство 1. Линейност и хомогенност. Ако функциите $f(x,y)$ и $g(x,y)$ са интегруеми върху D, то и $f(x,y)+g(x,y)$, $\lambda f(x,y)$ са също интегруеми, и

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D f(x,y)dxdy,$$

$$\iint_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Доказателство. Ще използваме дефиницията на Риман (без значение - обща или специална). Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е какво да е разбиване на D и $P_i \in D_i$. Имаме

$$R_\tau(f+g) = \sum_{i=1}^n \left(f\left(P_i\right)+g\left(P_i\right)\right)\mu\left(D_i\right) = R_\tau(f)+R_\tau(g),\ R_\tau(\lambda f) = \lambda R_\tau(f),$$

откъдето чрез граничен преход при $\operatorname{diam}\tau \to 0$ получаваме исканите равенства. ■

Свойство 2. Позитивност. Ако $f(x,y) \geq 0$ навсякъде върху D, то и $I(f) \geq 0$.

Доказателство. Очевидно за всяко разбиване τ ще имаме $R_\tau(f) \geq 0$, откъдето чрез граничен преход получаваме $I(f) \geq 0$. ■

Позитивността на интеграла автоматично влече след себе си още няколко свойства.

Свойство 3. Монотонност. Ако $f(x,y) \geq g(x,y)$ навсякъде върху D, то $I(f) \geq I(g)$ (с други думи, неравенствата могат да се интегрират).

Доказателство. Тъй като $f(x,y) - g(x,y) \geq 0$, то по свойство 2 имаме $I(f-g) \geq 0$, откъдето по свойство 1 получаваме $I(f) - I(g) \geq 0$. ■

Свойство 4. Ако функцията $f(x,y)$ е интегруема върху D, то нейният модул $|f(x,y)|$ е също интегруем, и $|I(f)| \leq I\left(|f|\right)$.

Доказателство. Ще приемем без доказателство, че $|f(x,y)|$ е интегруема. Ще докажем исканото неравенство. Наистина, навсякъде е изпълнено неравенството

$$-\left|f(x,y)\right| \leq f(x,y) \leq \left|f(x,y)\right|,$$

откъдето по свойство 3 следва, че

$$-I\left(|f|\right) \leq I\left(f\right) \leq I\left(|f|\right).$$

Следователно,

$$|I(f)| = \max\left(I(f), -I(f)\right) \leq I\left(|f|\right).$$

■

Свойство 5. (Връзка между интеграла и мярката). За всяко измеримо множество D имаме:

$$\iint_D 1\, dxdy = \mu(D).$$

Доказателство. Очевидно за произволно разбиване $\tau : D = \cup_{i=1}^{n} D_i$ е в сила $R_\tau(1) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(D_i\right) = \mu(D)$. ■

Свойство 6. (Теорема за средните стойности). Нека D е затворено, измеримо и линейно свързано множество (виж §1.3. за дефиниция на линейно свързано множество), и $f(x,y)$ е непрекъсната върху D. Тогава съществува точка $P_0 \in D$ такава, че

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = f\left(P_0\right)\mu(D).$$

Доказателство. Да означим с m и M съответно точната долна и горна граница на стойностите на $f(x,y)$ върху D. Според теоремите на Вайерщрас (теореми 7 и 8 на §1.3) тези граници се достигат, т.е. съществуват точки $P_{min}, P_{max} \in D$ такива, че $f(P_{min}) = m$, $f(P_{max}) = M$. Интегрирайки неравенствата $m \le f(x,y) \le M$, получаваме $m\mu(D) \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M\mu(D)$, (виж свойство 5), откъдето

$$f(P_{min}) = m \le \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\, dxdy \le M = f(P_{max}).$$

По теоремата за междинните стойности (теорема 11 на §1.3) всяко число, намиращо се между две стойности на функцията, е също стойност на функцията, откъдето следва съществуването на точка $P_0 \in D$ такава, че $f(P_0) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$. ■

Забележка. Числото $f(P_0) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)dxdy$ се нарича средна стойност на функцията $f(x,y)$ върху D.

Свойство 7. (Адитивност по множество). Нека $D = D' \cup D''$ е разбиване на измеримото множество D на две измерими подмножества D' и D'' с непресичащи се вътрешности, и $f(x,y)$ е функция, дефинирана върху D. Тогава

1/ $f(x,y)$ е интегруема върху D точно тогава, когато тя е интегруема върху D' и D'', и

2/

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D'} f(x,y)\, dxdy + \iint_{D''} f(x,y)\, dxdy.$$

Доказателство. И тук ще пропуснем доказателството на интегруемостта от т. 1/ Ще докажем точка 2/, като използваме общата дефиниция на Риман. Да предположим, че е известно, че f е интегруема върху D, D' и D''. Нека $\tau' : D_1 = \cup_{i=1}^{n} D'_i$ е разбиване на D', и $\tau'' : D'' = \cup_{j=1}^{m} D''_i$ е разбиване на D''. Елементите на тези две разбивания образуват разбиване на D:

$$\tau : D = \left(\cup_{i=1}^{n} D'_i\right) \cup \left(\cup_{j=1}^{m} D''_j\right).$$

Да изберем и междинните точки $P'_i \in D'_i$, $P''_j \in D''_j$. Тогава, чрез граничен преход в равенството

$$R_\tau(f) = R_{\tau'}(f) + R_{\tau''}(f)$$

при $\operatorname{diam}\tau'$ и $\operatorname{diam}\tau''$ клонящи към нула (тогава очевидно и $\operatorname{diam}\tau$ клони към нула) получаваме по дефиницията на Риман равенството 2/. ■

Въпроси за самопроверка.

1.Избройте основните свойства на двойния интеграл.

2.4 Пресмятане на многомерните интеграли.

Пресмятане на двойния интеграл от функция, дефинирана в правоъгълник. Основният начин за пресмятане на двойните интеграли е свеждането им към повторни, т.е. интегриране първо по едната, и след това по втората променлива.

