Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Материали към курса

УВОД ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНИЯ АНАЛИЗ

София

Дадени са основните дефиниции, формулировките на теоремите и доказателствата на някои от тях. След всеки въпрос има набор от задачи. Част от задачите са почти тривиални упражнения, други представляват примери към теоремите или проверяват съществеността на условията в тях, трети дават допълнителна и съществена информация. Част от трудните задачи са снабдени с упътване. Формулирани и няколко теореми (снабдени с препратки към литературата), които имат връзка с разглежданата тема.

Тези материали **не** заместват учебниците по функционален анализ. Напротив, те са снабдени с препратки към няколко препоръчвани учебника. Нещо повече, надявам се, че те ще са полезни при създаването на навици са самостоятелна работа с литературата.

В тези материали има пропуски, неясно изложени фрагменти и (за съжаление) грешки. Моля, отбелязвайте ги, за да ги отстраня.

Успех!
петък, 13.10.2006 *Н. Буюклиев*

Конспект към УВОД ВЪВ ФУНКЦИОНАЛНИЯ АНАЛИЗ

1. Нормирани пространства. Пространства и факторпространства. Примери.

2. Хилбертови пространства. Теорема за проекциите.

3. Метрични пространства. Теореми за пълни метрични пространства

4. Компактни множества. Еквивалентни условия.

5. Теорема на Арцела́- А́сколи.

6. Ограничени линейни оператори и функционали. Норма на оператор.

7. Обратими оператори. Спектър и резолвента.

8. Теорема на Банах-Щайнхауз. Силна сходимост.

9. Теорема на Хан-Банах.

10. Спрегнати пространства и оператори, второ спрегнато пространство, слаба сходимост

11. Общ вид на линейните функционали в някои функционални пространства.

12. Теорема за отвореното изображение. Теорема за обратния оператор.

13. Оператори в хилбертово пространство.

14. Компактни оператори. Основни свойства.

15. Спектрална теорема за компактни самоспрегнати оператори

16. Алтернатива на Фредхолм.

17. Интегрални оператори. Оператори на Волтера.

18. Оператори на Хилберт-Шмидт.

19. Линейни интегрални уравнения. Уравнения с изродени ядра.

20. Спектрална теорема за самоспрегнати оператори (обзор).

22.1.2014 Н. Буюклиев

1. Нормирани пространства. Подпространство и факторпространство. Банахови пространства. Примери.

... а в задните редове играеха на функционален морски бой в банахови пространства. *Аркадий и Борис Стругацки*

Определение. Нека в линейното пространство X (с поле от скалари $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) е дефинирана функция $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяваща аксиомите:
1. $\|x\| \geq 0$, за $\forall x \in X$, при това $\|x\| = 0$, точно когато $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, за $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (или $\forall \lambda \in \mathbb{C}$).
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, за $\forall x, y \in X$.
Такава функция ще наричаме норма, а X - нормирано пространство над полето $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

• ε-околност на точка $\mathbb{O}(x, \varepsilon)$, отворено подмножество, затворено подмножество.
• Факторпространство, $x + A$, $A + B$.
• Фундаментална редица, сходяща редица, банахово пространство.
• Непрекъснатост, $\| \ \|$ е непрекъсната функция.

Определение. Нека X е нормирано и Z е затворено подпространство. Норма във факторпространство X/Z дефинираме с формулата:
$\|x + Z\|_{X/Z} = \inf\limits_{z \in Z} \|x + z\|$.

Теорема. Нека X е нормирано и Z е затворено подпространство. Тогава Z и X/Z са нормирани. □

Теорема. Нека X е банахово и Z е затворено подпространство.
Тогава Z и X/Z са банахови.

Доказателство: Ще докажем, че X/Z е банахово.
(1) Нека $\widetilde{x}_n = x_n + Z$ и $\{\widetilde{x}_n\}$ е фундаментална в X/Z редица.
(2) БОО смятаме, че $\{\widetilde{x}_n\}$ е бързо фундаментална т.е. $\|\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n\| < \dfrac{1}{2^n}$, (преминавайки към подредици). Тогава $\sum_{n=2}^{\infty} \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}\| < \infty$.
(3.1) От дефиницията на норма в X/Z следва, че $\forall x \in X \quad \exists y \in \widetilde{x} = x + Z$,
така че $2\|\widetilde{x}\| > \|y\|$.
(3.2) По този начин за всяко $\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}$ избираме $y_n \in \widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}$,
така че $2\,\|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_{n-1}\| > \|y_n\|$.
(4) Имаме, че $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$ е сходящ, следователно $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ е сходящ. Нека $s = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ и $\widetilde{s} = s + Z$.
(5) От дефиницията на y_n в (3.2) следва, че $s_n = \sum_{k=1}^{n} y_k \in \widetilde{x}_n$, откъдето $\|\widetilde{s} - \widetilde{x}_n\| \leq \|s - \sum_{k=1}^{n} y_k\| \to 0$; следователно $\widetilde{x}_n \xrightarrow{\| \ \|} \widetilde{s}$ и X/Z е пълно. □

• (Теорема на Ф. Рис за почти перпендикуляра)
Нека X е нормирано и Z е негово затворено подпространство, $Z \neq X$.
Тогава $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X$: $\|x\| = 1$ и $d(x, Z) = \inf_{z \in Z} \|x - z\| > 1 - \varepsilon$. □
Препоръчвана литература: [ЛюстСоб 57-82, примери 20-33]

Примери.
$X = \mathbb{R}$. Норма на $x \in \mathbb{R}$ се дава с $\|x\| = |x|$.
$X = \mathbb{C}$. Норма на $z = x + iy \in \mathbb{C}$ се дава с $\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
$\left(\mathbb{R}^n, || \, ||_p\right)$ където $1 \leq p \leq \infty$; По-подробно, за $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \; ;$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \; ;$$

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 < p < \infty \; ;$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} \; .$$

Сходимостта, спрямо всяка от тези норми съвпада с покоординатната сходимост.

$C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ – непрекъсната$\}$, $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$;
$M[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ – ограничена$\}$, $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$;
$l^1 = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ и $||x||_1 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right)$
$l^p = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ и $||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, където $1 < p < \infty$.

Пространствата $C[0,1]$**,** $M[0,1]$

Задача 1.1. Нека $M[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ –ограничена$\}$ и $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

а) Докажете, че $M[0,1]$ е нормирано пространство.
б) Докажете, че $M[0,1]$ е пълно нормирано (банахово) пространство.
в) Докажете, че ако $\{f_n\}$ е редица в $M[0,1]$ и $f_n \xrightarrow{\| \, \|_\infty} f_0$, то $f_n \to f_0$ поточково, т.е. $\forall x \; f_n(x) \to f_0(x)$. (Това свойство служи за откриване на кандидатите за равномерна граница.)

г) Докажете, че $f_n \xrightarrow{\| \, \|_\infty} f_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n - f_0| = 0$ (Критерий дали намереният във в) кандидат е действително равномерна граница).

Задача 1.2. $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ – непрекъсната$\}$ и $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Докажете, използвайки теоремата на Вайерщрас (равномерна граница на непрекъснати функции, дефинирани в компакт е непрекъсната функция), че $C[0,1]$ е затворено подпространство на $M[0,1]$ и следователно е банахово пространство.

Задача 1.3. Пресметнете нормата на елемента $x^{(n)}$; сходяща ли е редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ във всяко от пространствата $M[0,1]$, $C[0,1]$, ако:
а) $x^{(n)}(t) = t^n$;
б) $x^{(n)}(t) = t^n - t^{n+1}$;
в) $x^{(n)}(t) = (n+1)(t^n - t^{n+1})$.

Пространствата l^p, $1 \le p \le \infty$

Задача 1.4. По дефиниция $l^1 = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ и $||x||_1 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right)$.
а) Докажете, че l^1 е нормирано пространство.
б)* Докажете, че l^1 е банахово пространство.

Задача 1.5. По дефиниция $l^p = \{x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ и $||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, където $1 < p < \infty$.
Докажете, че l^p е нормирано пространство.
Упътване: Използвайте неравенството на Минковски.

Пространствата l^p, $1 < p \le \infty$ също са пълни. Пълнотата им е следствие от теорема, която ще бъде доказана по-нататък.

Задача 1.6. $l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : \sup\limits_n |x_n| < \infty\}$ и $||x||_\infty = \sup\limits_n |x_n|$.
Докажете, че l^∞ е нормирано пространство.

Задача 1.7. а) Докажете при $1 < p < q < \infty$ включванията:

$$l^1 \subsetneqq l^p \subsetneqq l^q \subsetneqq l^\infty$$

б) $\bigcup\limits_{p \in [1,\infty)} l^p \subsetneqq l^\infty$

Упътване: а) Проверете при кои $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p \ge 1$ редицата $\left(1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots\right) \in l^p$.
б)$(1, 1, 1, \ldots) \in l^\infty \setminus \bigcup\limits_p l^p$.

Задача 1.8. Пресметнете нормата на елемента x_n; сходяща ли е редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ във всяко едно от пространствата l_p, $1 \le p \le \infty$, s, ако:
а) $x_n = (1, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ (n на брой ненулеви координати);
б) $x_n = (\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
в) $x_n = (1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
г) $x_n = (1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots, \frac{1}{2^{n\alpha}}, 0, 0, \ldots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нека X е нормирано пространство. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ с елементи $x_n \in X$ наричаме абсолютно сходящ, ако е сходящ реда $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Задача 1.9. Докажете, че ако X е банахово, то всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.

Задача 1.10. Докажете, че в нормирано пространство
а) от всяка сходяща редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to x_0$, можем да изберем бързо сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (т.е. със свойството $\|x_{n_k} - x_0\| < \frac{1}{2^k}$).

б) от всяка фундаментална редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$можем да изберем бързо фундаментална подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (т.е. със свойството $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \dfrac{1}{2^k}$).

Задача 1.11. а) Докажете, че ако $x_n \to x_0$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$.
б) Нека $f \in C_0(\mathbb{R})$, f е ненулева и $f_n(x) = f(x+n)$. Докажете, че редицата $\{f_n\}$ не е сходяща.
Упътване: *а) Твърдението изразява факта, че нормата е непрекъсната функция. Направете разсъждение, основано на $\varepsilon - \delta$ дефиницията.*
б) Поточковата граница на $\{f_n\}$ е нулевата функция, следователно тя е единственият кандидат за равномерна граница. Нормата на нулевата функция обаче е 0, а $\|f_n\| = \|f\|$. □

Хомеоморфизъм е биекция (еднозначни и обратимо съответствие) f, за която f и f^{-1} са непрекъснати.

Задача 1.12. а) Докажете, че събирането е непрекъсната функция на 2 променливи. В частност, транслациите $x \mapsto x + a$ (a – фиксиран елемент на X) са хомеоморфизми.
б) Докажете, че умножението с константа е непрекъсната функция на 2 променливи. В частност, хомотетиите $x \mapsto \lambda x$ ($\lambda \neq 0$ – фиксиран скалар) са хомеоморфизми.

Задача 1.13. Нека X е нормирано и Z е негово линейно подпространство, което е пълно. Тогава Z е затворено в X.

Задача 1.14. (Теорема на Ф. Рис за почти перпендикуляра)
Нека X е нормирано и Z е негово затворено подпространство, $Z \neq X$.
Тогава $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X$: $\|x\| = 1$ и $d(x, Z) = \inf_{z \in Z} \|x - z\| > 1 - \varepsilon$.

Решение: Избираме произволен $x_1 \in X \setminus Z$ и нека $d = d(x_1, Z)$; $d > 0$. При $\varepsilon \in (0,1)$ имаме, че $d < \dfrac{d}{1-\varepsilon}$ и от определението на inf следва, че съществува $z_1 \in Z$, така че $\|x_1 - z_1\| < \dfrac{d}{1-\varepsilon}$. Избираме $x = \dfrac{x_1 - z_1}{\|x_1 - z_1\|}$ и за него ще докажем твърдението. Очевидно $\|x\| = 1$, освен това

$$d(x, Z) = \inf_{z \in Z} \left\| \frac{x_1 - z_1}{\|x_1 - z_1\|} - z \right\| = \frac{1}{\|x_1 - z_1\|} \inf_{z \in Z} \big\| x_1 - z_1 - z\|x_1 - z_1\| \big\|.$$

Съобразяваме, че когато z пробягва Z, то и $z_2 = z_1 + z\|x_1 - z_1\|$ пробягва Z.

$$d(x, Z) = \frac{1}{\|x_1 - z_1\|} \inf_{z_2 \in Z} \|x_1 - z_2\| > \frac{1-\varepsilon}{d}\, d = 1 - \varepsilon.$$

Допълнение: Класическите неравенства на Юнг, Хьолдер и Минковски

Определение. Казваме, че числата $p > 1$ и $q > 1$ са спрегнати показатели, ако $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема. (Неравенство на Юнг). Нека $a > 0$, $b > 0$, и $p > 1$ и $q > 1$ са спрегнати показатели. Тогава

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Равенство се достига само когато $a^p = b^q$

Доказателство: Делим на b^q: $\quad ab^{1-q} \leq \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q}$.

Съобразяваме, че $\left(a^p b^{-q}\right)^{\frac{1}{p}} = ab^{\frac{-q}{p}} = ab^{1-q}$.

(Последното равенство използва, че $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, следователно $\frac{-q}{p} = 1 - q$).

Полагаме $t = ab^{1-q}$. Тогава $a^p b^{-q} = t^p$. Трябва да докажем, че $t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}$.

Разглеждаме функцията $g(t) = \frac{t^p}{p} - t + \frac{1}{q}$.

$g' = t^{p-1} - 1$; $g' < 0$ в $(0, 1)$; $g' > 0$ в $(1, \infty)$.

Следователно g има глобален минимум при $t = 1$, $g(1) = 0$; оттук $g \geq 0$. □

Теорема. (Неравенство на Хьолдер). Нека $a_i > 0$, $b_i > 0$, за $i = 1, \ldots n$, и p и q са спрегнати показатели. Тогава

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Равенство се достига само когато $\exists\, C$, така че $a_i^p = C b_i^q, \quad i = 1, \ldots n$.

Доказателство: Неравенството е хомогенно по всеки един от наборите $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, затова полагаме:

$A_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$, $B_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$. Имаме $\sum_{i=1}^{n} A_i^p = 1$, $\sum_{i=1}^{n} B_i^q = 1$.

За $i = 1, \ldots n$ по Юнг: $\quad A_i B_i \leq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}$.

Сумираме: $\sum_{i=1}^{n} A_i B_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Връщаме се в стари променливи:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1.$$

Освобождаваме се от знаменателите и добиваме желаното. □

Теорема. (Неравенство на Минкòвски).
Нека $a_i > 0,\ b_i > 0$, за $i = 1, \dots n$, и $p > 1$. Тогава

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Равенство се достига само когато $\exists\, C$, така че така че $a_i^p = Cb_i^q, \quad i = 1, \dots n$.
Доказателство: Стартираме с

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1} \leq$$

Нека q е спрегнатия на p показател, прилагаме Хьолдер:

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Непосредствено се проверява, че $(p-1)q = p$. Преписваме:

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p}\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p}\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Съкращаваме началния и крайния израз на $\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{q}}$ и получаваме търсеното.

□

Задача 1.15. Замествайки положителните числа в неравенствата с модули на реални числа, формулирайте и обосновете аналози в $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$, l_p, $C([a, b])$.

2. Хилбертови пространства. Свойства. Примери

Определение. Нека в линейното пространство H с поле от скалари $\mathbb{C}$ е дефинирана функция на две променливи $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{C}$, удовлетворяваща аксиомите:
1. $(f, f) \geq 0, \quad \forall f \in H; \quad (f, f) = 0$ точно когато $f = 0$.
2. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h), \quad \forall\, f, g, h \in H$.
3. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g), \quad \forall\, f, g \in H,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.
4. $(f, g) = \overline{(g, f)}$ [1], $\quad \forall\, f, g \in H$.

Такава функция ще наричаме скаларно произведение, а H - предхилбертово пространство над полето $\mathbb{C}$. (Тривиални изменения в аксиомите дефинират реално предхибертово пространство.)
Означаваме $\sqrt{(f, f)}$ с $\|f\|$. (По-долу е доказано, че по този начин в H се дефинира норма.)

• Правило на успоредника: $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,\ \forall f, g \in H$.
• Ортогоналност: $f \perp g \ \Leftrightarrow\ (f, g) = 0$.

Теорема. (Неравенство на Коши-Буняковски). Нека H е предхилбертово и $f, g \in H$. Тогава $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$.
Равенство се достига точно когато f и g са колинеарни.