Нека $f(x,y)$ е функция, интегруема върху правоъгълника $\Delta = [a,b] \times [c,d]$. Тогава имаме

Теорема 1.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Забележка. Интегриранията по x и y могат да бъдат разменени; вярно е и равенството

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Доказателство. Макар че теоремата е вярна в общия случай, тук ще я докажем за случая на непрекъснатата функция $f(x,y)$. Да означим

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Трябва да се докаже, че

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy.$$

Нека, както в §2, изберем разбиване τ, определено от делящите точки $x_0,\ldots,x_n$, $y_0,\ldots,y_m$.. Да означим с m_{ij} и M_{ij} съответно най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x,y)$ в правоъгълника

$\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. По втората теорема на Вайерщрас (теорема 8 от §1.3) тези две числа може да се разглеждат като стойности на $f(x, y)$ в подходящи точки от Δ_{ij}.

Да фиксираме по една точка ξ_i във всеки от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Тъй като за всяко $y \in [y_{j-1}, y_j]$ е изпълнено неравенството

$$m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij},$$

то, интегрирайки по y, получаваме, че

$$m_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right) \leq \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy \leq M_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right).$$

Тъй като

$$F(\xi_i) = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\, dy = \sum_{j=1}^m \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\, dy,$$

то

$$\sum_{j=1}^m m_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right) \leq F(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^m M_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right).$$

Да умножим това неравенство с $(x_i - x_{i-1})$; получаваме, че

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}\left(y_j - y_{j-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Да накараме сега диаметърът на разбиването τ да клони към нула. Вляво и вдясно в горното неравенство има изрази, които могат да се разглеждат като риманови суми за двойния интеграл $\iint\limits_\Delta f(x, y)\, dxdy$, и следователно клонят към този интеграл*. Изразът в средата $\sum_{i=1}^n F(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$ представлява риманова сума за интеграла

*Тук ние използваме непрекъснатостта на функцията $f(x, y)$, но всъщност това твърдение е вярно за произволна интегруема функция и се нарича Теорема на Дарбу.

$\int\limits_a^b F(x)\,dx$ и клони към този интеграл. След граничен преход получаваме неравенствата

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy \le \int\limits_a^b F(x)\,dx \le \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\,dxdy,$$

което доказва теоремата ■

По-интересен е случаят, когато функцията е дефинирана върху множество с по-сложна форма. Ще пресметнем интеграла, ако дефиниционната област на функцията е криволинейният трапец D, състоящ се от всички точки (x,y) в равнината, за които $x \in [a,b]$ и $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$. Тук $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати функции в интервала $[a,b]$ такива, че $\varphi(x) \le \psi(x)$ за всяко x. В §1 доказахме, че всеки криволинеен трапец е измеримо подмножество на $\mathbb{R}^2$. Нека $f(x,y)$ е интегруема функция, дефинирана в D.

Теорема 2.

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Доказателство. Според специалната дефиниция на двойния интеграл, трябва да изберем правоъгълник $\Delta = [a,b] \times [c,d]$, който да съдържа D. (Това е изпълнено, ако $c \le \min \varphi(x)$ и $d \ge \max \psi(x)$). Нека $\widetilde{f}(x,y)$ да означава продължението на $f(x,y)$ върху цялото Δ, равно на нула върху $\Delta \setminus D$. По дефиниция имаме

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Delta} \widetilde{f}(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \widetilde{f}(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

тъй като при всяко x функцията $\widetilde{f}(x,y)$ е равна на нула в интервалите $[c,\varphi(x)]$ и $[\psi(x),d]$. ■

Пример. Да пресметнем лицето на кръга D_R с център в началото на координатите и радиус R. Очевидно D_R се състои от всички точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, за които $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$. Решавайки това неравенство относно y, получаваме представянето на D_R като криволинеен трапец:

$$D_R = \left\{(x, y) : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}.$$

По свойство 5 от предния параграф мярката на дадено множество е равна на интеграл а от константата единица по него. Използвайки горната формула, получаваме:

$$\mu\left(D_R\right) = \iint\limits_{D_R} 1 \; dxdy = \int\limits_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\right) dx = 2 \int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \; dx.$$

Последният интеграл се решава чрез субституцията $x = R\sin t$, откъдето

$$\mu\left(D_R\right) = 2R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt = R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \; dt = \pi R^2.$$

Пресмятане на тройните интеграли. Нека функцията $f(x, y, z)$ е дефинирана и интегруема върху правоъгълния паралелепипед $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Тогава тройният интеграл от $f(x, y, z)$ върху Δ може да се пресметне, аналогично на теорема 1, чрез последователно интегриране по трите променливи.

Теорема 3.

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) \; dxdydz = \int_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int_e^f f(x, y, z) \; dz\right) dy\right) dx.$$

Доказателството на това твърдение е напълно аналогично на доказателството на теорема 1.

За да можем да пресмятаме тройни интеграли върху по-сложни фигури, трябва да въведем тримерен аналог на понятието криволинеен трапец:

Дефиниция. *Нека е даденото измеримото и затворено множество D в равнината Oxy, и нека $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ са две функции, дефинирани и непрекъснати върху D, за които във всяка точка (x,y) е изпълнено $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$. Тогава под криволинеен цилиндър с основа D, зададен чрез функциите φ и ψ, ще разбираме тялото $V \subset \mathbb{R}^3$, определено с условията*

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\}.$$

Както и за криволинеен трапец (виж теорема 2 от §1), може да се докаже

Лема 4. *Множеството V е измеримо подмножество на $\mathbb{R}^3$.*

Нека $f(x,y,z)$ е функция, интегруема върху V. Тримерният аналог на теорема 3 е:

Теорема 5.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

Доказателство. Нека $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ е правоъгълник в равнината Oxy, съдържащ множеството D, и нека константите e, f са избрани както в предната лема. Тогава правоъгълният паралелепипед $\widetilde{\Delta} = \Delta \times [e,f]$ съдържа тялото V. Нека $\widetilde{f}(x,y,z)$ е продължението на $f(x,y,z)$ върху цялото $\widetilde{\Delta}$ с нулеви стойности извън V. Тогава имаме

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\widetilde{\Delta}} \widetilde{f}(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{\Delta} \left(\int\limits_e^f \widetilde{f}(x,y,z)\,dz \right) dxdy = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

■

Пример. Да пресметнем обема на кълбото B_R с център в началото на координатите и радиус R. Очевидно B_R се състои от всички точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, за които $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$. Решавайки това неравенство относно z, получаваме представянето на B_R като криволинеен цилиндър:

$$B_R = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in D_R, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

където D_R, както и по-горе, означава кръг в равнината (x, y) с център в началото и радиус R. По формулата от горната теорема получаваме

$$\mu\left(B_R\right) = \iiint\limits_{B_R} 1\, dxdydz = 2 \iint\limits_{D_R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy =$$

$$= 2 \int\limits_{-R}^{R} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx.$$

В последният интеграл да означим временно $a = \sqrt{R^2 - x^2}$; както видяхме малко по-горе, използвайки субституцията $x = a\sin t$, получаваме, че $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \pi a^2/2$ и следователно

$$\mu\left(B_R\right) = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\, dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Въпроси за самопроверка.

1. Как се пресмята двоен интеграл върху правоъгълник?

2. Дайте определение и примери на криволинеен трапец в равнината.

3. Как се пресмята двоен интеграл върху криволинеен трапец?

4. Пресметнете $\iint\limits_{D_R} x^2\, dxdy$, където с D_R сме означили кръг в равнината с център в началото и радиус R.

5. Дайте определение и примери на криволинеен цилиндър в тримерното пространство.

6. Как се пресмята двоен интеграл върху криволинеен цилиндър?

2.5 Смяна на променливите в многомерните интеграли.

Като начало ще си припомним сътветната теорема в едномерния случай. Нека $f(x)$ е дефинирана и интегруема за $x \in [a,b]$, и нека $\varphi(t)$ е еднократно гладка в интервала $[\alpha,\beta]$ (или $[\beta,\alpha]$), като $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Нека се опитаме да осмислим тази формула в частния случай на монотонно растяща $\varphi(t)$. Нека $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta$ е разбиване на $[\alpha,\beta]$, и нека точките $x_i = \varphi(t_i)$ да дават съответното разбиване на интервала $[a,b]$. По теоремата за крайните нараствания имаме $x_i - x_{i-1} = \varphi'(\eta_i)$ за подходящо $\eta_i \in (t_{i-1},t_i)$. Да положим $\xi_i = \varphi\left(\eta_i\right)$. Като използваме теоремата за крайните нараствания, получаваме

$$\sum_{i=0}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\varphi(\eta_i)\right)\left(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f\left(\varphi(\eta_i)\right)\varphi'(\eta_i)\left(t_i - t_{i-1}\right).$$

Лявата сума клони към левия интеграл във формулата за смяна на променливите, а дясната сума - към десния интеграл. Така ние получаваме друго доказателство на формулата.

Макар и по-сложно от стандартното, това доказателство има преимуществото, че ни показва от къде се взема допълнителният множител $\varphi'(t)$ в интеграла отдясно; този множител показва колко пъти дължината на съответния подинтервал се растяга (или свива) след прилагане на функцията $\varphi(t)$. Естествено е да се зададе същия въпрос, когато вместо функцията $\varphi(t)$ имаме преобразование от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, зададено с n функции на n променливи; оказва се, че в този случай съответният "коефициент на разтягане на обема"се определя от функционалната детерминанта (или якобиана) на съответното изображение (виж §1.4). За опростяване ще разглеждаме преобразования от $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Отначало ще припомним основните понятия. Нека D е измеримо и затворено подмножество на $\mathbb{R}^2$ с координати (u,v),и $\Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^2$

е изображението, зададено с формулите

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$$

или, написано във векторна форма,

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))\,.$$

Ще казваме, че Φ е еднократно гладко, ако функциите $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ са диференцируеми в D и притежават непрекъснати първи производни. Да си припомним определенията от §1.4: под функционална детерминанта, или якобиан, на $\Phi(u,v)$ ще разбираме функцията

$$J_\Phi(u,v) = \frac{D\,(x,y)}{D\,(u,v)}\,(u,v) \;=\; \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

Изображението $\Phi(u,v)$ се нарича регулярно, ако $J_\Phi(u,v) \neq 0$ за всяка точка $(u,v) \in D$.

Сега можем да формулираме основната теорема на този параграф.

Теорема за смяна на променливите в двойните интеграли. *Нека, както по-горе,* $\Phi(u,v) : D \to \mathbb{R}^2$ *е регулярно изображение, нека* $E = \Phi(D)$ *и* $f(x,y)$ *е интегруема функция върху* E. *Тогава е в сила равенството*

$$\iint_E f(x,y)\;dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\,|J_\Phi(u,v))|\;dudv.$$

Забележка. Читателят може би забелязва, че многомерната формула се различава от едномерната. Наистина, в едномерния случай функционалната детерминанта съвпада с производната на функцията, но в известната ни формула тя не е под знака на модула. Разликата не е случайна. В едномерния случай модулът може да бъде избягнат, тъй като там е въведено понятието *ориентиран интеграл*, или интеграл с разменени граници (виж *Конвенцията* от §4.2 на част 1). В многомерния случай това също може да бъде направено, но изисква по-сериозни средства.