Доказателство: Избираме f и g – произволни елементи на H.

$$(f + \lambda(f, g)g, f + \lambda(f, g)g) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \lambda^2|(f, g)|^2(g, g) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Квадратен тричлен (на λ) е неотрицателен точно когато дискриминантата $D \leq 0$, т.е. когато $|(f, g)|^2 - (f, f)(g, g) \leq 0$. □

Теорема. Нека H е предхилбертово. $\|f\| =: \sqrt{(f, f)}$ е норма в H.

Доказателство: Чрез неравенството на Коши-Буняковски.

• Поляризационно тъждество: $4(f, g) = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2$.
• Непрекъснатост на скаларното произведение.
• $A^\perp$. $A^\perp$ е затворено линейно подпространство на H.

Определение. Пълно по отношение на нормата предхибертово пространство наричаме хилбертово.

Теорема. Нека H е хилбертово и G е затворено подпространство. Тогава за всеки $f \in H$ е съществува представяне $f = g + h$, където $g \in G$ и $h \in G^\perp$. Това представяне е единствено.

Доказателство: Съществуване на представянето.
1. Нека $d = d(f, G) = \inf\limits_{g \in G} \|f - g\|$.
2. Ако $d = 0$, то $f \in G$ и $h = 0$. Затова ще смятаме, че $d > 0$.

[1] Тук $\overline{(g, f)}$ означава комплексно спрегнатото на числото (f, g).

3. Избираме редица $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че $g_n \in G$, $\|f - g_n\| \to d$.
4. По правилото на успоредника
$2\|f - g_m\|^2 + 2\|f - g_n\|^2 = \|2f - g_m - g_n\|^2 + \|g_m - g_n\|^2$. Преобразуваме:

$2\|f - g_m\|^2 + 2\|f - g_n\|^2 = 4\|f - \dfrac{g_m + g_n}{2}\|^2 + \|g_m - g_n\|^2$.
5.1. Оценка на израза отляво: $\|f - g_n\| \to d$, $\|f - g_n\|^2 \to d^2$, следователно
$\|f - g_m\|^2 < d^2 + \varepsilon$, $\|f - g_n\|^2 < d^2 + \varepsilon$ за достатъчно големи m и n.
5.2. Оценка на израза отдясно: $\dfrac{g_1 + g_2}{2} \in G$, от (1) следва, че
$\|f - \dfrac{g_1 + g_2}{2}\|^2 > d^2$.
6. Оценяваме в (4): $4d^2 + 4\varepsilon > 4d^2 + \|g_m - g_n\|^2$. Следва, че $\{g_n\}$ е фундаментална, от пълнотата на G тя е сходяща.
Полагаме $\lim g_n = g$, $\lim(f - g_n) = h$. От затвореността на G следва, че $g \in G$, имаме също, че $\lim \|(f - g_n)\| = \|h\|, \lim \|(f - g_n)\| = d \Rightarrow \|h\| = d$.
Сега ще докажем, че $h \perp G$.
7. Избираме произволни $g' \in G$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.
7.1. Според (1) $\|f - (g - \lambda g')\| \geq d \Rightarrow \|(f - g) - \lambda g'\| \geq d \Rightarrow$
$\|h - \lambda g'\|^2 \geq d^2 \, \forall g' \in G, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
7.2. $\|h - \lambda g'\|^2 = \|h\|^2 + \lambda(g', h) + \overline{\lambda}(h, g') + |\lambda|^2 \|g'\|^2$ и $\|h\|^2 = d^2$.
Сравняването на (7.1) и (7.2) дава
$\lambda(g', h) + \overline{\lambda}(h, g') + |\lambda|^2 \|g'\|^2 \geq 0 \ \forall g' \in G, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
7.3. Избираме $\lambda = (h, g')t$, $f \in \mathbb{R}$.
Тогава $2|(h, g')|^2 t + |(h, g')|^2 \|g\|^2 t^2 \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Но квадратна функция $at^2 + bt$ може да е неотрицателна за всяко $t \in \mathbb{R}$ само когато $b = 0$. Оттук $(h, g') = 0$.

Единственост на представянето: с допускане на противното.

• Пълна система.

Теорема. Нека H е сепарабелно хилбертово пространство и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ е пълна ортонормирана система в H. Тогава за всяко $f \in H$ е в сила $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) e_n$, т. е. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ е базис в H.
При това $\|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2$ и $(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) \overline{(g, e_n)}$. □

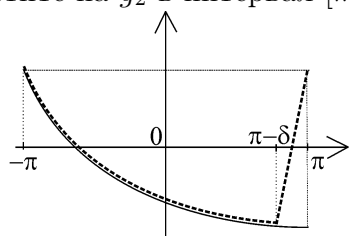
• Стандартна тригонометрична система в $L^2[-\pi,\pi]$ наричаме фамилията
$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ n=1,2,3,\ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ n=1,2,3,\ldots\}$

Теорема. Стандартна тригонометрична система е база на $L^2[-\pi,\pi]$.

Доказателство: Ще смятаме,че $f\in L^2[-\pi,\pi]$ и f е ортогонална на стандартната тригонометрична система. Ще докажем, че $f \underset{\text{п.н.}}{=} 0$. Ще направим това, като обосновем, че $\int_{-\pi}^{\pi} fgdx=0,\ \forall g\in L^2[-\pi,\pi]$.

1. Нека g_1 е непрекъсната и $g_1(-\pi)=g_1(\pi)$. Ще докажем, че $\int_{-\pi}^{\pi} fg_1dx=0$.
За разглежданата g_1 и $\varepsilon>0$ по теоремата на Вайерщрас съществува тригонометричен полином P, така че $\|g_1-P\|_\infty<\varepsilon$. За всеки тригонометричен полином P е в сила $\int_{-\pi}^{\pi} fPdx=0$.
Тогава $\int_{-\pi}^{\pi} fg_1dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(g_1-P)dx+\int_{-\pi}^{\pi} fPdx$, откъдето
$|\int_{-\pi}^{\pi} fg_1dx|=|\int_{-\pi}^{\pi} f(g_1-P)dx|\le\int_{-\pi}^{\pi}|f||(g_1-P)|dx\le\varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}|f|dx,\ \forall\varepsilon>0$.
Оттук $\int_{-\pi}^{\pi} fg_1dx=0$ за всяка непрекъсната g_1, за която $g_1(-\pi)=g_1(\pi)$.

2. Нека g_2 е произволна (без изискването $g_2(-\pi)=g_2(\pi)$) непрекъсната в $[-\pi,\pi]$ функция. Ще докажем, че $\int_{-\pi}^{\pi} fg_2dx=0$.
За разглежданата g_2 и $\varepsilon>0$ съществува g_1 – непрекъсната със свойствата $g_1(-\pi)=g_1(\pi)$ и $\|g_2-g_1\|_2<\varepsilon$. Построяването на такава g_1 може да стане с „подправяне“ на стойностите на g_2 в интервал $[\pi-\delta,\pi]$.



Отново $\int_{-\pi}^{\pi} fg_2dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(g_2-g_1)dx+\int_{-\pi}^{\pi} fg_1dx$, откъдето
$|\int_{-\pi}^{\pi} fg_2dx|=|\int_{-\pi}^{\pi} f(g_2-g_1)dx|\le\int_{-\pi}^{\pi}|f|\ |(g_2-g_1)|dx\le\|f\|_2\|g_2-g_1\|_2\le\varepsilon\|f\|_2,\ \forall\varepsilon>0$.
Оттук $\int_{-\pi}^{\pi} fg_2dx=0$ за всяка непрекъсната в $[-\pi,\pi]$ функция g_2.

3. Сега нека изберем произволна $g\in L^2[-\pi,\pi]$. Ще докажем, че $\int_{-\pi}^{\pi} fgdx=0$.
Тук ще използваме, че непрекъснатите функции са навсякъде гъсти в $L^2[-\pi,\pi]$ (по отношение на $\|\ \|_2$). За избраната g и $\varepsilon>0$ съществува непрекъсната функция g_2, така че $\|g_2-g\|_2<\varepsilon$.
Пак $\int_{-\pi}^{\pi} fgdx=\int_{-\pi}^{\pi} f(g-g_2)dx+\int_{-\pi}^{\pi} fg_2dx$
$|\int_{-\pi}^{\pi} fgdx|=|\int_{-\pi}^{\pi} f(g-g_2)dx|\le\int_{-\pi}^{\pi}|f||(g-g_2)|dx\le\|f\|_2\|g_2-g\|_2\le\varepsilon\|f\|_2,\ \forall\varepsilon>0$.
Получихме, че $\int_{-\pi}^{\pi} fgdx=0,\ \forall g\in L^2[-\pi,\pi]$. В частност това е в сила при $f=g$, оттук $f \underset{\text{п.н.}}{=} 0$. □

Следствие: Фамилията $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx},\ n\in\mathbb{Z}\}$ е база на $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$. □

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб, 83-93], [Сад, 107-133], [Прод-I, 245-275].

Задача 2.1. Да се провери верността на *правилото на успоредника* в хилбертово пространство H:
$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2,\ \forall\, f, g \in H.$

Задача 2.2. Да се провери верността на *поляризационното тъждество* в хилбертово пространство H:
$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$

Задача 2.3. Нека X е банахово пространство.
Докажете, че в X може да се дефинира скаларно произведение със свойството $(x,x) = \|x\|^2$ точно когато нормата удовлетворява правилото на успоредника:
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\ \forall\, x, y \in X.$
Упътване: Дефинирайте скаларно произведение с помощта на поляризационното тъждество.

Задача 2.4. Докажете, че в следните банахови пространства нормата не е породена от скаларно произведение:
а) $C[a,b]$;
б) l^1;
в) l^∞;
г) $L^1[a,b]$.
Упътване: Изберете конкретни елементи и проверете, че за тях правилото на успоредника не е в сила.

Задача 2.5. Нека разгледаме всички функции от вида $e^{i\lambda t}$, където параметъра $\lambda \in \mathbb{R}$ и независимата променлива $t \in \mathbb{R}$. Нека H_0 е линейната обвивка на тази фамилия, т.е. $H_0 = \{f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k t} : a_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$.
В H_0 дефинираме скаларно произведение с формулата:

$$(f,g) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

а) Проверете, че H_0 е предхилбертово пространство.
б) Докажете, че $\forall \lambda \in R \quad \|e^{i\lambda t}\| = 1$ и $\forall \lambda, \mu \in R \quad (e^{i\lambda t}, e^{i\mu t}) = \delta_{\lambda\mu}$.
в) Докажете, че H_0 е несепарабелно (т.е. не съществува изброимо навсякъде гъсто подмножество).
г) Как може да се дефинира попълнение на H_0?

Казваме, че $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ е база в банаховото пространство X с поле на скаларите K, ако за всяко $x \in X$ съществува, и то единствено представяне $x = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n,\ \ c_n \in K$.

Задача 2.6. Множеството $\{x^n\}_{n=1}^\infty$, съгласно теорема на Вайерщрас е плътно в $C[a,b]$ (т.е. линейната му обвивка е навсякъде гъста в $C[a,b]$).
Докажете обаче, че $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ **не е** база в $C[a,b]$.
Упътване: Използвайте, че според теорема на Вайерщрас равномерна граница на аналитични функции е аналитична функция.

Задача 2.7. Докажете, че множеството $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ е плътно в $L^2[a,b]$, т.е. линейната му обвивка е навсякъде гъста в $\Big(L^2[a,b], \|\ \ \|_2\Big)$.

Докажете обаче, че $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ **не е** база в $L^2[a,b]$.

Задача 2.8. Функциите $e_n(t)$ са дефинирани в интервала $[0,1]$ по следния начин: $e_n(t) = (-1)^k$ за $t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$.
Докажете, че тази фамилия функции (система на Радемахер) е ортонормална, но не е базис в $L^2[0,1]$.
Упътване: Докажете, че фамилията не е пълна, защото функцията $x(t) = t(t-1) + \frac{1}{6}$ е ортогонална на всички $e_n(t)$. $\square$

3. Метрични пространства. Теореми за пълни метрични пространства

Определение. Нека X е множество. Нека е дефинирана функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяваща аксиомите:
1. $d(x, y) \geq 0$, за $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ точно когато $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$, за $\forall x, y \in X$
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, за $\forall x, y, z \in X$.
Числото $d(x, y)$ ще наричаме разстояние между x и y; такава функция d ще наричаме метрика, а X - метрично пространство.

Предложение. Нека X е нормирано пространство.
Функцията $d(x, y)$, дефинирана с $d(x, y) = \|x - y\|$, е метрика в X; по такъв начин всяко нормирано (следователно и всяко хилбертово) пространство може да се разглежда като метрично пространство. □

• ε-околност на точка, отворено множество, затворено множество, ограничено множество, сходяща редица, фундаментална редица, пълно метрично пространство, непрекъснато изображение.
• отворено кълбо с център x_0 и радиус r: $\mathcal{O}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$.
• затворено кълбо с център x_0 и радиус r: $\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$.

Теорема (Кантор). Нека X е пълно метрично пространство. Нека $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ са затворени вложени (т.е $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$) кълба с радиуси r_n и $r_n \to 0$.
Тогава съшествува, и то точно една точка, която принадлежи на всички кълба B_n.

Определение. Нека X е метрично пространство и $f : X \to X$. Елемент $x \in X$, за който $f(x) = x$, наричаме неподвижна точка за изображението f. Казваме, че f е свиващо изображение, ако $\exists\, \alpha \in (0, 1)$, така че $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$.

Теорема (за свиващото изображение). Нека X е пълно метрично пространство и $f : X \to X$ е свиващо изображение. Тогава f има, и то единствена неподвижна точка $\widetilde{x}$.
Ако $x_1 \in X$ е произволна, то редицата $x_n = f(x_{n-1})$ е сходяща с граница $\widetilde{x}$ и $\rho(x_n, \widetilde{x}) \leq \dfrac{\alpha^n}{1 - \alpha}\, \rho(x_1, x_2)$. □

• навсякъде гъсто множество, плътно множество, сепарабелно пространство, никъде негъсто множество.

• понятие за пространство на Фреше (Зад. 2.), линейно топологично пространство.

Теорема (Бер). Нека X е пълно метрично пространство и $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима фамилия никъде негъсти подмножества на X. Тогава допълнението в X на обединението им – $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ е навсякъде гъсто в X.

(Еквивалентна формулировка: сечението на изброима фамилия отворени навсякъде гъсти подмножества на пълно метрично пространство е навсякъде гъсто.)

Доказателство: Затворената обвивка на никъде негъсто подмножество е никъде негъсто; при заменяне на F_n със $\overline{F_n}$ само увеличаваме обединението, т.е. само можем да намалим допълнението. Следователно БОО можем да предполагаме, че F_n са затворени.
1. Избираме произволно отворено $U_1 \subset X$. F_1 е никъде негъсто, значи съществува $x_1 \in U_1 \backslash F_1$. Но $U_1 \backslash F_1$ е отворено, следователно цяла околност на x_1 се включва в $U_1 \backslash F_1$. Нека $\mathcal{O}(x_1, 2r_1) \subset U_1 \backslash F_1$, където $r_1 < 1$.
Тогава $\mathcal{O}(x_1, r_1) \subset \mathcal{B}(x_1, r_1) \subset \mathcal{O}(x_1, 2r_1) \subset U_1 \backslash F_1$. Полагаме $U_2 = \mathcal{O}(x_1, r)$.
2. F_2 е никъде негъсто, значи съществува $x_2 \in U_2 \backslash F_2$. Но $U_2 \backslash F_2$ е отворено, цяла околност на x_2 се включва в $U_2 \backslash F_2$. Нека $\mathcal{O}(x_2, 2r_2) \subset U_2 \backslash F_2$, където $r_2 < \dfrac{r_1}{2}$.
Тогава $\mathcal{O}(x_2, r_2) \subset \mathcal{B}(x_2, r_2) \subset \mathcal{O}(x_2, 2r_2) \subset U_2 \backslash F_2$. Полагаме $U_3 = \mathcal{O}(x_2, r_2)$.
3. По индукция, при дефинирано вече U_n, избираме $x_n \in U_n \backslash F_n$ и $r_n < \dfrac{r_{n-1}}{2}$, така че $\mathcal{O}(x_n, r_n) \subset \mathcal{B}(x_n, r_n) \subset \mathcal{O}(x_n, 2r_n) \subset U_n \backslash F_n$.
4. Кълбата $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(x_n, r_n)$ са затворени, вложени едно в друго и $r_n \to 0$, следователно съществува x_0, така че $\{x_0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$.
5. Имаме $\mathcal{B}_n \cap F_n = \varnothing$ за всяко n. Следователно $x_0 \in U_1 \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. И така, съществува точка $x_0 \in X \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, която принадлежи на произволното отворено U_1. Следователно $X \backslash \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ е навсякъде гъсто в X. $\square$

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб, 17-56].

Задача 3.1. Нека X и Y са метрични пространства и $f : X \to Y$. Докажете, че следните условия са еквивалентни:
(i) f е непрекъсната функция.
(ii) $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ е отворено за всяко отворено $U \subset Y$.
(iii) $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$ е затворено за всяко затворено $F \subset Y$.

Задача 3.2. а) Докажете, че в метрично пространство е в сила неравенството на четириъгълника: $|\rho(x,z) - \rho(y,u)| \leq \rho(x,y) + \rho(z,u)$.
б) Изведете от него: $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leq \rho(x,y)$.

Решение: Имаме:
$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,u) + \rho(u,z)$. Прехвърляме отляво $\rho(y,u)$.
$\rho(y,u) \leq \rho(y,x) + \rho(x,z) + \rho(z,u)$. Прехвърляме отляво $\rho(x,z)$.
б) Второто неравенство на триъгълника се получава от неравенството на четириъгълника при $z = u$. □

Задача 3.3. Докажете, че метриката d в метрично пространство X е непрекъсната функция на две променливи.

Упътване: За да докажем, че функция на две променливи е непрекъсната, избираме две близки набора от променливи, например $(x,z) \in X \times X$ и $(y,u) \in X \times X$. Те са близки, ако първите им координати – x и y са близки, и ако вторите им координати – z и u са близки. Докажете, че при тези предположения и функционалните стойности $d(x,z)$ и $d(y,u)$ са близки, като използвате неравенството на четириъгълника. □

Задача 3.4. а) Нека $\mathbf{s}$ е линейното пространство на всички редици. Разглеждаме полуметриките $\rho_k(x,y) = |x_k - y_k|$. Дефинираме $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}$.
Докажете, че $\rho(x,y)$ е метрика в $\mathbf{s}$ и че аритметичните операции са непрекъснати като функции на две променливи.
б) Нека $C(D)$ е множеството на непрекъснатите в $D \subset \mathbb{R}$ функции и $\{K_n\}$ е редица от компактни подмножества на D. Дефинираме
$\rho_n(x,y) = \max_{t \in K_n} |x(t) - y(t)|$ и $\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x,y)}{1+\rho_k(x,y)}$. Докажете, че $\rho(x,y)$ е метрика в $\mathbf{s}$. Сходимостта на редица спрямо тази метрика се нарича равномерна върху компактите сходимост.

Задача 3.5. Проверете, че условието $r_n \to 0$ в теоремата на Кантор е съществено. Разгледайте метричното пространство $(\mathbb{N}, \rho)$, където $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{ако } m \neq n \\ 0, & \text{ако } m = n \end{cases}$$

Проверете, че $(\mathbb{N}, \rho)$ е пълно метрично пространство (фундаменталните редици са стационарни отнякъде). Обосновете, че множествата $B_n = B(n, 1 + \frac{1}{2n})$ са редица от затворени, вложени едно в друго кълба, но сечението им е празно.

Определение. Нека X и Y са метрични пространства. Казваме, че $f : X \to Y$ е изометрия, ако f е сюрекция и $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.

Задача 3.6. Докажете, че ако $f : X \to Y$ е изометрия, то f е биекция.

Определение. Нека X и $\widetilde{X}$ са метрични пространства. $\widetilde{X}$ наричаме попълнение на X, ако е пълно и съществува изометрия между X и навсякъде гъсто подмножество на $\widetilde{X}$.

Задача 3.7. (Попълнение на метрично пространство,
Докажете, че за всяко метрично пространство X съществува попълнение $\widetilde{X}$.
а) Нека X е метрично пространство. Нека $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ са редици в X. Казваме, че $\{x'_n\}$ е еквивалентна на $\{x''_n\}$, ако $\rho(x'_n, x''_n) \to 0$.
Докажете, че тази релация е релация на еквивалентност.
Дефинираме $\widetilde{X} = \{[x_n]$ - класовете еквивалентни помежду си редици$\}$.
б) Нека $\{x_n\} \in [x_n]$ и $\{y_n\} \in [y_n]$. Докажете, че съществува $\lim \rho(x_n, y_n)$. Обосновете, че тази граница не зависи от избора на представителите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
в) Дефинираме $\widetilde{\rho}$ в $\widetilde{X}$ с формулата $\widetilde{\rho}([x], [y]) = \lim \rho(x_n, y_n)$. Докажете, че $\widetilde{\rho}$ е метрика.
г) Докажете, че $\widetilde{X}$ е пълно пространство.
д) Дефинираме $\varphi : X \to \widetilde{X}$ с $\varphi(x) = [(x, x, x, \ldots)]$. Докажете, че φ е изометрия.
е) Докажете, че $\varphi(X)$ е навсякъде гъсто в $\widetilde{X}$. [ЛюСо, стр. 33-39])

Още за свиващи изображения и неподвижни точки

Типична теорема за неподвижната точка е следната. Тънка гумена повърхност, обгръщаща сфера, се подлага на деформация без разкъсвания и залепвания. Да допуснем, по-нататък, че никаква точка P не се премества в положение P', диаметрално противоположно на изходното. Теоремата тогава твърди, че трябва да съществува поне една неподвижна точка (т.е. такава P, за която P' – образа на P – съвпада с P).

Любителят, вероятно, ще се съгласи, че това е изящно твърдение (математикът ще го нарече красиво). Трудно е обаче да очакваме, че любителят може да си представи колко неочаквани резултати (например в небесната механика) има тази важна и сама по себе си теорема. Важността плюс простотата (има се предвид простотата на резултата), поставят теоремите за неподвижната точка на много високо място. С въпроса за доказателствата, обаче, ние не сме започнали да се занимаваме. Най-напред тези доказателства не е лесно да бъдат изнамерени; Поанкаре, който пръв е въвел самото понятие неподвижна точка, въпреки че е формулирал някои теореми, давайки си пълен отчет за тяхната перспективна значимост, нищо не е доказал.

Д. Литлууд

Определение. Нека X е пълно метрично пространство. Нека $f, g : X \to X$. Казваме, че f и g комутират, ако $f(g(x)) = g(f(x))$, за всяко $x \in X$.

Задача 3.8. Нека X е пълно метрично пространство. Нека $f, g : X \to X$, g е свиващо, и f и g комутират.
Означаваме с x_0 неподвижната точка на g (тя е единствена) и нека $y_0 = f(x_0)$. Докажете, че x_0 е неподвижна точка за f. Единствена ли е тя?

Задача 3.9. Нека X е пълно метрично пространство и за $f : X \to X$ да съществува n, така че $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ е свиващо изображение. Докажете, че f има неподвижна точка. Докажете, че тя е единствена.

Задача 3.10. а) Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е зададена с $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x + x$. Проверете за $f(x)$, че за всеки $x, y \in \mathbb{R}$ е в сила $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, но $f(x)$ няма неподвижна точка (т.е. условието $\exists \alpha \in (0,1) : |f(x) - f(y)| < \alpha |x - y|$ е съществено).
б) Нека $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ е зададена с $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Проверете за $f(x)$, че за всеки $x, y \in [1, \infty)$ е в сила $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, но $f(x)$ няма неподвижна точка.

Задача 3.11. Нека $X = (0, 1]$ и $f : X \to X,\ f(x) = \dfrac{x}{2}$. Докажете, че това изображение няма неподвижна точка. Проверетете, че всички условия на теоремата са в сила, с изключение на пълнотата на пространството $X = (0, 1]$ (т.е. пълнотата на пространството X е съществена).

Теорема на Бол-Брауер

• Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ са $n+1$ точки в $\mathbb{R}^n$, така че $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ са линейно независими. Множеството

$$\Big\{x : x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, \text{ където } \lambda_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\Big\}$$

наричаме *симплекс* в $\mathbb{R}^n$.

Теорема. Непрекъснато изображение на симплекс в $\mathbb{R}^n$ в себе си има *поне* една неподвижна точка. ([ЛюСо, стр.510-515])

4. Компактни множества. Еквивалентни условия.

Нека X е пълно метрично пространство, $K \subset X$.

Определение. Казваме, че K е компактно, ако за всяка редица от елементи на K съществува сходяща в K подредица.

Теорема. (Вайерщрас) Нека K е компактно и $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Тогава:
а) f е ограничена;
б) f достига най-голямата си стойност. □

Теорема. Нека K е компактно, Y е метрично и $f : K \to Y$ е непрекъсната функция.
Тогава $f(K) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ за някое } x \in K\} \subset Y$ е компактно множество.
□

Определение. Отворено покритие, подпокритие, крайно подпокритие.

Определение. Центрирана система.

Определение. ε-мрежа.

Теорема. (Кантор) Нека K_1 е компактно и $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots$, и K_i са затворени и непразни. Тогава $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$

Идея на доказателството. За всяко $i \in \mathbb{N}$ избираме $x_i \in K_i$. Избираме сходяща подредица. Нейната граница е в сечението.

Ще разгледаме няколко условия, които могат да се наложат върху K:

[редици] за всяка редица от елементи на K съществува сходяща в K подредица; (Това условие е прието за дефиниция на компактно множество в метрично пространство)

[покрития] от всяко отворено покритие на K може да се избере крайно подпокритие;

[центрирани системи] всяка центрирана система има непразно сечение;

[ε-мрежи] за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна ε-мрежа и K е затворено.

Теорема. Горните четири условия са еквивалентни.

Доказателство: [ЛюстСоб, 231-237] □

• Предкомпактно A: затворената му обвивка $\overline{A}$ е компактно множество.

Следствие: Нека $A \subset X$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна ε-мрежа. Тогава A е предкомпактно.

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб, 226-239], [Кели, 125-129].

Задача 4.1. Ако $K = [a, b]$ е затворен интервал в $\mathbb{R}$, то K е компактно. По-общо, ако K е затворено и ограничено в $\mathbb{R}^n$, то K е компактно. В частност, в крайномерно пространство единичното кълбо $\mathcal{B}(0, 1)$ е компактно. Ако X_0 е крайномерно подпространство на нормирано пространство X и ако K е затворено и ограничено подмножество на X_0, то K е компактно.

Задача 4.2. а) Нека H е безкрайномерно хилбертово пространство. Докажете, че единичното кълбо $\mathcal{B}(0, 1)$ в H **не** е компактно.
б) Нека X е безкрайномерно нормирано пространство. Докажете, че единичното кълбо в X **не** е компактно.

Упътване: а) Избираме $K = \mathcal{B}(0, 1)$ – затвореното единично кълбо в H. Нека $\{e\}_{n=1}^{\infty}$ е ортонормирана система в H. За произволни $m \neq n$ имаме $d(e_m, e_n)^2 = \|e_m - e_n\|^2 = \|e_m\|^2 + \|e_n\|^2 = 1 + 1 = 2$. Ако допуснем, че от редицата $\left\{\frac{e_n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ може да се избере сходяща подредица, ще достигнем до противоречие с фундаменталността на тази подредица. Следователно единичното кълбо $\mathcal{B}(0, 1)$ в H не е компактно.
б) постройте сходна редица за нормирано пространство, използвайки теоремата на Рис за почти перпендикуляра.

Задача 4.3. Докажете, че $A \subset X$ е предкомпактно, точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува компактна ε-мрежа.

Теорема на Бер

Логиката понякога ражда монстри. От половин век наблюдаваме как изниква тълпа от странни функции, които, изглежда, се стремят да приличат колкото е възможно по-малко на честните функции, които служат на някаква цел. Няма вече непрекъснатост, или пък я има, но без производни и т.н. Нещо повече, от логическо гледище тези странни функции са най-общите, а онези, които срещаш, без да си ги търсил, вече не са нищо повече от един частен случай. За тях остава само един малък ъгъл.

Досега, когато се изобретяваше нова функция, това бе с практическа цел; днес те се изобретяват изключително за да направят погрешни разсъжденията на бащите ни, без да може да се получи нещо повече.

Ако логиката беше единственият ръководител на педагога, би било необходимо да се започва с най-общите функции, т.е. със най-странните. И именно на начинаещия щеше да се падне да се оправя в този тератологичен музей...

А. Поанкаре

Задача 4.4. а) Нека X е топологично пространство. Докажете, че $A \subset X$ е никъде негъсто точно когато $\overline{A}$ няма вътрешна точка.
б) Нека $A \subset X$ е никъде негъсто. Докажете, че $\overline{A}$ е също никъде негъсто.

Задача 4.5. Докажете, че ако X е пълно метрично пространство и $\{F_n\}_1^\infty$ е фамилия от затворени подмножества на X, такива че $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$, то някое от тях има непразна вътрешност.

Задача 4.6. Да се докаже, че $\mathbb{R}$ е неизброимо.
Упътване: Обосновете, че едноточковите множества са затворени и никъде негъсти.

В [Титчмарш, 360-363] *са приведени исторически първите примери за непрекъснати функции, които не са диференцируеми за всяко* $x \in [0,1]$*:*

- *примерът на Вайерщрас:* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos(a^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$;
- *примерът на Ван-дер-Варден:* $f(x) = \sum\limits_{1}^{\infty} f_n(x)$, *където* $f_n(x)$ *е разстоянието между* x *и най-близката точка от вида* $\dfrac{m}{10^n}$, m *– цяло.*

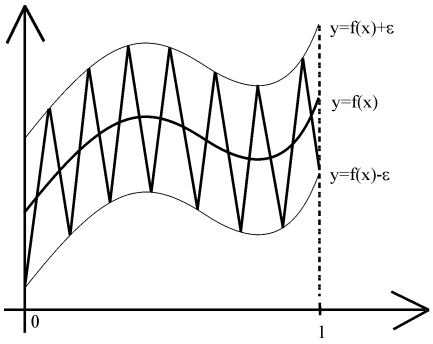
Следващата задача не дава конкретни примери; тя обаче дава информация за количеството на никъде недиференцируемите функции – те са голяма беровска категория.

Задача 4.7. Да се докаже, че съществува непрекъсната функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, която няма производна за всяко $x \in [0,1]$. Множеството на функциите с тези свойства е голяма беровска категория.
Упътване: Нека

$$A_n = \{f \in C[0,1] : \exists x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \, \forall \delta \in (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow |\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}| \leq n\}$$

$$B_n = \{f \in C[0,1] : \exists x \in [\frac{1}{n}, 1] \, \forall \delta \in (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow |\frac{f(x-\delta) - f(x)}{\delta}| \leq n\}.$$

Докажете, че:
• A_n и B_n са затворени;
• ако f има лява (дясна) производна в поне една точка, то съществува k, така че $f \in A_k$ ($f \in B_k$);



• A_n и B_n са никъде негъсти, като обосновете, че за всяка f съществува близка до f непрекъсната частично линейна функция, която е съставена от отсечки с по-голям от n ъглов коефициент.

Задача 4.8. Нека H е безкрайномерно хилбертово пространство. Във всяко линейно пространство съществува максимална линейно независима система от вектори (базис на Хамел). Възможно ли е тази система да е изброима?

Упътване: Допуснете, че съществува изброим базис на Хамел – $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека H_n е крайномерното линейно пространство с базисни вектори $e_1, \ldots, e_n$. Всяко от пространствата H_n е никъде негъсто (докажете). Тяхното обединение е цялото H (докажете), което противоречи на теоремата на Бер.

Втора идея. Всяко безкрайномерно хилбертово пространство съдържа подпространство, изоморфно на l^2 (докажете), от друга страна векторите в l^2 от вида $(1, t, t^2, t^3, \ldots)$, където $t \in (0,1)$ образуват линейно независимо множество с мощността на континуума (докажете). □

Задача 4.9. ** Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има производни от произволен ред във всяка точка. Нека за всяко $x \in \mathbb{R}$ съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $f^{(n)}(x) = 0$. Да се докаже, че f е полином.

Задача 4.10. (вариант на теоремата на Бер, [Кели, стр.179])
Нека X е локално компактно регулярно топологично пространство и $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима фамилия никъде негъсти подмножества на X. Тогава допълнението в X на обединението им – $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ е навсякъде гъсто в X.

Упътване: Топологично пространство е регулярно, ако за всяко x, и всяка отворена околност U_x на x съществува отворена околност V_x на x, така че $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_x$. В доказателството за пълно метрично пространство заменете редицата вложени кълба с подходяща центрирана система от затворени.

5. Теорема на Арцела-Асколи.

Обсъжда се въпросът за компактност на подмножество $\mathcal{A}$ на $(C(X), \| \|_\infty)$, при предположение, че самото X е компактно.