Основният момент в доказателството на теоремата е в следното твърдение:

Основна лема. *Ако* (u_0, v_0) *е точка от* D *и* U *е достатъчно малка нейна околност, то отношението на лицата на* $\Phi(U)$ *и* U *е близко до* $|J_\Phi\,(u_0, v_0)|$. *Ще записваме това във вида*

$$\frac{\mu\,(\Phi(U))}{\mu\,(U)} \approx |J_\Phi\,(u_0, v_0)|\,.$$

По-точно лемата може да се формулира така: ако U_n е една редица от околности на (u_0, v_0), свиваща се към тази точка, то отношението $\dfrac{\mu\,(\Phi(U_n))}{\mu\,(U_n)}$ клони към $|J_\Phi\,(u_0, v_0)|$.

Тук няма да доказваме основната лема, но ще се опитаме да я онагледим и да покажем защо именно якобиана дава отношението между обемите. Тръгваме от елементарната формула за лице на успоредник, породен от два вектора. Нека $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ са два вектора в равнината; тогава лицето S на успоредника, построен върху тях, е равно на

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\,\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\,\right|.$$

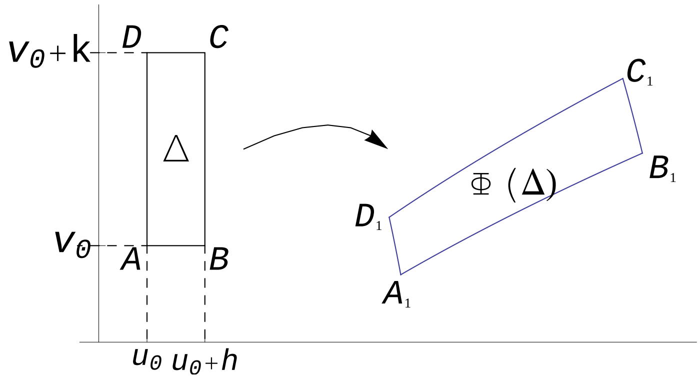
(Тук и по-долу двете черти отляво и отдясно означават модула на детерминантата.)

Нека, както по-горе, Φ е изображението, съпоставящо на точката с координати (u, v) точката (x, y), зададена с уравненията $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Нека Δ е правоъгълник с върхове $A = (u_0, v_0)$, $B = (u_0 + h, v_0)$, $C = (u_0 + h, v_0 + k)$, $D = (u_0, v_0 + k)$, $\mu(\Delta) = hk$. Да означим техните образи чрез Φ с $A_1 = \Phi(A)$, $B_1 = \Phi(B)$ и т.н. Тогава очевидно фигурата $\Phi(\Delta)$ е близка до успоредника, построен върху векторите $\vec{A_1B_1}$, $\vec{A_1D_1}$ (виж чертежа). По теоремата за крайните нараствания имаме

$$\vec{A_1B_1} = (x(u_0 + h, v_0) - x(u_0, v_0), y(u_0 + h, v_0) - y(u_0, v_0)) =$$

$$= h\,(x'_u(u_0 + \theta_1 h, v_0), y'_u(u_0 + \theta_2 h, v_0))$$

и аналогично



Образ на правоъгълника Δ чрез изображението Φ.

$$A_1\vec{D}_1 = (x(u_0, v_0 + k) - x(u_0, v_0), y(u_0, v_0 + k) - y(u_0, v_0)) =$$

$$= k\left(x'_v(u_0, v_0 + \theta_3 k), y'_v(u_0, v_0 + \theta_4 k)\right),$$

където θ_1,...,θ_4 са между нула и едно. С други думи, участващите в горната формула стойности на функциите x'_u и т.н. са близки до стойностите им в точката (u_0, v_0).

Оттук при малки h и k получаваме приблизителната формула

$$\mu(\Phi(\Delta)) \approx \left|A_1\vec{B}_1 \times A_1\vec{D}_1\right| = \left| \begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \right| hk,$$

откъдето

$$\frac{\mu(\Phi(\Delta))}{\mu(\Delta)} \approx \left| \begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \right| = \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\right|.$$

Това разсъждение, разбира се, не може да служи за доказателство на лемата, но донякъде обяснява нейното съдържание.

Доказателство на теоремата като следствие от основната лема. Ще покажем, без да претендираме за строгост, как от основната лема следва формулата за смяна на променливите. Ще използваме общата дефиниция на двойния интеграл. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^k D_i$ е произволно измеримо разбиване на D, и нека $E_i = \Phi\left(D_i\right)$; тогава $\widetilde{\tau} : E = \cup_{i=1}^k E_i$

е измеримо разбиване на $E = \Phi(D)$. Да изберем по една точка $Q_i \in D_i$, и нека $P_i = \Phi(Q_i) \in E_i$. Да образуваме римановата сума

$$R_{\widetilde{\tau}} = \sum_{i=1}^{k} f(P_i)\,\mu(E_i)\,.$$

От друга страна, от основната лема следва, че $\mu(E_i)$ е близо до $|J_\Phi(Q_i)|\,.\mu(E_i)$. Оттук, замествайки, получаваме приблизителната формула

$$R_{\widetilde{\tau}} \approx \sum_{i=1}^{k} f(\Phi(Q_i))\,|J_\Phi(Q_i)|\,\mu(D_i)\,.$$

Дясната страна обаче представлява риманова сума за двойния интеграл

$$\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\,|J_\Phi(u,v))|\;dudv.$$

При $\operatorname{diam}\tau \to 0$ очевидно и $\operatorname{diam}\widetilde{\tau} \to 0$. Тогава римановата сума отляво клони към двойния интеграл $\iint_E f(x,y)\,dxdy$, а римановата сума отдясно - към интеграла $\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\,|J_\Phi(u,v))|\;dudv$, откъдето следва равенството на тез два интеграла. ■

Аналогично изглежда и формулата за смяна на променливите в тройните интеграли. Нека

$$\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,,$$

е еднократно гладко изображение, дефинирано за $(u,v,w) \in D \subset \mathbb{R}^3$, и нека $E = \Phi(D)$. Функционалната детерминанта на това изображение се дава с формулата

$$J_\Phi(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}(u,v,w) \; = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Теорема за смяна на променливите в тройните интеграли. *Нека $f(x, y, z)$ е интегруема функция, дефинирана върху множеството E Тогава е в сила равенството*

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$\iint_D f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\, |J_\Phi(u, v, w))|\ dudvdw.$$

Геометрично, тази формула се базира на формулата за обем на паралелепипед, породен от дадени три вектора в $\mathbb{R}^3$ (опитайте се да дадете обяснение, аналогично на даденото по-горе в двумерния случай).