Определение. Казваме, че $\mathcal{A} \subset C(X)$ е равномерно ограничено, ако
$\exists M \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|f\| \leq M$.

Определение. Казваме, че $\mathcal{A}$ е равностепенно непрекъснато, ако
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall f \in \mathcal{A}$, $\forall (x', x'' : d(x', x'') < \delta) \;\Rightarrow\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема. (Арцела́-Áсколи) Нека X е компактно метрично пространство и $\mathcal{A}$ е затворено подмножество на $(C(X), \| \|_\infty)$.
$\mathcal{A}$ е компактно тогава и само тогава, когато е равномерно ограничено и равностепенно непрекъснато.

Доказателство: Предкомпактност $\Rightarrow$ равномерна ограниченост и равностепенна непрекъснатост
1. $\mathcal{A}$ е предкомпактно $\Rightarrow$ съществува крайна ε-мрежа $f_{1,} \dots f_n$.
2. Избираме произволна $f \in \mathcal{A}$. Вземаме тази f_i, за която $\|f - f_i\| \leq \varepsilon$. Тогава:
$\|f\| \leq \|f - f_i\| + \|f_i\| \leq \max\limits_{i=1,\dots,n} \|f_i\| + \varepsilon$, т.е. сме доказали равномерната ограниченост. $\lhd$

3. Избираме произволна $f \in \mathcal{A}$ и произволно $\varepsilon > 0$. Нека отново $f_{1,} \dots f_n$ е крайна ε-мрежа за $\mathcal{A}$.
3.1. Вземаме $\delta > 0$, което гарантира равномерната непрекъснатост едновременно на $f_{1,} \dots f_n$.
3.2. Вземаме тази f_i, за която $\|f - f_i\| \leq \varepsilon$. Тогава:

$$4.\ |f(x') - f(x'')| \leq \underbrace{|f(x') - f_i(x')|}_{\leq \varepsilon \text{ заради } (3.2)} + \underbrace{|f_i(x') - f_i(x'')|}_{\leq \varepsilon \text{ заради } (3.1)} + \underbrace{|f_i(x'') - f(x'')|}_{\leq \varepsilon \text{ заради } (3.2)} \leq 3\varepsilon$$

С това сме доказали равностепенната непрекъснатост. $\lhd$

Равномерна ограниченост и равностепенна непрекъснатост $\Rightarrow$ предкомпактност.
1. Избираме $\varepsilon > 0$
2. Вземаме такова $\delta > 0$, което гарантира равностепенна непрекъснатост на $\mathcal{A}$ за ε.
3. X – компактно $\Rightarrow$ съществува крайна δ-мрежа $\{x_1, \dots x_n\}$
4. Дефинираме изображение Φ: $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in (\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$
(Тук трябва да припомним, че в крайномерно пространство всеки две норми са еквивалентни, в частност $(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty)$ и $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ имат еквивалентни норми. Това дава, че ограничените спрямо $\| \|_\infty$ множества са предкомпактни.)
5. $\mathcal{A}$ е равномерно ограничено $\Rightarrow$ $\Phi(\mathcal{A})$ е ограничено в $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $\Phi(\mathcal{A})$ е предкомпактно $\Rightarrow$ за $\Phi(\mathcal{A})$ съществува крайна ε -мрежа $\{\Phi(f_1), \dots \Phi(f_m)\}$.
6. Това може да се изкаже и така: за $\forall f \in \mathcal{A}$ $\exists f_j$ за някое $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, така че $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ да е в сила $|f(x_i) - f_j(x_i)| \leq \varepsilon$
7. Избираме произволна $f \in \mathcal{A}$ и произволно $x \in X$. Нека f_j и x_i са близките до f и x съответно. Тогава

$$|f(x)-f_j(x)| \le \underbrace{|f(x)-f(x_i)|}_{\le \varepsilon} + \underbrace{|f(x_i)-f_j(x_i)|}_{\le \varepsilon} + \underbrace{|f_j(x_i)-f_j(x)|}_{\le \varepsilon} \le 3\varepsilon$$

С това доказахме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува крайна 3ε-мрежа за $\mathcal{A}$.Освен това $\mathcal{A}$ е затворено, следователно $\mathcal{A}$ е компактно. □

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб, 239-245], [КирГвиш, 75-76].

Задача 5.1.° а) Чрез сравнение на дефинициите се уверете, че равностепенна непрекъснатост на фамилия $\mathcal{A} = \{f(x)\}$ с един елемент означава равномерна непрекъснатост на тази функция $f(x)$.
б) Обосновете, че крайна фамилия $\mathcal{A} \subset C(X)$ е равностепенно непрекъсната.
в) Чрез сравнение на дефинициите се уверете, че равномерна ограниченост на фамилия $\mathcal{A}$ означава ограниченост на $\mathcal{A}$ в банаховото пространство $(C(X), \| \|_\infty)$.

Задача 5.2. Докажете, че $\{\sin nx : n = 1, 2, \ldots\}$ не е предкомпактна в $C[-\pi, \pi]$.

Задача 5.3. Предкомпактна ли е фамилията $\{e^{\lambda t} : t \in (0, \infty)\}$
а) в $C[(0, 1)]$;
б) в $C((-\infty, 0])$?
Упътване: Дефиниционната област в б) не е компактна; при все това всички функции имат граница 0 при $t \to -\infty$. Разгледайте нова дефиниционна област, получена чрез присъединяване на една нова точка, която ще означаваме с $-\infty$:
$[-\infty, 0] = (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}$.

Задача 5.4. (Критерий за компактност в l^p)
Нека $K \subset l^p$. K е предкомпактно в l^p, точно когато:
i) K е ограничено;
ii) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер n_0, така че за всяко $x = (x_1, x_2, \ldots) \in K$ да е в сила $\displaystyle\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i| < \varepsilon$.

Елемент на най-добро приближение

Задача 5.5. Нека H е хилбертово и G е затворено линейно подпространство на H. Тогава съществува елемент на най-добро приближение в G.

Упътване: Ако изберем $f \in H$ и $f = g + h,\ g \in G,\ h \in G^{\perp}$ е представянето от теоремата за проекциите, то проекцията g е елементът на най-добро приближение. За да обосновете този факт, използвайте Теоремата на Питагор.

Задача 5.6. Нека X е нормирано и X_0 е крайномерно подпространство на X. Тогава съществува елемент на най-добро приближение в X_0.

Упътване: Избираме $x \in X$ и произволно $x_0 \in X_0$. Нека $d = d(x, x_0)$ е разстоянието между тях и $K = B(x, d) \cap X_0$. K е непразно (поне $x_0 \in K$, заради това беше избрано x_0). K е затворено (като сечение на две затворени) и подмножество на крайномерното X_0. Следователно K е компактно.
Непрекъснатата функция $g(t) = \|x - t\|,\ t \in K$ достига своя inf в някоя точка t_0. Защо t_0 е най-близката до x не само сред точките от K, но и в цялото X_0?

Задача 5.7. Нека X е метрично и K е компактно подмножество на X. Тогава съществува елемент на най-добро приближение в K.

Упътване: Разгледайте непрекъснатата функция $g(t) = d(x, t),\ t \in K$ с компактна дефиниционна област.

Задача 5.8. а) Нека M е затворено и изпъкнало подмножество на хилбертовото пространство H. Тогава съществува елемент на най-добро приближение в M.
б) Обосновете, че $F = \left\{ \left(0, 0, \ldots, 1 + \dfrac{1}{n}, 0, \ldots\right),\ n = 1, 2, \ldots \right\} \subset l^2$ е затворено в l^2, *но* в него няма елемент с най-малка норма, т.е. няма най-близък до 0 елемент.

Задача 5.9. Нека $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \ldots \supset M_n \supset \ldots$ е редица от непразни, вложени, изпъкнали, затворени, ограничени подмножества на хилбертово пространство H.
Докажете, че сечението им е непразно.
Упътване: За всяко n (съгласно задача 5.7) съществува елемент g_n с минимална норма. Множествата са вложени, следователно редицата $\{\|g_n\|\}$ е растяща. M_1 е ограничено, следователно $\{\|g_n\|\}$ е ограничена редица.
Нека $d = \lim \|x_n\|$.
Ако $d = 0$, то $g_n = 0$ и $0 \in \bigcap M_n$. Затова ще смятаме, че $d > 0$.
По правилото на успоредника: $2\|g_m\|^2 + 2\|g_n\|^2 = \|g_m + g_n\|^2 + \|g_m - g_n\|^2$. Израза отляво е по-малък от $4d^2$. За първото събираемо отдясно имаме (при $m < n$, n – достатъчно голямо): $\dfrac{g_m + g_n}{2} \in M_n$, следователно $\|\dfrac{g_m + g_n}{2}\|^2 \geq \|g_n\| > d^2 - \varepsilon$. Довършете разсъждението, като докажете оттук, че $\{g_n\}$ е фундаментална, сходяща и $\lim g_n \in \bigcap M_n$.

Задача 5.10. Нека $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от подмножества на $C[0, 1]$, дефинирани с $F_n = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} :$ непрекъсната и $0 \leq f \leq x^n,\ f(1) = 1\}$.

Докажете, че $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от непразни, вложени, изпъкнали, затворени, ограничени подмножества на $C[0,1]$, *но* сечението им е празно.

Задача 5.11. Разглеждаме $\left(\mathbb{R}^2, ||\ \ ||_\infty\right)$, $||(x_1,x_2)||_\infty = \max(|x_1|,|x_2|)$. Да се намери подпространство $Z \subset \mathbb{R}^2$ и точка $x \in \mathbb{R}^2$, така че най-близкият до x елемент на Z да не е единствен.

Сепарабелност

Определение. Казваме, че метричното (нормираното, хилбертовото) пространство X е сепарабелно, ако съществува изброимо, навсякъде гъсто подмножество на X.

Задача 5.12. Докажете, че подмножеството E на пространството X е изброимо и навсякъде гъсто (т.е. X е сепарабелно), ако:
а) $X = \mathbb{R}^n, \quad E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{Q}\}$;
б) $X = l_p, \quad E = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) : x_i \in \mathbb{Q}\}$ за $1 \le p < \infty$;
в) $X = \big(C[0,1], \|\ \|_\infty\big), \quad E = \{P : P$- полином с рационални коефициенти$\}$;
г) $X = \big(C[0,1], \|\ \|_1\big), \ E = \{P : P$- полином с рационални коефициенти$\}$;
д) $X = \big(C[0,1], \|\ \|_2\big), \ E = \{P : P$- полином с рационални коефициенти$\}$;
е) $L_1[0,1], \ E = \{P : P$- полином с рационални коефициенти$\}$;
ж) $L_2[0,1], \ E = \{P : P$- полином с рационални коефициенти$\}$.

Задача 5.13. Докажете, че l^∞ не е сепарабелно.

Упътване: Нека $\alpha \in (0,1)$ е записано в двоична система. Дефинираме x_α да е този елемент на l^∞, чиито n-ти член се равнява на n-тата цифра след десетичната запетая на α. Ако α и β са две различни числа, то те се различават по някоя цифра; оттук $\|x_\alpha - x_\beta\|_\infty = 1$.
Интервалът $(0,1)$ има по-голяма мощност от мощността на изброимите. □

Еквивалентни норми

Определение. Нека $\|\ \|'$ и $\|\ \|''$ са норми в линейно пространство X. Казваме, че те са еквивалентни, ако съществуват константи $c > 0$ и $C > 0$, така че за всяко $x \in X$ да е в сила: $\alpha\|x\|' \le \|x\|'' \le \beta\|x\|'$.

Задача 5.14. Докажете, че ако $\|\ \|'$ и $\|\ \|''$ са еквивалентни норми в линейно пространство X, то
а) отворените множества в $\left(X, \|\ \|'\right)$ са отворени и в $\left(X, \|\ \|''\right)$;
б) сходимостта в $\big(X, \|\ \|'\big)$ и $\big(X, \|\ \|''\big)$ съвпада.

Задача 5.15. Докажете, че всеки две норми в крайномерно пространство са еквивалентни.
Решение: Нека X е крайномерно пространство, в което е зададена норма $\|\ \|$. Избираме базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Дефинираме евклидовата норма $\|\ \|_2$ в X спрямо този базис: за $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ ще имаме $\|x\|_2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2}$.
Ще докажем, че $\|\ \|_2$ и $\|\ \|$ са еквивалентни. Оттук ще следва, че всеки две норми в крайномерно пространство са еквивалентни.

1. За $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ имаме
$\|x\| = \|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n\| \leq |\lambda_1| \, \|e_1\| + |\lambda_2| \, \|e_2\| + \cdots + |\lambda_n| \, \|e_n\| \leq$
(поради неравенството на Коши-Буняковски)

$\leq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2} \sqrt{\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2} = \beta \|x\|_2.$

2. От резултата в (1) следва, че функцията $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $(X, \| \, \|_2)$. Наистина, ако $\|x - x_0\|_2 < \delta$, то $\|x\| < \beta.\delta$ (т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\beta}$, така че дефиницията за непрекъснатост да е валидна.)

3. Нека S е единичната сфера в $(X, \| \, \|_2)$. S е компактно множество, а функцията $\| \, \|$ е непрекъсната. Нейното ограничение върху S има най-малка стойност α.
Ако допуснем, че $\alpha = 0$, ще получим, че за някоя точка $x_0 \S_2$ ще имаме $\|x_0\| = 0$, откъдето $x_0 = 0$ и достигаме до невъзможното $0 \in S$. Следователно $\alpha > 0$.
Тогава за произволно $x \in X$ (без ограничението $\|x\|_2 = 1$) получаваме:

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} . \|x\|_2 \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| . \|x\|_2 > \alpha \|x\|_2.$$

$\square$

Задача 5.16. Докажете, че в $C[a, b]$ нормите $\| \ \|_\infty$ и $\| \ \|_1$ не са еквивалентни.

6. Ограничени линейни оператори и функционали.

Нека X и Y са нормирани пространства над едно и също поле от скалари. Полето от скалари винаги ще е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Голямата част от разсъжденията не зависят от избора на поле, затова в такъв случай ще бележим полето с K.
Ще разглеждаме изображения $A : X \to Y$, където X и Y са нормирани пространства, а A е линейно, т.е. удовлетворява равенството $A(\lambda x' + \mu x'') = \lambda A(x') + \mu A(x'')$ при всяки избор на $x', x'' \in X$ и $\lambda, \mu \in K$. Такива изображения наричаме линейни оператори. В частния случай, когато $Y = K$ – полето на скаларите, ще говорим за линейни функционали.

Определение. Ограничен линеен оператор.

Определение. Непрекъснат линеен оператор.

Определение. Норма на ограничен линеен оператор. $\|A\| = \sup\limits_{x:\|x\|\leq 1} \|Ax\|$

Твърдение. Следните условия са еквивалентни:
(i) A е ограничен оператор.
(ii) Съществува $x \in X$, така че A е непрекъснат в x.
(iii) A е непрекъснат във всяко $x \in X$.

Доказателство: От определенията. □

Твърдение. Следните изрази представят $\|A\|$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \inf\{C \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq C\|x\|, \forall x \in X\}$$

Доказателство: От определенията. □

• Множеството на непрекъснатите линейни оператори $A : X \to Y$ ще означаваме с $\mathcal{B}(X, Y)$.
• В частния случай, когато $X = Y$, ще използваме означението $\mathcal{B}(X)$.
• Във втори частен случай, когато Y полето на скаларите, ще бележим $\mathcal{B}(X, Y)$ с X' и ще го наричаме (първо) спрегнато пространство.
• Операциите в $\mathcal{B}(X, Y)$ се въвеждат както и при произволни други функции, т.е. $(A + B)(x) = Ax + Bx$, $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

Теорема. (i) $\mathcal{B}(X, Y)$ е линейно пространство.
(ii) $\mathcal{B}(X, Y)$ е нормирано пространство.
(iii) Ако Y е пълно, то и $\mathcal{B}(X, Y)$ е пълно.

Доказателство: 1. С директна проверка се доказва, че множеството на всички (не задължително ограничени) линейни оператори е линейно пространство.
2. Нека $x \in X$, $\|x\| \leq 1$ и $A, B \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогава:

$$\|(A + B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

С това доказваме, че сума на ограничени оператори е ограничен оператор и $\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$.

3. Аналогично при $x \in X$, $\|x\| \le 1$, $\lambda \in K$ и $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ имаме:

$$\|(\lambda A)x\| = |\lambda|\|Ax\| \;\Rightarrow$$

$$\sup_{\|x\|\le 1} \|(\lambda A)x\| = \sup_{\|x\|\le 1} |\lambda|\|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \;\Rightarrow\; \|(\lambda A)x\| = \|(\lambda A)x\|.$$

С това доказваме, че произведение на ограничен оператор с константа е ограничен оператор.

4. Поради (2) и (3) имаме, че $\mathcal{B}(X,Y)$ е затворено спрямо сумиране и умножение с константа, следователно е линейно подпространство на пространството на всички линейни оператори от X към Y.

5. (2) и (3) дават нещо повече – две от изискванията $\mathcal{B}(X,Y)$ да е нормирано пространство (неравенството на триъгълника и хомогенност на нормата). Първото изискване ($\|A\| \ge 0$, при това $\|A\| = 0$ точно когато $A = 0$) се проверява тривиално. С това е установено, че $\mathcal{B}(X,Y)$ е нормирано пространство.

6. Нека сега Y е пълно. Нека $\{A_n\}$ е фундаментална. Ще докажем, че е сходяща. От фундаменталността:

6.1. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m > N, \forall n > N \quad \Rightarrow \quad \|A_m - A_n\| < \varepsilon$. Оттук:

6.2. $\forall x \in X\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall m > N, \forall n > N \quad \Rightarrow \quad \|A_m(x) - A_n(x)\| < \varepsilon\|x\|$,

6.3. В частност за всяко $x \in X$ редицата $\{A_n(x)\}$ е фундаментална, а поради пълнотата на Y е сходяща.

Означаваме $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ с $A_0(x)$ (т.е. A_0 засега е поточкова граница на редицата $\{A_n\}$). От свойствата на границата следва, че A_0 е линеен оператор.

7. Отново в неравенството от 6.2 (разглеждайки ε, x и n като фиксирани), правим граничен преход при $m\to\infty$. Получаваме

$\forall x \in X\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \quad \Rightarrow \quad \|A_0(x) - A_n(x)\| < \varepsilon\|x\|$ Тази формула обосновава два факта:

7.1. Операторът $A_0 - A_n$ е ограничен, откъдето (поради ограничеността на A_n) следва, че и A_0 е ограничен.

7.2. Редицата $\{A_n(x)\}$ клони по норма към A_0. И така, всяка фундаментална редица $\{A_n(x)\}$ е сходяща, пространството $\mathcal{B}(X,Y)$ е пълно. $\square$

Примери за линейни функционали в $C[a,b]$. [2]

Задача 6.1. Нека $t_0 \in [a,b]$ и функционалът $l : C[a,b] \to \mathbb{R}$ е дефиниран с $l(f) = f(t_0)$ (този функционал се нарича *делта-функция*). Докажете, че нормата му се равнява на единица.

Когато пресмятаме колко е нормата на линеен функционал l или оператор A, обикновено правим две оценки: една отгоре и една отдолу.
При първата оценка намираме константа M, така че за произволен елемент $x \in X, \|x\| \leq 1$ да е в сила $|l(x)| \leq M$. Получаваме неравенство $\|l(x)\| \leq M$.
Често се използват неравенства за модули и мажориране със sup *на ограничени величини (при $C[a,b]$, l^∞, $L^\infty[a,b]$, l^1, $L^1[a,b]$), неравенството на Хьолдер (за l^p, L^p) и неравенството на Коши-Буняковски (за хилбертови пространства).*
Втората оценка е свързана с избирането на (подходящ) елемент $x_0 \in X$. Ако за него сме получили $|l(x_0)| = M$, то $\|l\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |l(x)| \geq |l(x_0)| = M$. Понякога се налага избиране на елементи x_ε, за които $l(x_\varepsilon) \geq M - \varepsilon$, откъдето $\|l\| \geq M - \varepsilon$. Ако това може да се направи при произволно $\varepsilon > 0$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \|l\| \geq M - \varepsilon$), то заключаваме, че $\|l\| \geq M$.

Задача 6.2. Нека $l : C_{\mathbb{C}}[a,b] \to \mathbb{C}$ е дефиниран с формулата:

$$l(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i),$$

където $t_1, \ldots, t_n$ е (фиксирана, крайна) фамилия от точки в интервала $[a,b]$. Докажете, че $\|l\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

Решение: Ще направим две оценки на $l(f)$.
1. За произволна $f \in C_{\mathbb{C}}[a,b]$

$$|l(f)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,|f(t_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \max_{t\in[0,1]} |f(t)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,,$$

$$\text{т.е. } |l(f)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Оттук следва, че ако $\|f\|_\infty \leq 1$, то $|l(f)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$, откъдето $\sup\limits_{\|f\|\leq 1} |l(f)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

2. Втората оценка ще е свързана със стойността на $l(f_0)$, за подходящо избрано f_0. Избираме стойностите на $f_0(t_i)$ да са $f_0(t_i) = \overline{\operatorname{sgn} \lambda_i}$ и във всеки от интервалите $[t_i, t_{i+1}]$ дефинираме f_0 като линейна функция, т.е.
$f_0(t) = \alpha f_0(t_i) + (1-\alpha) f_0(t_{i+1})$ при $t = \alpha t_i + (1-\alpha) t_{i+1}$, $\alpha \in (0,1)$.

[2] По-късно (12 въпрос) ще бъде изяснен общият вид на линейните функционали в $C[a,b]$ и техните норми.

Имаме $|f_0(t)| \leq |\alpha|\,|f_0(t_i)| + |1-\alpha|\,|f_0(t_{i+1})| = \alpha\,|\overline{\operatorname{sgn}\lambda_i}| + |1-\alpha|\,|\overline{\operatorname{sgn}\lambda_{i+1}}| = \alpha + (1-\alpha) = 1$, следователно $\|f_0\| \leq 1$.

$$|l(f_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{\operatorname{sgn}\lambda_i}\right| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Оттук следва, че $\sup\limits_{\|f\|\leq 1} |l(f)| \geq |l(f_0)| \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

Задача 6.3. Нека $\varphi(t)$ е непрекъсната функция. Разглеждаме $l : C[a,b] \to \mathbb{R}$, дефиниран с формулата:

$$l(f) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, dt.$$

Докажете, че l е линеен, непрекъснат и че $\|l\| = \int\limits_a^b |\varphi(t)|\, dt$. [КантАк, стр. 183.]

Задача 6.4. Разглеждаме $C^1[0,1]$ като подпространство на $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$, избрана е точка $t_0 \in [0,1]$.
Докажете, че функционалът $l : C^1[0,1] \to \mathbb{R},\ l(f) = f'(t_0)$ **не** е непрекъснат.
Докажете, че операторът $D : C^1[0,1] \to C[0,1],\ D(f) = f'$ **не** е непрекъснат.

Упътване: Пресметнете $|l(f_n)|$ за подходяща ограничена редица от функции (например за $f_n = \sin n(t - t_0)$).
Допускането, че операторът D е непрекъснат води до заключението, че l също е непрекъснат като композиция на D и делта функцията в точката t_0. $\square$

7. Обратими оператори. Спектър и резолвента.

Ще предполагаме, че X и Y са банахови пространства.

• Единичен оператор $\qquad (I : X \to X,\ \ Ix = x.)$

Определение. Обратим оператор $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, ако съществува $B \in \mathcal{B}(Y, X)$ със свойствата $AB = I_Y,\ BA = I_X$ (в определението се изисква B да е непрекъснат). Бележим $B = A^{-1}$.
• $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; операторите обичайно не комутират ($AB \neq BA$),

• Непрекъснатост на умножението на оператори

Оценки: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$; $\quad \|A^n\| \leq \|A\|^n$;
Ако A е обратим, то $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$. Следва от $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\|$.

• Алгебрически обратен на $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ е линеен и биекция; не е сигурно, че обратния е ограничен (зад. 7.1, 7.2).

Теорема. Нека $A : X \to Y$ е ограничен линеен оператор.
Нека A е сюрекция и съществува константа $m > 0$, така че за всяко $x \in X$ е в сила $\|Ax\| \geq m\|x\|$.
Тогава съществува ограничен обратен A^{-1}. □

Теорема. Нека $A \in \mathcal{B}(X)$ и $\|A\| < 1$. Тогава $I - A$ е обратим.
$(I - A)^{-1}$ може да се представи като сходящ (по норма) ред:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots.$$

Доказателство: Нека $S_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$.
S_n е фундаментална (направете оценка).
Пресмятаме, че $(I - A)S_n = I - A^{n+1}$, а $I - A^{n+1} \to I$, защото $0 \leq \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$ (по условие $\|A\| < 1$).
От друга страна $(I - A)S_n \to AS$, поради непрекъснатостта на умножението.
Следователно $AS = I$, т.е. S е десен обратен за A. Аналогично – за ляв обратен. □

Теорема. Нека $A, \triangle A \in \mathcal{B}(X)$. Нека A е обратим и $\| \triangle A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$.
Тогава операторът $B = A + \triangle A$ е обратим и е в сила оценката:

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\| \triangle A\|\|A^{-1}\|^2}{1 - \| \triangle A\|\|A^{-1}\|}.$$

Доказателство: Представяме B във вида: $B = A + \triangle A = A(I + A^{-1} \triangle A)$.
Имаме $\|A^{-1} \triangle A\| \leq \|A^{-1}\|\| \triangle A\| < 1$.
Следователно съществува $(I + A^{-1} \triangle A)^{-1}$ и $B^{-1} = (I + A^{-1} \triangle A)^{-1}A^{-1}$.
Оценяваме: $\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|(I + A^{-1} \triangle A)^{-1}A^{-1} - A^{-1}\|$
$= \|[(I + A^{-1} \triangle A)^{-1} - I]A^{-1}\| \leq \|I - (I + A^{-1} \triangle A)^{-1}\|\|A^{-1}\|$
Ще преработим първия множител:
$(I + A^{-1} \triangle A)^{-1} = I - (A^{-1} \triangle A) + (A^{-1} \triangle A)^2 - (A^{-1} \triangle A)^3 + \ldots;$

$I - (I + A^{-1} \triangle A)^{-1} = (A^{-1} \triangle A)) - (A^{-1} \triangle A))^2 + (A^{-1} \triangle A)^3 - \ldots$
$= (A^{-1} \triangle A)) \left(I - (A^{-1} \triangle A)) + (A^{-1} \triangle A))^2 - \ldots\right)$
За нормата му получаваме:
$\|I - (I + A^{-1} \triangle A)^{-1}\| \leq \|(A^{-1} \triangle A))\| \|I - (A^{-1} \triangle A)) + (A^{-1} \triangle A))^2 - \ldots\| \leq$
$\leq \|A^{-1}\| \|\triangle A\| \left(1 + \|A^{-1} \triangle A\| + \|A^{-1} \triangle A\|^2 + \ldots\right) = \|A^{-1}\| \|\triangle A\| \dfrac{1}{1 - \|A^{-1} \triangle A\|}$
Окончателно: $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \dfrac{\|\triangle A\| \, \|A^{-1}\|^2}{1 - \|\triangle A\| \, \|A^{-1}\|}$. □

Следствие. Множеството на обратимите оператори е отворено. □

Определение. Скалар $\lambda \in \mathbb{C}$ наричаме *резолвентна стойност* на A, ако съществува $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$.

Определение. Множеството на всички резолвентни стойности наричаме *резолвентно множество* и бележим с $res(A)$:

$$res(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}.$$

$R(A, \lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ наричаме *резолвента* (на A в точката λ).

Определение. Допълнението на $res(A)$ в $\mathbb{C}$ наричаме *спектър* на A и бележим със $Sp(A)$:

$$Sp(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{не съществува ограничен обратен на } \lambda - A\}.$$

Теорема. Спектърът на оператор е компактно множество.

Доказателство: Нека $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| > \|A\|$.

Тогава $\lambda - A = \lambda \left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$. Очевидно $\left\|\dfrac{A}{\lambda}\right\| < 1$, оттук $I - \dfrac{A}{\lambda}$ и $\lambda \left(I - \dfrac{A}{\lambda}\right)$ са обратими. Тези $\lambda \in \mathbb{C}$, които са извън кръгът с радиус $\|A\|$, са резолвентни стойности. $Sp(A)$ е ограничено множество.

От друга страна, ако $\lambda_0 \in res(A)$ и $|\lambda_0 - \lambda| < \varepsilon$, то и $\|\lambda_0 I - \lambda I\| < \varepsilon$, откъдето $\lambda - A = (\lambda_0 - A) + (\lambda I - \lambda_0 I)$ е обратим, $\lambda \in res(A)$. Следователно $res(A)$ е отворено множество, а допълнението му – $Sp(A)$ е затворено. □

Теорема. Спектърът на оператор е непразно множество. □

Определение. Спектрален радиус $r(A)$ на оператор $A \in \mathcal{B}(X)$ се определя с формулата:

$$r(A) = \inf \left\{\|A^n\|, \; n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

По късно ще видим, че $r(A)$ се равнява на радиуса на минималния кръг, който съдържа спектъра на A: $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in Sp(A)\}$. Още за спектралния радиус – задачи .....

Препоръчвана литература: [КантАк, 204-224], [Кутателадзе, 78-84].

Задача 7.1. Нека $A, B : l^2 \to l^2$ са операторите, дефинирани с

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$,

$B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, \ldots)$.

Проверете, че A и B са линейни, $AB = BA = I$, A е ограничен ($\|A\| = 1$), но B *не* е ограничен.

Задача 7.2. Нека $X = (\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ \exists f', \ f(0) = 0\}, \| \ \|_\infty)$ – подпространство на $C[0,1]$.
Операторите A и B са дефинирани с

$A : C[0,1] \to X, \ (A(f))(t) = \int\limits_0^t f(s)\, ds$,

$B : X \to C[0,1], \ (B(g))(t) = g'(t)$.

Проверете, че A и B са линейни, $AB = I_{C[0,1]}$, $BA = I_X$, A е ограничен ($\|A\| = 1$), но B *не* е ограничен.

Задача 7.3. S и T са дефинирани в l^2 с

$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$,

$S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ [3].

За тях са в сила: $TS = I$, $ST \neq I$; т.е. T има десен (но не двустранен обратен), а S има ляв (но не двустранен обратен).

Задача 7.4. Ако операторът A има единствен десен обратен, то A е обратим.
Упътване: Проверете, че ако B е десен обратен на A ($AB = I$), то и $BA + B - I$ е десен обратен на A. От единствеността на десния обратен следва, че те са равни, откъдето B е и ляв обратен.

Множеството на обратимите оператори е отворено. Интересен е въпросът дали то е навсякъде гъсто в $\mathbf{B}(X)$. *Ако пространството* X *е крайномерно, отговорът е положителен. В безкрайномерно хилбертово пространство отговорът е отрицателен.*

Задача 7.5. а) Докажете, че ако X е крайномерно пространство, то всеки оператор A може да се представи като граница (по норма) на обратими оператори A_n.
б) Операторът S на дясна транслация в l^2, $S : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, не може да се представи като граница на обратими оператори.

[3] Няма да използваме руската дума *сдвиг* или английската *shift* (unilateral shift), когато говорим за тези оператори, а ще използваме исконно българската дума :) транслация.

Оператор A с $\|A\| < 1$ и свиващи изображения. Метод на последователните приближения.

Задача 7.6. Нека $A : X \to X$ е непрекъснат линеен оператор, b е (фиксиран) елемент на X и изображението $F : X \to X$ е дефинирано с $F(x) = Ax + b$. Докажете, че F е свиващо изображение точно когато $\|A\| < 1$.
Приложете този резултат, за да дадете ново решение на задачи 3.12 – 3.14.

Още за реда на Нойман и за спектралния радиус $r(A)$

Определихме спектралния радиус с формулата $r(A) = \inf\{\|A^n\|,\ n = 1, 2, \ldots\}$. В действителност инфимумът може да се замени с граница.

Задача 7.7. Докажете, че е в сила следната формула (формула на Гелфанд):

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

□

Условията за сходимост на реда на Нойман могат да се уточнят. Той е свързан и със спектралния радиус $r(A)$.

Задача 7.8. Докажете, че условията (i), (ii) и (iii) са еквивалентни:
i) Редът на Нойман $1 + A + A^2 + A^3 + \ldots$ е сходящ (по норма);
ii) съществува k_0, за което $\|A^{k_0}\| < 1$;
iii) $r(A) < 1$. □

Тъждества за резолвентата

8. Теорема на Банах-Щайнхауз. Силна сходимост на оператори.

Теорема. Нека $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от оператори $A_n : X \to Y$, където X е банахово и Y е нормирано.
Нека за всяко $x \in X$ съществува константа $C \in \mathbb{R}$ (зависеща от x), така че $\|A_n(x)\| \leq C$ (т.е. за всяко $x \in X$ редицата $\|A_n(x)\|$ е ограничена).
Тогава $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена числова редица.