Примери: полярна и сферична смяна. Като конкретни и важни примери ще разгледаме полярната смяна в $\mathbb{R}^2$ и сферичната смяна в $\mathbb{R}^3$, въведени в §1.9. Нека D е правоъгълник в равнината (ρ, θ): $D = [\rho, \rho + \Delta\rho] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$, и Φ е полярното преобразование, зададено с формулите $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Тогава множеството $E = \Phi(D)$ представлява сектор с ъгъл $\Delta\theta$, изрязан от кръгов пръстен, намиращ се между две окръжности с център началото и радиуси съответно ρ и $\rho + \Delta\rho$. Елементарната формула за лице на такава фигура (тя е аналогична на формулата за лице на трапец) ни дава

$$\mu(E) = \Delta\rho \left(\frac{\rho.\Delta\theta + (\rho + \Delta\rho)\Delta\theta}{2} \right) = \Delta\rho.\Delta\theta \left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2} \right),$$

откъдето

$$\lim_{\Delta\rho, \Delta\theta \to 0} \frac{\mu(E)}{\mu(D)} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \left(\rho + \frac{\Delta\rho}{2} \right) = \rho,$$

което съвпада с пресметнатата в §1.9 стойност на $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}$.

Аналогично е положението в тримерното пространство. Нека е дадена сфера с радиус ρ, и F да е сферичният правоъгълник, затворен между меридианите с "географска дължина"съответно θ и $\theta + \Delta\theta$, и паралелите с "географска ширина"съответно φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тъй като паралелите и меридианите се пресичат под прави ъгли, то лицето на F е приблизително равно на произведението на дължините на двете му страни, които са дъги от окръжности. Знаем, че всички меридиани са окръжности с радиус, равен на радиуса на сферата ρ, а паралелът, отговарящ на "географска ширина"φ, е окръжност с радиус $\rho.\sin\varphi$. Оттук получаваме

$$\mu(F) \approx (\rho.\Delta\theta)\,(\rho.\sin\varphi.\Delta\varphi) = \rho^2\sin\varphi.\Delta\theta.\Delta\varphi.$$

Ако E е "стълбче"над F с височина $\Delta\rho$, то $\mu(E) = \Delta\rho.\mu(F)$. Ако означим с D правоъгълният паралелепипед $D = [\rho, \rho + \Delta\rho] \times [\theta, \theta + \Delta\theta] \times [\varphi, \varphi + \Delta\varphi]$, а Φ е сферичното преобразование, то $\Phi(D)$ съвпада с множеството E, и получаваме

$$\lim_{\Delta\rho,\Delta\theta,\Delta\varphi\to 0} \frac{\mu(E)}{\mu(D)} = \rho^2\sin\varphi,$$

което отново съвпада с известната от §1.9 функционална детерминанта $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}$.

Въпроси за самопроверка.

1. Пресметнете лицето на кръга и обема на тримерното кълбо, като използвате съответно полярна и сферична смяна на променливите в съответните интеграли.

2. Нека Φ е линейно изображение на равнината в себе си, зададено с формулите

$$x = au + bv, \quad y = cu + dv.$$

Намерете функционалната детерминанта на такова изображение. Докажете, че отношението $\dfrac{\mu\,(\Phi(U))}{\mu\,(U)}$ е константа (т.е. е едно и също за всички измерими множества U).

2.6 Приложения на многомерните интеграли.

Като първо приложение ще дадем вече доказаните в §4 формули за лице на криволинеен трапец и обем на криволинеен цилиндър. Като непосредствени следствия от теореми 2 и 5 от този параграф получаваме:

Теорема 1. *Нека D е криволинейният трапец, състоящ се от всички точки (x,y) в равнината, за които $x \in [a,b]$ и $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Тогава*

$$\mu(D) = \int\limits_a^b \left(\psi(x) - \varphi(x)\right)\, dydx.$$

Доказателство. По свойство 5 от §3 и от теорема 2 от §4 получаваме:

$$\mu(D) = \iint_D 1\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\psi(x) - \varphi(x)\right)\, dydx.\blacksquare$$

Аналогична формула имаме за обем на криволинеен цилиндър:

Теорема 2. *Нека тялото $V \subset \mathbb{R}^3$, е криволинеен цилиндър, определен с условията*

$$V = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)\right\}.$$

Тогава

$$\mu(V) = \iiint\limits_V 1\, dxdydz = \iint\limits_D \left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)\, dxdy.$$

Понякога е удобно формулата за обем на тяло да се изрази по малко по-различен начин. Нека $V \in \mathbb{R}^3$ е измеримо множество, и нека проекцията на V върху оста x да съвпада с интервала $[a,b]$. За всяко $x \in [a,b]$ да означим с L_x равнината, успоредна на равнината Oxy и минаваща през точката $(x,0,0)$ (L_x се състои от всички точки в $\mathbb{R}^3$, чиято първа координата е равна на x). Нека $Q_V(x) = \mu(V \cap L_x)$ да е двумерната мярка на Пеано-Жордан на множеството $V \cap L_x$, разглеждано като подмножество на равнината L_x.