Доказателство: 1. Нека $M_k = \{x \in X : \forall n$ е в сила $\|A_n x\| \leq k\}$.

2. $M_k \subset X$ – затворено подмножество на X, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k = X$ и X е пълно пространство.

Ако допуснем, че всяко от множествата M_k няма вътрешна точка (т.е. всяко M_k е никъде негъсто в X), ще получим, че пълното X може да се представи като изброимо обединение на никъде негъсти подмножества, противоречие с теоремата на Бер.
Следователно някое M_{k_0} има вътрешна точка x_0.
3. Вътрешна точка x_0 на M_{k_0} означава, че за някое $\delta > 0$ имаме $\mathcal{O}(x_0, \delta) \subset M_{k_0}$.
Според дефиницията на M_{k_0} за x с $\|x - x_0\| < \delta$ е в сила $\|A_n x\| \leq k_0$ за всяко n. В частност такова свойство има и x_0.
4. Избираме произволно $y \in X : \|y\| \leq 1$. Тогава $\|\frac{\delta}{2} y\| \leq \frac{\delta}{2}$.
Поради (3) $\forall n$ е в сила оценката $\|A_n(\frac{\delta}{2} y)\| \leq \|A_n(x_0 + \frac{\delta}{2} y)\| + \|A_n(x_0)\| \leq 2k_0$,
т.е. $\forall n\, \forall (y \in X : \|y\| \leq 1) \;\Rightarrow\; \|A_n(y)\| \leq \dfrac{k_0}{\delta}$, т.е. $\forall n\, \|A_n\| \leq \dfrac{k_0}{\delta}$. □

Определение. Казваме, че редицата $\{A_n\}$ клони силно към A_0 (и записваме $A_n \underset{\mathbf{s}}{\longrightarrow} A_0$ или s-lim $A_n = A_0$), ако $\forall x \in X \;\Rightarrow A_n x \xrightarrow{\|\,\|} A_0 x$.

Теорема. Ако $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ са ограничени и $A_n \underset{\mathbf{s}}{\longrightarrow} A_0$, то A_0 е ограничен и $\|A_0\| \leq \underline{\lim} \|A_n\|$. [4] □

Определение. B е плътно подмножество на X, ако линейната му обвивка е навсякъде гъста в X.

Теорема. **(НДУ за силна сходимост)** $A_n \underset{\mathbf{s}}{\longrightarrow} A_0$ точно когато
(i) Редицата $\{\|A_n\|\}$ е ограничена.
(ii) $A_n x \xrightarrow{\|\,\|} A_0 x$, когато x се изменя в някое плътно подмножество S на X. □

Доказателство: $\Rightarrow$: Непосредствено следствие от теоремата на Банах-Щайнхауз.
$\Leftarrow$: Означаваме с M една горна граница на $\{\|A_n\|\}$.
Избираме произволно $x \in X$. То може да се приближи с линейна комбинация на елементи на S: $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$, където $x_\varepsilon = \sum \lambda_i x_i,\ x_i \in S$

$$\|A_n(x) - A_0(x)\| \leq \underbrace{\|A_n(x) - A_n(x_\varepsilon)\|}_{\leq M\varepsilon} + \underbrace{\|A_n(x_\varepsilon) - A_0(x_\varepsilon)\|}_{\leq M\varepsilon \text{ за големи } n} + \underbrace{\|A_0(x_\varepsilon) - A_0(x)\|}_{\leq M\varepsilon} \leq 3M\varepsilon.$$

Литература: [ЛюстСоб, 149-153], [КантАк, 83-88], [Йосида, 103-112].

[4] Да припомним, че $\underline{\lim}$ (*лимес инфериор*) означава най-малката точка на сгъстяване.

Задача 8.1. (Друга формулировка на теоремата на Банах-Щайнхауз.)
Нека $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от оператори $A_n : X \to Y$, където X е банахово и Y е нормирано. В сила е една от алтернативите:
I. $M = \{x \in X :$ редицата $\|A_n(x)\|$ е ограничена$\}$ е цялото X.
Тогава редицата $\|\{A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.
II. $M = \{x \in X :$ редицата $\|A_n(x)\|$ е ограничена$\}$ е малка беровска категория.
Тогава редицата $\|\{A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена.

Упътване: M е голяма или малка категория. Ако M е голяма категория, дословно повторение на предното доказателство обосновава, че редицата $\|\{A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. Тогава $M = X$.

Задача 8.2. (Принцип за фиксация на особеностите.)
Нека $\|\{A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена.
Тогава съществува x, така че редицата $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена. Множеството на тези x, за които редицата $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена, е голяма берова категория.

Упътване: Използвайте горната алтернатива.

Задача 8.3. (Принцип за сгъстяване на особеностите.)
Нека за всяко $k = 1, 2, \ldots$ редицата $\|\{A_n^{(k)}\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена.
Тогава съществува x_0, така че $\|\{A_n^{(k)} x_0\|\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена за всяко $k = 1, 2, \ldots$.
Множеството на тези x_0, които имат това свойство, е голяма берова категория.

Упътване: Според горната алтернатива, за всяко k множеството
$M_k = \{x :$ редицата$\|A_n^{(k)} x\|_{n=1}^{\infty}$ е ограничена$\}$ е голяма беровска категория,
а допълнението му $N_k = X \backslash M_k$ – малка. Според де Морган

$$\bigcap_k M_k = \bigcap_k X \backslash N_k = X \backslash \bigcup_k N_k.$$

Но изброимо обединение $\bigcup_k N_k$ на малки беровски категории е малка категория.

Задача 8.4. Нека $P_n : l^2 \to l^2$ са операторите, дефинирани с
$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$.
Проверете, че $P_n \underset{\mathbf{s}}{\longrightarrow} I$, но $P_n \not\longrightarrow I$.

Задача 8.5. Нека $Q_n : l^2 \to l^2$ са операторите, дефинирани с
$Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, x_n, 0, \ldots)$.
Проверете, че $Q_n \underset{\mathbf{s}}{\longrightarrow} Q_0 = 0$ и $0 = \|0\| < 1 = \|Q_n\|$ (т.е. $\|Q_0\| < \underline{\lim}\|Q_n\|$).

Интерполация на непрекъсната функция с полиноми на Лагранж
Нека са зададени n точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (наричаме ги възли), и n стойности $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Търсим полином $y = L(x)$ от степен не по-висока от $(n-1)$, за който $P(x_i) = y_i$.
Полиномът с горните свойства се нарича интерполационен полином на Лагранж и се дава с формулата:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \, l_k(x),$$

където $l_k(x) = \dfrac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$. [5]

Задача 8.6.

Поточкова сходимост на реда на Фурие

Задача 8.7.

Равномерна сходимост на реда на Фурие

Задача 8.8.

Непрекъснатост на билинейно изображение

Задача 8.9.

[5] Често се използва следното означение: $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.
Тогава $\omega_n'(x) = \sum_{k=1}^{n}(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots\ldots(x-x_n)$.
Имаме $\omega_n'(x_k) = (x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)$,
откъдето $l_k(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)}$.

9. Продължение на линейни функционали и оператори. Теорема на Хан-Банах.

Определение. Нека X и Y са множества, $L \subset X$ е подмножество на X и $f : L \to Y$. Казваме, че $\widetilde{f} : X \to Y$ е продължение на f, ако $\widetilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in L$.

Теорема. Нека X е нормирано пространство с поле на скаларите $\mathbb{R}$. Нека L е линейно подпространство на X и $l : L \to \mathbb{R}$ е непрекъснат линеен функционал. Тогава съществува непрекъснато продължение $\widetilde{l} : X \to \mathbb{R}$ на l, със свойството $\|\widetilde{l}\| = \|l\|$.

Доказателство: С използване на Лемата на Цорн (или с допълнителното предположение, че X е сепарабелно), се обосновава съществуването на максимално подпространство на X, в което съществува търсеното продължение.
Допускаме, че това максимално пространство не е X. Ще опишем процедура, за получаване на продължение в подпространство, още по-голямо от максималното.
БОО смятаме, че L е това максимално подпространство.
Нека x_0 не принадлежи на L. За произволни $x', x'' \in L$:
1. $l(x') - l(x'') = l(x' - x'') \leq \|l\| \, \|x' - x''\| \leq \|l\| \left(\|x' + x_0\| + \|l\| \|x'' + x_0\| \right)$.
2. Оттук $l(x') - \|l\| \, \|x' + x_0\| \leq l(x'') + \|l\| \, \|x'' + x_0\|, \ \forall x', x'' \in L$.
3. Тогава $\exists C \in \mathbb{R} : \ \sup\limits_{x \in L} \Big(l(x) - \|l\| \, \|x + x_0\| \Big) \leq C \leq \inf\limits_{x \in L} \Big(l(x) + \|l\| \, \|x + x_0\| \Big)$
4. Полагаме $\widetilde{l}(x + tx_0) = l(x) - tC$
5. Сега ще установим, че $\|\widetilde{l}\| \leq \|l\|$
От (3) следва, че $l(x) - C \leq \|l\| \, \|x + x_0\|$ и $l(x) - C \geq -\|l\| \, \|x + x_0\|$, т.е.
$|l(x + x_0)| \leq \|l\| \, \|x + x_0\|$, откъдето
$|l(x + tx_0)| = |t| \, |l(\frac{x}{t} + x_0)| \leq |t| \, \|l\| \, \|\frac{x}{t} + x_0\| = \|l\| \, \|x + tx_0\|$. □

Следствие. (i) Нека X е реално нормирано пространство и $x_0 \neq 0$.
Тогава съществува линеен функционал $l : X \to \mathbb{R}$ със свойствата: $l(x_0) = \|x_0\|$ и $\|l\| = 1$.
(ii) Ако $x_0, x_1 \in X$ и $x_0 \neq x_1$, то съществува непрекъснат линеен функционал $l : X \to \mathbb{R}$, за който $l(x_0) \neq l(x_1)$ (т.е. линейните функционали разделят точките на X). □

Следствие. Нека X е реално нормирано пространство, L е линейно подпространство на X и $x \in X$, така че $d(x, L) = d > 0$.
Тогава съществува линеен функционал $l : X \to \mathbb{R}$ със свойствата: $l_{|L} = 0$, $l(x_0) = 1$ и $\|l\| = \dfrac{1}{d}$. □

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб, 170-180], [КантАк, 83-88]

Продължение на оператори

Задача 9.1. Нека X е нормирано пространство, L е навсякъде гъсто в X линейно подпространство и Y е банахово пространство.
Непрекъснат линеен оператор $A : L \to Y$ може по единствен начин да се продължи до непрекъснат оператор $\widetilde{A} : X \to Y$, при това $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$ (продължението запазва нормата).

Упътване: Дефинирайте $\widetilde{A}x_0$ за $x_0 \in X$, като вземете редица $\{x_n\}$ в L, $x_n \to x_0$ и положите $\widetilde{A}x_0 = \lim Ax_n$. Коректността на тази дефиниция трябва да се обоснове. □

$$\begin{tikzcd} L \arrow[dr, "A"] & \\ \cap & \\ X \arrow[r, dashed, "\widetilde{A}"'] & Y \end{tikzcd}$$

Решение: Нека $x_0 \in X$, а $\{x_n\}$ е редица в L, за която $x_n \to x_0$. Непрекъснатото продължение $\widetilde{A}$ трябва да удовлетворява условието $Ax_n = \widetilde{A}x_n \to Ax_0$. Ще докажем, че това равенство може да дефинира коректно $\widetilde{A}$.
От $x_n \to x_0$ следва, че $\{x_n\}$ е фундаментална ($\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ за достатъчно големи m и n). Неравенството $\|Ax_m - Ax_n\| = \|A(x_m - x_n)\| \le \|A\|\,\|x_m - x_n\| < \|A\|\varepsilon$ показва, че и $\{Ax_n\}$ е фундаментална, следователно е сходяща (Y е банахово).
Нека $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ са две редици, клонящи към x_0. От условието $\|x_n - x'_n\| \to 0$ следва $\|Ax_n - Ax'_n\| \le \|A\|\|x_n - x'_n\| \to 0$, откъдето заключаваме, че двете редици $\{Ax_n\}$ и $\{Ax'_n\}$ имат една и съща граница, т.е. дефиницията $\widetilde{A}x_0 = \lim Ax_n$ не зависи от избора на редицата $\{x_n\}$, която клони към x_0.
Линейността на $\widetilde{A}$ е тривиална. Граничен преход в неравенството $\|Ax_n\| \le \|A\|\,\|x_n\|$ дава, че $\|\widetilde{A}x_0\| \le \|A\|\,\|x_0\|$ за произволно x_0, откъдето $\|\widetilde{A}\| \le \|A\|$. Комбинирайки с тривиалното $\|\widetilde{A}\| \ge \|A\|$, получаваме $\|\widetilde{A}\| = \|A\|$. □

Задача 9.2. Нека H е хилбертово пространство, L е линейно подпространство на H (не е задължително да е затворено или пък да е навсякъде гъсто в H) и Y е банахово пространство.
Докажете, че непрекъснат оператор $A : L \to Y$ може да се продължи без увеличение на нормата до непрекъснат оператор $\widetilde{A} : H \to Y$.

Упътване: Направете най-напред продължение $A_1 : \overline{L} \to Y$ (както в предната задача). Дефинирайте после продължение $\widetilde{A}$ на A_1 с формулата $\widetilde{A}x = A_1(Px)$, където с P е означен операторът на ортогонално проектиране върху $\overline{L}$. □

$$\begin{tikzcd} L \arrow[dr, "A"] & \\ \cap & \\ \overline{L} \arrow[r, dashed, "A_1"'] & Y \\ H \arrow[u, "P"] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd}$$

Задача 9.3. Продължението, писано в предната задача не е единствено. Постройте пример.

Хиперравнини и линейни функционали

• Хиперравнина, хиперпространство.

Задача 9.4. Докажете, че линейния функционал $l : \to\mathbb{R}$ е непрекъснат точно когато хиперравнината $l^{-1}(\lambda)$ е затворена за някое $\lambda \in \mathbb{R}$.

Спектърът на ограничен оператор е непразен.

Задача 9.5. Да се докаже, че спектърът на ограничен оператор[6] е непразен.

Решение: Допускаме противното. Тогава резолвентата R е определена за всяко $\lambda \in \mathbb{C}$. Нека забележим, че $R(A,\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Наистина

$$R(A,\lambda) = (\lambda - A)^{-1} = \left(\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

защото вторият множител е ограничен в околност на ∞, а първият множител клони към 0.

Нека $l \in X'$ е произволен линеен функционал и x е произволен елемент на X. Разглеждаме функцията $f(\lambda) = l(R(A,\lambda)x)$. Ще докажем, че тя е цяла функция [7]. Да намерим производната ѝ:

$$f'(\lambda) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\lambda+h) - f(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{l(R(A,\lambda+h)x) - l(R(A,\lambda)x)}{h} =$$

$$= l\left(\lim_{h\to 0}\frac{R(A,\lambda+h) - R(A,\lambda)}{h}x\right) = l\left(R^2(A,\lambda)x\right).$$

Получихме, че $f(\lambda)$ е навсякъде диференцируема, т.е. е цяла, има граница 0 при $\lambda\to 0$, следователно е ограничена. По Теоремата на Лиувил тя е константа, при това с граница 0 при $\lambda\to 0$. Следователно $f \equiv 0$.

И така, за произволен $l \in X'$ имаме $l(R(A,\lambda)x) = 0$. От следствието от Теоремата на Хан-Банах следва, че за всяко $x \in X$ е в сила $R(A,\lambda)x = 0$. Но това означава, че $R(A,\lambda) \equiv 0$ при всяко $\lambda \in \mathbb{C}$, което е невъзможно, противоречие с допускането. □

[6] в пространство с поле на скаларите $\mathbb{C}$

[7] Цяла функция наричаме функция на комплексна променлива, дефинирана и диференцируема в цялата комплексна равнина. Съгласно Теоремата на Лиувил, единствените ограничени цели функции са константите.

Функционали в нормирано пространство с поле на скаларите $\mathbb{C}$

Nothing is real...
Beatles

Определение. Нека X е комплексно нормирано пространство. С $X_{\mathbb{R}}$ се бележи реалното нормирано пространство, което съвпада с X като множество и има същото събиране и умножение с *реална* константа.
Линеен функционал $l : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ се нарича реален линеен функционал в X.