Теорема 3 (Принцип на Кавалиери). *За обема на V е в сила формулата*

$$\mu(V) = \int\limits_a^b Q_V(x)\, dx.$$

Забележка. Италианският математик от XVII век Кавалиери е формулирал принципа си по следния начин: Нека за телата V_1, V_2 знаем, че при всяко $x \in [a, b]$ сеченията $(V_1 \cap L_x)$ и $(V_2 \cap L_x)$ имат еднакви лица; тогава обемите на V_1 и V_2 са равни.

Доказателство на теорема 3. Да изберем правоъгълен паралелепипед $\Delta = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, който да съдържа V, и нека $\widetilde{f}(x, y)$ да означава функцията, равна на единица върху V и на нула в $\Delta \setminus V$. Тогава

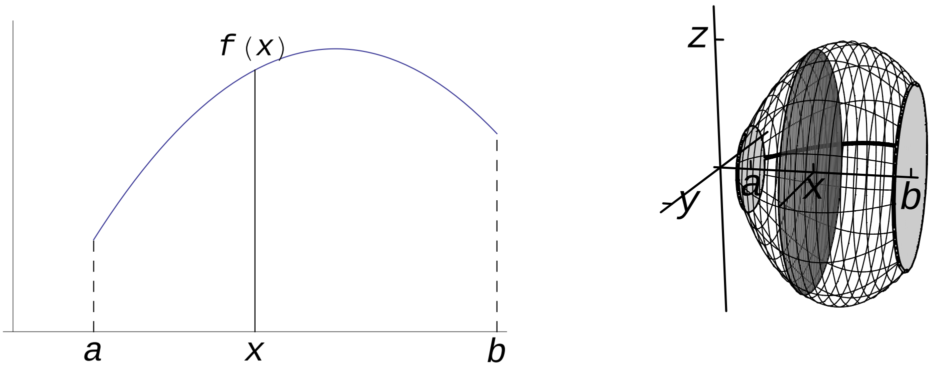
$$\mu(V) = \iiint\limits_{\Delta} \widetilde{f}(x, y)\, dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \int\limits_e^f \widetilde{f}(x, y)\, dydz \right) dx = \int\limits_a^b Q_V(x)\, dx.$$

■

Обем на ротационно тяло. Нека $\varphi(x)$ е непрекъсната и неотрицателна за $x \in [a, b]$. Да завъртим графиката на функцията на пълен оборот около оста x; тогава тялото V_φ, ограничавано от получената повърхнина, се нарича ротационно тяло, определено от $\varphi(x)$. Тялото V_φ се състои от всички точки $P = (x, y, z)$ такива, че разстоянието от P до оста x не надминава $\varphi(x)$. По-точно,

$$V_\varphi = \left\{ (x, y, z) : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le \varphi^2(x) \right\}.$$

От горното описание се вижда, че за всяко $x \in [a, b]$ сечението $V_\phi \cap L_x$ представлява окръжност с център началото и радиус $\varphi(x)$. Оттук $Q_{V_\varphi}(x) = \pi \varphi^2(x)$, и от принципа на Кавалиери получаваме



Графика на функция и ротационно тяло, породено от нея.

Теорема 4. (Формула за обема на ротационно тяло). *Обемът на ротационното тяло V_φ, определено от функцията $\varphi(x)$, се дава от формулата*

$$\mu\left(V_\varphi\right) = \pi \int_a^b \varphi^2(x)\, dx.$$

Тази формула може да бъде леко обобщена: нека D е криволинейният трапец, определен с неравенствата $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, и нека V_D е ротационното тяло, получено чрез въртене на D около оста x. Тогава $V_D = V_\psi \setminus V_\varphi$, откъдето получаваме

Следствие 5. *Обемът на V_D се дава с формулата*

$$\mu\left(V_D\right) = \pi \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx.$$

Маса и център на тежестта. В тази точка ще се занимаваме с т.н. *материални тела*, т.е двумерни или тримерни множества, в които е дадена функция на плътността $\rho(P) \geq 0$. Физическият смисъл на плътността е отношението на масата към обема, т.е. имаме $\frac{m(U)}{\mu(U)} \approx \rho(P)$, където U е достатъчно малка околност на точката P, а $m(U)$ означава масата на U. Разбира се, ако $\rho(P) \equiv 1$, то масата съвпада с обема.

Маса. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е измеримо множество, върху което е зададена плътност $\rho(x,y) \geq 0$. Да вземем разбиване $D = \cup_{i=1}^n D_i$, и точки $P_i \in D_i$. В първо приближение можем да считаме, че плътността навсякъде в D_i е равна на $\rho(P_i)$, откъдето

$$m(D) = \sum_{i=1}^n m(D_i) \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i)\mu(D_i).$$

Като намаляваме диаметъра на разбиването, тази формула става все по-точна, и чрез граничен преход получаваме равенството

$$\boxed{m(D) = \iint\limits_D \rho(x,y)\, dxdy.}$$

Формулата за маса на тримерно тяло е същата, с единствената разлика, че се използва тримерен интеграл вместо двумерен.

Център на тежестта. Ще напомним понятието център на тежестта на крайна система от материални точки. Нека са дадени точките $P_1, \ldots, P_n$ (в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), с маси съответно $m_1, \ldots, m_n$. Под център на тежестта на тази система разбираме точката

$$\vec{P}_* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{P}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

На основата на горното равенство ще изведем формула за център на тежестта на материална фигура и материално тяло. Нека $D \subset \mathbb{R}^2$ е материална фигура, т.е. измеримо множество със зададена плътност. Нека имаме разбиване $D = \cup_{i=1}^n D_i$ и точки $P_i = (x_i, y_i) \in D_i$. За извеждане на приближената формула можем да считаме, че масата на всяко от парчетата D_i е съсредоточена в точката P_i, т.е.

$$P_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^n \rho(P_i)\mu(D_i).\vec{P}_i \right),$$

или, ако (x_*, y_*) са координатите на P_*,

$$x_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i,y_i)\mu(D_i) \right) \;, \quad y_* \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n m(D_i)} \left(\sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i,y_i)\mu(D_i) \right).$$

След граничен преход получаваме

$$x_* = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy\ , \quad y_* = \frac{1}{m(D)} \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy.$$

Оставяме на читателя да напише съответните формули за тримерно материално тяло.

Център на тежестта на еднороден криволинеен трапец и цилиндър. Нека $D = \{x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ е криволинеен трапец, и нека $\rho(x,y) \equiv 1$. Тогава горните формули дават

$$x_* = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b x \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right) dx = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b x \left(\psi(x) - \varphi(x)\right)\,dx,$$

$$y_* = \frac{1}{\mu(D)} \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y\,dy \right) dx = \frac{1}{2\mu(D)} \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\,dx.$$

Аналогично, за еднородният криволинеен цилиндър

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$$

са в сила формулите

$$x_* = \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_D x\left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)\,dxdy,$$

$$y_* = \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_D y\left(\psi(x,y) - \varphi(x,y)\right)\,dxdy,$$

$$z_* = \frac{1}{2\mu(V)} \iint\limits_D \left(\psi^2(x,y) - \varphi^2(x,y)\right)\,dxdy.$$

Пример. Ще намерим центъра на тежестта на горното полукълбо на кълбо с радиус R, което се представя като

$$B_R^+ = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in D_R,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right\},$$

където с D_R сме означили кръга с център в началото и радиус R. Интересува ни само z-координатата (защо?):

$$z_* = \frac{3}{4\pi R^3} \iint\limits_{D_R} \left(R^2 - x^2 - y^2\right)\, dxdy = \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\, d\rho = \frac{3}{8} R,$$

т.е. височината на центъра на тежестта е 37.5 процента от радиуса.

Теорема на Гулдин. Нека V_D е тялото, получено от въртене на криволинейния трапец $D = \{x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ около оста x. Да сравним формулата за обема на V_D:

$$\mu\left(V_D\right) = \pi \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx$$

с формулата за y-координатата на центъра на тежестта на D:

$$y_* = \frac{1}{2\mu(D)} \int_a^b \left(\psi^2(x) - \varphi^2(x)\right)\, dx.$$

Оттук получаваме

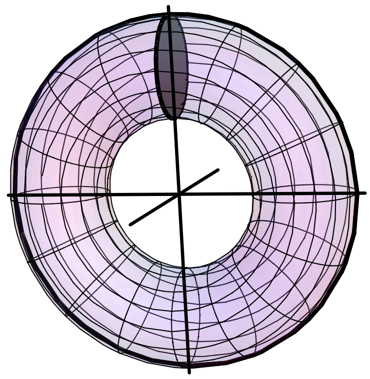
$$\mu\left(V_D\right) = 2\pi y_*\ .\ \mu(D).$$

С други думи, изпълнена е

Теорема 6. (Втора теорема на Гулдин[*]). *Обемът на ротационното тяло, получено от въртенето на фигурата D, е равен на лицето на тази фигура, умножена по дължината на окръжността, описана от центъра на тежестта при въртенето.*

Пример. Нека $0 < r < R$. Да означим с D кръга с радиус r и център в точката $(0, R)$. Фигурата T, получена от въртенето на D

[*]Първата теорема на Гулдин звучи аналогично, но се отнася до повърхнината на ротационното тяло и ще бъде разгледана по-нататък. Тези две теореми носят името на Паул Гулдин, швейцарски йезуит, работил в началото на 17 в. Те са били известни обаче и на александрийския математик Пап, IV в. н.е. (последният велик математик на античността).



Тор в $\mathbb{R}^3$.

около абсцисната ос, се нарича тор. Очевидно центърът на тежестта на един кръг съвпада с неговия център, и следователно за обема на тора T получаваме формулата

$$\mu(T) = 2\pi R.\pi r^2 = 2\pi^2 R r^2.$$

Лице на повърхност, представена като графика на функция. Нека $f(x, y)$ е еднократно гладка функция на две променливи, дефинирана в околност на измеримото и затворено множество D. Нека $G_f \subset \mathbb{R}^3$ е графиката на тази функция:

$$G_f = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

Ще припомним понятието *допирателна равнина* (или допирателно подпространство) към G_f в точката $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in G_f$.

Да фиксираме y_0; Получаваме кривата, образувана от всички точки от вида $P_1(x) = (x, y_0, f(x, y_0))$, лежаща върху G_f. Ще означим с l_1 нейният допирателен вектор в точката x_0: $l_1 = P_1'(x_0) =$

$(1, 0, f'_x(x_0, y_0))$. Аналогично, ако фиксираме x_0, получаваме кривата $P_2(y) = (x_0, y, f(x_0, y))$ с допирателен вектор в y_0 равен на $l_2 = P'_2(y_0) = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$. Множеството от всички линейни комбинации $\lambda l_1 + \mu l_2$ на векторите l_1 и l_2 представлява двумерно векторно подпространство на $\mathbb{R}^3$, което се нарича допирателна равнина към G_f в т. P_0 и се бележи с $T_{P_0}(G_f)$.

Ще ни бъде необходим и единственият (с точност до умножение с константа) вектор, перпендикулярен на $T_{P_0}(G_f)$. Такъв вектор се нарича нормален вектор към G_f в точката P_0. Има един лесен начин да намерим такъв вектор: това е векторното произведение на векторите l_1 и l_2. Означаваме

$$\vec{N}(P_0) = l_1 \times l_2 = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 1 & 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \left(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1\right).$$

Да си припомним формулата за промяна на лицето при проектиране, известна ни от елементарната математика. Нека α и β са две равнини в тримерното пространство, нека Π_β да означава ортогоналната проекция на $\mathbb{R}^3$ върху β, и нека G е измеримо подмножество на α (в смисъл на мярката на Пеано-Жордан върху α). Тогава

$$\frac{\mu(\Pi_\beta(G))}{\mu(G)} = \cos \angle(\alpha, \beta).$$

Наистина, това твърдение лесно се проверява за правоъгълници, едната страна на които е успоредна на пресечницата на равнините α и β; следователно твърдението е вярно за обединение на такива правоъгълници (т.е. за елементарните множества) и чрез граничен преход то се получава за всяко измеримо множество. Ще отбележим, че ако $\vec{N}_\alpha$, $\vec{N}_\beta$ са нормалните вектори съответно към α и β, то ъгълът между тях $\angle(\alpha, \beta)$ е равен на ъгъла между техните нормали $\angle\left(\vec{N}_\alpha, \vec{N}_\beta\right)$.