Задача 9.6.
а) Нека X е комплексно нормирано пространство и нека $l : X \to \mathbb{C}$ е комплексен линеен функционал. Нека $\varphi_1(x) = \mathrm{Re}(l(x))$ и $\varphi_2(x) = \mathrm{Im}(l(x))$, т.е имаме представяне $l(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Докажете, че:
а) φ_1 и φ_2 са реални линейни функционали;
б) за всяко $x \in X$ е в сила $\varphi_1(x) = -\varphi_1(ix)$ (т.е $l(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)$);
в) ако φ_1 е реален комплексен функционал, то $l(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)$ е комплексен линеен функционал;
г) $\|l\| = \|\varphi_1\|$.

Упътване: г) За всяко x, $\|x\| \leq 1$ имаме
$\|l\| \geq |l(x)| = |\varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)| = \sqrt{\varphi_1(x)^2 + \varphi_1(x)^2} \geq \sqrt{\varphi_1(x)^2} = |\varphi_1(x)|$.
Ако $\operatorname{sgn} l(x) = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, то $|e^{it}| = 1$, $e^{-it} l(x) \geq 0$
и $|l(x)| = |e^{-it} l(x)| = |l(e^{-it}x)| = \varphi_1(e^{-it}x) \leq \|\varphi_1\| \, \|e^{-it}x\| = \|\varphi_1\| \, \|x\|$. □

Задача 9.7. Нека X е нормирано пространство с поле на скаларите $\mathbb{C}$, L е линейно подпространство на X и $l : L \to \mathbb{C}$ е комплексен непрекъснат линеен функционал.
Тогава съществува непрекъснато линейно продължение $\widetilde{l} : X \to \mathbb{C}$ със свойството $\|\widetilde{l}\| = \|l\|$.

Упътване: Разгледайте реалния функционал $\varphi_1 : L \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = Re(l(x))$, неговото продължение $\widetilde{\varphi}_1 : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ и комплексния функционал $\widetilde{l}(x) = \widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix)$. Защо $\|\widetilde{l}\| = \|l\|$? □

10. Спрегнати пространства и оператори, второ спрегнато пространство, слаба и *-слаба сходимост.

• Спрегнато пространство X', второ спрегнато пространство X''.

Теорема (за потапянето на X в X''). Изображението

$$i : X \to X'', \quad i(x)(l) = l(x), \quad x \in X;\ l \in X'$$

е инекция и изометрия. □

• Ако горното изображение е биективно, то пространството X се нарича рефлексивно.

Следствие (за попълнението на нормирано пространство)
Нека X е нормирано пространство. Тогава съществува, и то единствено (с точност до изоморфизъм), попълнение на X. □

Определение. Слаба сходимост в X: $x_\alpha \to x_0$, когато $l(x_\alpha) \underset{w}{\longrightarrow} l(x_0) \quad \forall l \in X'$.

Определение.
• недовършено

Теорема. Единичното кълбо в X' е слабо-*-компактно.
Препоръчвана литература: [ЛюстСоб 204-225]

Задача 10.1. В хилбертово пространство H от $x_n \underset{w}{\longrightarrow} x_0$ и $\|x_n\| \to \|x_0\|$, следва $x_n \xrightarrow{\|\ \|} x_0$.

Упътване: $\|x_n - x_0\|^2 = (x_n, x_n) - (x_0, x_0) - (x_n, x_0) + \overline{(x_n, x_0)} \to 0$. □

Задача 10.2. Нека $l : C[0,1]$ е зададен с $l(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$.
Докажете, че:
а) l е непрекъснат и $\|l\| = 1$, т.е. $\sup\limits_{\|f\|\le 1} |l(f)| = 1$;
б) $\sup\limits_{\|f\|\le 1} |l(f)| = 1$ не се достига;
в) Единичното кълбо $\mathcal{B}(0,1)$ в $C[0,1]$ не е компактно;
г) Единичното кълбо $\mathcal{B}(0,1)$ в $C[0,1]$ не е слабо компактно;
д) $C[0,1]$ не е рефлексивно.
е) Намерете функция $g \in V[0,1]$, такава че $l(f) = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$.

Упътване: б) От $l(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 1$ следва

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1 - f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 1 + f(x)\,dx = 0.$$

Равенство е възможно само когато $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1 - f(x)\,dx = 0$ и $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 1 + f(x)\,dx = 0$.

Задача 10.3. Намерете спрегнатите на следните оператори, действащи в l^2:
а) $S : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$;
б) $T : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
в) $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$;
г) $(Ax)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}$;
д) $P : (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;
е) $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\underbrace{0, 0, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, \ldots)$.

Задача 10.4. Намерете спрегнатите на следните оператори, действащи в $L^2(\mathbb{R})$:
а) $(Sx)(t) = x(t+h), \quad h \in \mathbb{R}$;
б) $(Ax)(t) = a(t)x(t), \quad a(t)$ – непрекъсната и ограничена в $\mathbb{R}$;

11. Общ вид на линейните функционали в някои пространства.

- Общ вид на линейните функционали в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

Общ вид на линейните функционали в l^p.

- При зададено $y \in l^q$ (q е спрегнатия на p показател, т.е. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$), е определен линеен функционал $l_y : l^p \to \mathbb{C}$ с формулата $l_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, при това l_y е ограничен и $\|l_y\| \leq \|y\|_q$ (зад ?).
- Съпоставянето $y \to l_y$ дефинира изображение $i : l^q \to (l^p)'$. То е линейно и непрекъснато, поради $\|i(y)\| = \|l_y\| \leq \|y\|_q$ и $\|i\| \leq 1$.

В действителност това изображение е изометричен ($\|l_y\| = \|y\|_q \ \forall y$) изоморфизъм на банахови пространства, т.е. всички линейни функционали се задават по този начин.

Теорема. Нека $p > 1$ и $q > 1$ са спрегнати показатели. Тогава $(l^p)' = l^q$

Доказателство: (1) Нека l е линеен функционал в l^p. Дефинираме $y_n = \overline{l(e_n)}$, където $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$.

(2) Ще докажем, че $l(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, за всяко $x \in l^p$.

Избираме $x \in l^p$ и нека $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0 \ldots) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Имаме $x^{(n)} \to x$.

$l(x^{(n)}) = l\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$.

Редицата $l\left(x^{(n)}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ клони към $l(x)$, от друга страна $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ представлява парциална сума на реда $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$. Следователно редът е сходящ със сума $l(x)$.

(3) Сега ще докажем, че $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in l^q$.

Нека $x^{(n)} = \left(|y_1|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_1), |y_2|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_2), \ldots, |y_n|^{q-1} \operatorname{sgn}(y_n), 0, 0, \ldots\right)$.

Имаме $\|x^{(n)}\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$ (Заместването на $(q-1)p$ с q идва от равенството $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

За всяко n $\quad |l(x^{(n)})| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \leq \|l\| \|x^{(n)}\|_p = \|l\| \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$.

В неравенството $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \leq \|l\| \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$ съкращаваме на $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$:

За всяко n $\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|l\|$. Оттук $y \in l^q$ и $\|y\|_q \leq \|l\|$.

Този резултат, комбиниран с представянето $l(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = l_y(x)$ доказва теоремата.

□

Общ вид на линейните функционали в $C[a, b]$.

• Функции с ограничена вариация, интеграл на Риман-Стилтес.

Препоръчвана литература: [ЛюстСоб 182-199], [Прод-I 19-45].

Задача 11.1. Нека p и q са спрегнати показатели ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Да изберем $y \in l^q$. Обосновете, че е линейният функционал $l_y : l^p \to \mathbb{C}$, определен с формулата

$$l_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

, е ограничен и $\|l_y\| \leq \|y\|_q$.

Задача 11.2. Нека X е банахово пространство и спрегнатото му X' е сепарабелно. Тогава и X е сепарабелно.

Решение: Нека $\{l_n\}$ е навсякъде гъсто в X'. Избираме $x_n :\ \|x_n\| = 1,\ l_n(x_n) \geq \dfrac{1}{2}\|l_n\|$. Означаваме линейната обвивка на $\{x_n\}$ с X_0. Ще докажем, че X_0 е навсякъде гъсто в X. Допускаме противното, т.е. $\overline{X_0} \subsetneqq X$.

Избираме $\widetilde{x} \notin \overline{X_0}$ и линеен функционал $\widetilde{l}$ със свойствата: $\widetilde{l}_{|X_0} = 0,\ \widetilde{l}(\widetilde{x}) \neq 0$. От гъстотата на $\{l_n\}$ следва, че съществува подредица $l_{n_k} \to \widetilde{l}$. Тогава

$$\|\widetilde{l} - l_{n_k}\| \geq |(\widetilde{l} - l_{n_k})(x_{n_k})| = |l_{n_k}(x_{n_k})| \geq \|l_{n_k}\|.$$

От това неравенство и $\|\widetilde{l} - l_{n_k}\| \to 0$ следва, че $\|l_{n_k}\| \to 0$, $l_{n_k} \to 0$.

От $l_{n_k} \to 0$ и $l_{n_k} \to \widetilde{l}$ получаваме, че $l = 0$, което противоречи на $\widetilde{l}(\widetilde{x}) \neq 0$. □

Задача 11.3. Докажете, че $l^1 \subsetneqq (l^\infty)'$.

Упътване: Доказвали сме, че l^1 е сепарабелно, и че l^∞ не е сепарабелно. След това използвайте горната задача.

С **c** *се означава пространството на всички сходящи числови редици (снабдено с* $\|\ \|_\infty$*). То е затворено подпространство на* l_∞ *и следователно е банахово.*
Следващата задача дава конструкция на конкретен функционал $\in (l^\infty)' \backslash i(l^1)$.

Задача 11.4. В **c** е дефиниран функционал l със формулата $l : x \mapsto \lim x_n$, за $x \in \mathbf{c}$.

а) Докажете, че l е непрекъснат линеен функционал и че $\|l\| = 1$.

б) Продължаваме линейния фунционал (без увеличаване на нормата) до линеен функционал $\widetilde{l} : l_\infty \to \mathbb{C}$. Докажете, че $\widetilde{l}$ *не може* да се запише във вида

$$\widetilde{l}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \overline{y}_k, \qquad \text{където } y \in l^1.$$

Решение: Допускаме, че съществува $y \in l^1$, така че $\widetilde{l}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \overline{y}_k$.

За $x^{(n)} = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, 1, \ldots) \in \mathbf{c}$ имаме:

$$\lim_{k\to\infty} x_k^{(n)} = 1, \quad \text{т.е. } \widetilde{l}(x^{(n)}) = 1.$$

От допускането, че $\widetilde{l}(x^{(n)}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x(n)_k\, \overline{y}_k$ следва, че $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{y}_k = 1$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$.

Достигаме до противоречие, защото

$$\overline{y}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \overline{y}_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \overline{y}_k = 1 - 1 = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

т.е. $y = 0$, откъдето $\widetilde{l} = 0$. $\square$

12. Теорема за отвореното изображение. Теорема за обратния оператор.

Определение. Казваме, че изображение $f : X \to Y$ е отворено, ако за всяко отворено $U \subset X$ образът му $f(U) = \{y = f(x) : x \in U\}$ е отворено в Y.

Лема. Нека X и Y са банахови пространства и $T : X \to Y$ е непрекъснат сюрективен (т.е. $\operatorname{Im} T = Y$) оператор.
Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\eta > 0$, така че $\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon))} \supset \mathcal{O}_Y(0,\eta)$.

Доказателство: Избираме $\varepsilon > 0$, нека $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$.
$X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1)$. От $\operatorname{Im} T = Y$ следва $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(n\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))$.
Представяме обединението във вида $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{T(n\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} \supset \mathcal{O}_Y(0,\mu)$.
Пълното Yе представено като обединение на изброимо много затворени. По теоремата на Бер поне едно от тях има вътрешна точка.
Нека $\overline{T(n_0\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} \supset \mathcal{O}(y,\mu)$, следователно $\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} \supset \mathcal{O}(\frac{y}{n_0}, \frac{\mu}{n_0}) = \mathcal{O}(y_1,\mu_1)$.

$$\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon))} = \overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1)) - T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} \supset$$

$$\supset \overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} - \overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))} \supset \mathcal{O}(y_1,\mu_1) - \mathcal{O}(y_1,\mu_1).$$

Последното множество е отворено и съдържа 0. □

Теорема (за отвореното изображение). Нека X и Y са банахови пространства и $T : X \to Y$ е непрекъснат сюрективен оператор (т.е. $\operatorname{Im} T = Y$).
Тогава T е отворено изображение.

Доказателство: Избираме произволно $\varepsilon > 0$. Според горната лема съществува $\eta > 0$, така че $\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon))} \supset \mathcal{O}(0,\eta)$.
1. Ще докажем, че $T(\mathcal{O}_X(0,2\varepsilon)) \supset \mathcal{O}_Y(0,\eta)$, т.е. че
за всяко y с $\|y\| < \eta$ съшествува x с $\|x\| < 2\varepsilon$, така че $Tx = y$.
1.1. Означаваме $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{2^n}$, $\eta_0 = \eta$, $\eta_n = \dfrac{\eta}{2^n}$.
1.2. С хомотетия от $\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon))} \supset \mathcal{O}_Y(0,\eta)$ получаваме $\overline{T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_n))} \supset \mathcal{O}(0,\eta_n)$, т.е. $T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_n))$ е гъсто в $\mathcal{O}_Y(0,\eta_n)$.
1.3. Нека $y : \|y\| < \eta_0 = \eta$. $T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_0))$ е гъсто в $\mathcal{O}_Y(0,\eta_0)$.
Следователно съществува x_1 с $\|x_1\| < \varepsilon_0$, така че $\|y - Tx_1\| < \eta_1$.
Имаме $\|y - Tx_1\| < \eta_1$. $T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_1))$ е гъсто в $\mathcal{O}_Y(0,\eta_1)$.
Следователно съществува x_2 с $\|x_2\| < \varepsilon_1$, така че $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \eta_2$.
Имаме $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \eta_2$. $T(\mathcal{O}_X(0,\varepsilon_2))$ е гъсто в $\mathcal{O}_Y(0,\eta_2)$.
Следователно съществува x_3 с $\|x_3\| < \varepsilon_2$, така че $\|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3\| < \eta_3$.
По индукция, за всяко n
съществува x_n с $\|x_n\| < \varepsilon_{n-1}$, така че $\|y - Tx_1 - Tx_2 - Tx_3 - \ldots - Tx_n\| < \eta_n$.
1.4. От $\|x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ получаваме, че реда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ е сходящ. Нека $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. При това $\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = 2\epsilon$.

1.5. Индукцията ни дава $\|y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\| < \eta_n$.
Правим граничен преход: $\lim\left(y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right) \to 0$, т.е. $y - T\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right) = 0$, $y = Tx$.
2. ... □

Следствие (теорема за обратния оператор) Нека X и Y са банахови пространства и $T : X \to Y$ е непрекъснат биективен оператор (еднозначно и обратимо изображение).
Тогава T^{-1} е непрекъснат оператор. □

• Нека X и Y са нормирани пространства.
$X \times Y$ с операциите $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ е линейно пространство.
• Дефинираме $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$. $X \times Y$ се превръща в нормирано пространство. $X \times Y$ е пълно, ако X и Y са пълни.

• График Γ_T на линеен, не задължително ограничен оператор $T : \mathcal{D} \to Y$, дефиниран в $\mathcal{D} \subset X$ наричаме $\Gamma_T = \{\forall(x, Tx) : x \in \mathcal{D}\} \subset X \times Y$. Казваме, че T е затворен оператор, ако Γ_T е затворено подмножество на $X \times Y$.

Теорема (за затворения график). Нека X и Y са банахови пространства и $T : X \to Y$ е затворен оператор (дефиниран в цялото X). Тогава T е непрекъснат.

Доказателство: $X \times Y$ е банахово, защото такива са X и Y. Графикът Γ_T на T е линейно подпространство, затворено по условие. Следователно Γ_T е също банахово пространство.
Изображението $U_1 : \Gamma_T \to X$, $U_1((x, Tx)) = x$ е очевидно линейно, непрекъснато и биективно.
Следователно обратният оператор U_1^{-1} е непрекъснат.
Изображението $U_2 : \Gamma_T \to Y$, $U_2((x, Tx)) = y$ е също линейно и непрекъснато.

Представянето $T = U_2 \circ U_1^{-1}$ доказва непрекъснатостта на T. □
Препоръчвана литература: [Йосида,112-117]

Задача 12.1. Непрекъснатите функции не са непременно отворени. Дайте пример. Сравнете с характеристичното свойство на непрекъснатите:
$f : X \to Y$ е непрекъсната точно когато за всяко отворено $V \subset Y$ пълния му прообраз $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ е отворен в X.