Вече можем да изведем формулата за лицето на G_f. Нека $\tau : D = \cup_{i=1}^n D_i$ е разбиване на D, и нека $Q_i = (x_i, y_i) \in D_i$, $P_i = (Q_i, f(Q_i) \in G_f$. Нека G_i е частта от G_f, лежаща над D_i. Нека T_{P_i} е допирателната равнина към G_f в точката P_i. Ще смятаме, че лицето на G_i е приблизително равно на лицето на съответната част от T_{P_i}; тогава, ако положим

$T_{P_i} = \alpha$ и $0xy = \beta$, по формулата за проекцията

$$\frac{\mu(D_i)}{\mu(G_i)} \approx \cos\angle\left(T_{P_i}, 0xy\right) = \cos\angle\left(\vec{N}(P_i), \vec{z}\right).$$

От формулата за скаларно произведение на вектори знаем, че $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}||\vec{a}|}$. Лесно се вижда, че $\left\langle\vec{N}(P_i), \vec{z}\right\rangle = 1$. Оттук пресмятаме, че

$$\cos\angle\left(\vec{N}(P_i), \vec{z}\right) = \frac{1}{\left|\vec{N}(P_i)\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}}$$

и следователно

$$\mu(G_i) \approx \sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}\,\mu(D_i).$$

Оттук

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i) \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'_x(P_i)^2 + f'_y(P_i)^2}\,\mu(D_i).$$

Чрез граничен преход при $\operatorname{diam}\tau \to 0$ получаваме исканата формула:

Теорема 7. *Лицето на графиката G_f на функцията $f(x,y)$ е равно на*

$$\mu(G_f) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2}\,dxdy.$$

Забележка. Даденият по-горе извод на формулата се базира на интуитивни съображения; точната дефиниция на лице на повърхност, и извод на формулата като частен случай от много по-обща формула, ще бъдат дадени в следващата част.

Лице на ротационна повърхност. Нека, както по-горе, ротационното тяло V_φ е породено от въртенето на еднократно гладката в интервала $[a,b]$ функция $\varphi(x) \geq 0$. Нека с S_φ означим ограничаващата V_φ повърхност, породена от въртенето на графиката на $\varphi(x)$:

$$S_\varphi = \left\{(x,y,z) : a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = \varphi^2(x)\right\}.$$

Нека означим с S_φ^+ горната половина на S_φ, т.е. частта, е която $z \geq 0$. Тогава S_φ^+ може да се представи като графика на функцията

$$z = f(x, y) = \sqrt{\varphi^2(x) - y^2},$$

определена в криволинейния трапец

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\varphi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}.$$

Имаме

$$f'_x(x, y) = \frac{\varphi'(x)\varphi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + (f'_x)^2 + \left(f'_y\right)^2} = \frac{\sqrt{\varphi^2(x)\left(1 + \varphi'(x)^2\right)}}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}.$$

По формулата за лице на графиката получаваме

$$\mu(S_\varphi) = 2\mu(S_\varphi^+) = 2\int_a^b \sqrt{\varphi^2(x)\left(1 + \varphi'(x)^2\right)} \left(\int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \frac{dy}{\sqrt{\varphi^2(x) - y^2}}\right) dx.$$

Лесно се пресмята (чрез субституцията $y = c\,\sin t$), че $\int\limits_{-c}^{c} \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \pi$ независимо от стойността на $c > 0$, и следователно

$$\boxed{\mu(S_\varphi) = 2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx.}$$

Пример. Ще намерим лицето на сфера S_R с радиус R. В този случай $\varphi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$. Имаме

$$\sqrt{1 + \varphi'(x)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и следователно

$$\mu(S_R) = 2\pi \int_{-R}^{R} R\, dx = 4\pi R^2.$$

Първа теорема на Гулдин. Нека D е измеримо множество в равнината Oxy, ограничено от частично гладката крива Г. Нека S_Γ е повърхнината, породена от въртенето на Г около оста x. Първата теорема на Гулдин гласи, че

$$\mu\left(S_\Gamma\right) = 2\pi y_*(\Gamma).l(\Gamma),$$

където $l(\Gamma)$е дължината на кривата Г, а $y_*(\Gamma)$ е y-координатата на центъра на тежестта на Г, разгледана като еднородна материална крива.

Въпроси за самопроверка.

1. Дайте формулите за лице на криволинеен трапец и обем на криволинеен цилиндър.

2. Формулирайте принципа на Кавалиери за обем на тяло.
3. Дайте определение на ротационно тяло. Пресметнете обема му чрез принципа на Кавалиери.

4. Дайте формулите за маса и център на тежестта на материална фигура (в $\mathbb{R}^2$) и материално тяло (в $\mathbb{R}^3$).

5. Намерете координатите на центъра на тежестта на хомогенен криволинеен трапец и на хомогенен криволинеен цилиндър. Тук думата "хомогенен"означава, че плътността навсякъде е равна на единица.)

6. Дайте формула за лицето на повърхност, представена като графика на функцията на две променливи $f(x, y)$.

7. Дайте формула за лицето на околната повърхнина на ротационно тяло.

7. Нека е даден пресечен конус с радиус на едната основа R, на другата r, с височина h и образуваща $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$. Представете го като ротационно тяло и намерете неговия обем и лицето на околната му повърхнина.

Азбучен указател

Съдържание