Задача 12.2. Нека $X = Y = C[0, 2\pi]$ и $\mathcal{D} = C^1[0, 2\pi]$. Докажете, че $T : \mathcal{D} \to Y$, $f \mapsto f'$ е затворен, но не е непрекъснат.

Задача 12.3. а) Всеки непрекъснат оператор $A : X \to Y$ има затворен график.
б) Ако A е оператор със затворен график и съществува обратен A^{-1}, то и A^{-1} е оператор със затворен график.

• *Теоремата за затворения график е удобна при доказателство на непрекъснатост на оператори. По-подробно, нека разгледаме условията:*
(i) $x_n \to x_0$;
(ii) $Tx_n \to y_0$;
(iii) $Tx_0 = y_0$.
Директен извод, че T е непрекъснат, означава от **(i)** *да изведем* **(ii)** *и* **(iii)**.
Използвайки горната теоремата, от **(i)** *и* **(ii)** *трябва да изведем* **(iii)**.

Задача 12.4. (Теорема на Хефлингер-Тьоплиц)
Нека H е хилбертово пространство и $A : H \to H$ (дефиниран в цялото H оператор, не е дадено по условие, че е непрекъснат) със свойството:

$$\forall x, y \in H \quad (Ax, y) = (x, Ay).$$

Тогава A е непрекъснат.

Решение: Ще докажем, че Γ_A е затворен. Избираме редица в Γ_A: $(x_n, Ax_n) \to (x_0, y_0)$. Трябва да установим, че $(x_0, y_0) \in \Gamma_A$, т.е. че $Ax_0 = y_0$.

$$\forall z \in H \quad (z, y_0) = \lim(z, y_n) = \lim(z, Ax_n) = \lim(Az, x_n) = (Az, x_0) = (z, Ax_0).$$

Оттук Γ_A е затворен, A е непрекъснат. □

Бази в банахово пространство

• Казваме, че фамилията $\{e_n\}$ е база в банаховото пространство X, ако за всеки елемент $x \in X$ съществува, при това единствено, представяне $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$.
[ЛюСо, 270-271]

Досега сме доказали теорема за попълнение на нормирани пространства. Хилбертовите са, разбира се, банахови. Нека сега е зададено предхилбертово пространство H_0 (т.е. H_0 може да не е пълно по отношение на нормата, зададена от скаларното произведение). Можем да го попълним до пълно нормирано. Остава обаче въпроса, дали в попълнението има скаларно произведение, продължение на първоначалното скаларно произведение.

Задача 12.5. Нека $(H_0, (\ )_0)$ е предхилбертово и H е попълнението му (до пълно нормирано пространство) спрямо нормата, определена от скаларното произведение. Тогава в H съществува скаларно произведение $(\ )$, което е продължение на скаларното произведение $(\ )_0$ в H_0. Нормата в H се определя от скаларното произведение $(\ )$ в H.

Регулярни методи за сумиране на редове. Теорема на Тьоплиц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Чезаро}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Задача 12.6. (Тьоплиц) Необходими и достатъчни условия да бъде регулярен метода на сумиране, определен от матрицата A, са:
1) $\lim_n a_{nk} = 0$
2) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$
3) Съществува M, така че $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \le M,\ n = 1, 2, \dots$.

Упътване: Нека $\mathbf{c} = \{$всички сходящи редици$\}$.
Правим тестове с елементите $x_\infty = (1, 1, \dots)$, $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Фамилията $\{x_n\}$ е плътна в $\mathbf{c}$, използваме НДУ за слаба *-сходимост на линейни функционали. □
13. Оператори в хилбертово пространство.

13. Оператори в хилбертово пространство.

Задача 13.1.

Задача 13.2.

14. Компактни оператори. Основни свойства.

В този въпрос се предполага, че X, Y и Z са нормирани пространства и $A : X \to Y$ е линеен оператор.

Определение. Казваме, че $A : X \to Y$ е компактен (напълно непрекъснат) оператор, ако образът на всяко ограничено подмножество на X е предкомпактно подмножество на Y.
Еквивалентно определение: ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена в X редица, то за редицата $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ съществува сходяща подредица.

Теорема 1. Ако $A : X \to Y$ е компактен оператор, то A е ограничен. □

Доказателство: A изобразява единичното кълбо $B_X(0,1)$ в предкомпактното множество $S = A\left(B_X(0,1)\right)$. Предкомпактно подмножество има крайна ε-мрежа, следователно е ограничено. Оттук A е ограничен оператор. □

• Оператор A, за които $\operatorname{Im} A$ е крайномерно линейно пространство наричаме крайномерен оператор. Крайномерните оператори са компактни.

• Ако X не е крайномерно пространство, то единичният оператор $I : X \to X$ *не* е компактен (чрез теоремата на Рис за почти перпендикуляра).

Теорема 2. Ако A е компактен и $x_n \underset{w}{\longrightarrow} x_0$, то $Ax_n \xrightarrow{\|\,\|} x_0$. □

Определение. $\mathcal{K}(X,Y) = \{A : X \to Y : A$ е компактен$\}$. Ако $X = Y$, то с $\mathcal{K}(X,Y)$ означаваме с $\mathcal{K}(X)$. □

Теорема 3. Нека $X \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{A} Z$. Тогава
а) ако $B \in \mathcal{K}(X,Y)$, $AB \in \mathcal{K}(X,Z)$;
б) ако $A \in \mathcal{K}(Y,Z)$, $AB \in \mathcal{K}(X,Z)$. □

Следствие. $\mathcal{K}(X)$ не съдържа обратими оператори, ако X не е крайномерно.

Доказателство: От допускането, че компактният оператор A има непрекъснат обратен A^{-1} следва, че и тяхното произведение $A^{-1}A = I$ е компактен оператор. Но единичният оператор е компактен точно когато X е крайномерно пространство, противоречие. □

Теорема 3. а) $\mathcal{K}(X,Y)$ е линейно пространство.
б) $\mathcal{K}(X,Y)$ е затворено подпространство на $\mathcal{B}(X,Y)$.

Доказателство: а) Ще докажем, че $\mathcal{K}(X,Y)$ е затворено спрямо операциите събиране и умножение с константа.
1.1. Нека A' и A'' са компактни оператори, които изобразяват единичното кълбо $B_X(0,1)$ в $S' = A'\left(B_X(0,1)\right)$ и $S'' = A''\left(B_X(0,1)\right)$.
Нека $y'_1, y'_2, \ldots, y'_k$ е ε-мрежа за S', а $y''_1, y''_2, \ldots, y''_l$ е ε-мрежа за S''.
Множеството $\{y'_i + y''_j : i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, l\}$ е 2ε-мрежа за $(A' + A'')\left(B_X(0,1)\right)$, както следва от неравенството:

$$\|(A' + A'')(x) - y'_i - y''_j\| \le \|A'(x) - y'_i\| + \|A''(x) - y''_j\| < 2\varepsilon.$$

Следователно $A' + A''$ е компактен оператор.

1.2. Аналогично $\lambda y_1', \lambda y_2', \ldots, \lambda y_k'$ е $|\lambda|\varepsilon$-мрежа за $\lambda S' = (\lambda A')\,(B_X(0,1))$.
Следователно $\lambda A'$ е компактен оператор, $\mathcal{K}(X,Y)$ е затворено спрямо операцията умножение.
б) Нека $\{A_n\}$ е редица от компактни оператори, $A_n \to A_0$. Ще докажем, че A_0 е също компактен оператор.
Избираме $\varepsilon > 0$.
Нека $\|A_m - A_0\| < \varepsilon$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k$ да е ε-мрежа за $A_m\,(B_X(0,1))$.
Този набор от точки е 2ε-мрежа за $A_0\,(B_X(0,1))$:

$$\|A_0(x) - y_i\| \leq \|A_0(x) - A_m(x)\| + \|A_m(x) - y_i\| < 2\varepsilon.$$

Следователно A_0 е компактен оператор, $\mathcal{K}(X,Y)$ е затворено подпространство на $\mathcal{B}(X,Y)$. □

Теорема 4. Ако $A \in \mathcal{K}(X,Y)$, то $A^* \in \mathcal{K}(Y',X')$.

Доказателство: Означаваме с $B = B_X(0,1)$ затвореното единично кълбо в X и с $B' = B_{Y'}(0,1)$ затвореното единично кълбо в Y'.
Имаме, че $A(B)$ е предкомпактно, т.е. $S = \overline{A(B)}$ е компактно. Ще докажем, че $A'(B')$ е предкомпактно, откъдето и A^* ще бъде компактен.
Избираме $l_Y \in B'$, т.е $\|l_Y\| \leq 1$. На $A'(l_Y)$ съпоставяме функция $g : S \to \mathbb{C}$, чиито стойност в $y = \lim Ax_n, x_n \in B$ се определят чрез формулата $g(y) = g(\lim Ax_n) = \lim l_Y(Ax_n)$. Проверете коректността на дефиницията на g.
Така дефинираната функция е непрекъсната, защото в действителност е ограничение на непрекъснатия l_Y върху S.
По такъв начин получаваме изображение $\Phi : A^*(B') \to C(S)$.
Φ е очевидно линейно. Ще докажем, че то е изометрия (т.е запазва нормите):

$$\|A'(l_Y)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |A^* l_Y(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |l_Y(Ax)|$$

$$\|g\| = \sup_{y\in S} g(y) = \sup_{\|x\|\leq 1} g(Ax) = \sup_{\|x\|\leq 1} |l_Y(Ax)|.$$

От изометричността на Φ следва, че Φ е непрекъсната инекция (различни отиват в различни) и можем да идентифицираме $A^*(B')$ с подмножество на $C(S)$.
Непосредствено се проверява, че $g_l : l \in B'$ е равномерно ограничено и равностепенно непрекъснато.
Равномерна ограниченост: $\|l(Ax)\| \leq \|l\|\|Ax\| \leq \|A\|$.
Равностепенна непрекъснатост: $|l(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|$.
Според теоремата на Арцела $g_l : l \in B'$, а с това и $A^*(B')$ са предкомпактни. □

Преработка

Следствие. $\mathcal{K}(X)$ е затворен двустранен идеал. Ако H е хилбертово пространство, то $\mathcal{K}(H)$ е затворен самоспрегнат двустранен идеал. □

Задача 14.1. Докажете твърденията, изказани в горните примери:
а) Крайномерните оператори са компактни.
б) Докажете, че общият вид на крайномерен оператор $A : X \to Y$ е

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) y_i, \quad \text{където } l_i \in X' \quad \text{и } y_i \in Y.$$

в) Ако X не е крайномерно пространство, то единичният оператор $I : X \to X$ *не* е компактен.

Границата на сходяща по норма редица от компактни оператори е компактен. Границата на силно сходяща редица от компактни оператори може да **не** *е компактен оператор.*

Задача 14.2. Нека редицата от оператори $A_n : l^2 \to l^2$ е зададена с

$$A_n : (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Докажете, че:
а) A_n са компактни;
б) За всяко $x \in X$ е в сила $A_n x \xrightarrow{\| \, \|} x$, т.е. $A_n \underset{s}{\longrightarrow} I$.

Ако A е компактен оператор, то $A\left(B_X(0,1)\right)$ е предкомпактно подмножество на Y. Възможно е това множество да не е затворено, значи да не е компактно.
A' е също компактен оператор, при това $A'\left(B'_Y(0,1)\right)$ е винаги компактно подмножество на X'.

Задача 14.3. Нека $A : C[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]$ се задава с формулата

$$Ax(s) = y(s) = \int_{-1}^{s} x(t)dt \quad \text{(неопределен Риманов интеграл).}$$

Докажете, че образът на единичното кълбо е предкомпактен, но не и компактен.

Решение: Попълнете липсващите детайли:
1) A е компактен оператор (ще бъде обосновано в следващия въпрос).

2) $x_n \in C[-1,1]$ и $\|x_n\| = 1$ за $x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{ако } -1 \le t \le 0, \\ nt & \text{ако } 0 < t \le \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{ако } \dfrac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$

3) $y_n = (Ax_n)(s) = \begin{cases} 0 & \text{ако } -1 \le s \le 0, \\ \dfrac{ns^2}{2} & \text{ако } 0 < s \le \dfrac{1}{n}, \\ s - \dfrac{1}{2n} & \text{ако } \dfrac{1}{n} < s \le 1. \end{cases}$

4) $y_n \xrightarrow{\|\,\|_\infty} y_0$, където $y_0(s) = \begin{cases} 0 & \text{ако } -1 \le t \le 0, \\ s & \text{ако } 0 < s \le 1. \end{cases}$

5) Всяка функция $y = Ax$ има непрекъсната производна.

6) $y_0(s)$ няма производна при $s = 0$, следователно не може да се представи във вида $y_0 = Ax$. □

Задача 14.4. Нека $A : X \to Y$ е компактен оператор и $A' : Y \to X$ е неговият спрегнат. Докажете, че $A'\left(B'_Y(0,1)\right)$ е компактно подмножество на X'.

Задача 14.5. Нека X е банахово пространство с база. Тогава всеки компактен оператор е граница на крайномерни оператори.

Задача 14.6. Дайте пример на оператор $A : X \to X$, който не е компактен, а оператора A^2 е компактен.
Упътване: Разгледайте $X = Y \times Y$ и $A : Y \times Y \to Y \times Y$, дефиниран с $A(y_1, y_2) = (0, y_1)$.

Задача 14.7. Докажете, че образът $\operatorname{Im} A$ на компактен оператор е сепарабелно множество.
Упътване: Използвайте, че ако M_n е $\frac{1}{n}$–мрежа на $A(B_X(0,1))$, то $\bigcup_n M_n$ е изброимо и навсякъде гъсто в $A(B_X(0,1))$, а $\mathbb{Q}\bigcup_n M_n$ е изброимо и навсякъде гъсто в $A(X)$.

В безкрайномерно пространство компактен оператор не може да има ограничен обратен оператор. Възможно е компактен оператор да има обратен (в алгебричния смисъл) оператор; обратният ще е неограничен.

Задача 14.8. $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{2^2}, \ldots)$ е компактен оператор, но има обратен (в алгебричен смисъл) оператор.

Задача 14.9. В прстранството l^2 операторът A действа по формулата:

$$A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Докажете, че A е компактен точно когато $\alpha_n \to 0$.

Задача 14.10. Нека $A : l^2 \to l^2$ е записан в матричен вид (безкрайна матрица спрямо стандартния базис):

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и матрицата на оператора A има свойството: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$.

Докажете, че операторът A е компактен.

Упътване: Покажете, че съществува N, за което $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| - \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}| < \varepsilon$.

Ако $(A_N x)_i = \sum_{j=1}^{\mathbb{N}} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$, оценете $A - A_N$.
Твърдението следва от това, че A_N са крайномерни и $A_N \to A$.

Задача 14.11. Нека компактният оператор $A : l^2 \to l^2$ е записан в матричен вид. Съществуват компактни оператори, за които редът $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ е разходящ.
Упътване: Разгледайте $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots)$, за подходяща редица $\{\alpha_n\}$.

Задача 14.12. Нека $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ е оператор на Хилберт-Шмидт с ядро $K(s,t)$ (т.е. $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds dt < \infty$).
Записваме A в матричен вид: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$, където $a_{ij} = (Ae_i, e_j)$.
Докажете, че $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$.

Задача 14.13. Може ли да е компактен операторът M_a на умножение с функция $a(t) \quad (M_a x(t) = a(t)x(t))$
а) в $C[a,b]$;
б) в $C(X)$, където X е метрично пространство?
Упътване: а) Не. б) Разгледайте случая, когато X има изолирани точки.

Задача 14.14. Може ли да е компактен операторът M_a на умножение с функция $a(t) \quad (M_a x(t) = a(t)x(t))$
а) в $L^2[a,b]$;
б) в $L^2(X, \mu)$, където μ е мярка в множвството X?
Упътване: а) Не. б) Разгледайте случая, когато X има точки с ненулева мярка.

Задача 14.15. Нека D е ограничено затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$. В $C(D)$ разглеждаме интегралния оператор A с ядро $K(s,t)$.
Нека ядрото удовлетворява условията:
а) $\int_D |K(s,t)| \, dt$ е ограничена функция (на $s \in D$);
б) За всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ, така че от $|s_1 - s_2| < \delta$ да следва
$\int_D |K(s_1,t) - K(s_2,t| \, ds < \varepsilon$.
Докажете, че при тези предположения A е компактен оператор.

Теореми на Рис за компактни оператори.

Ще предполагаме, че X е банахово пространство над $\mathbb{C}$, $A : X \to X$ е компактен оператор и ще се интересуваме от свойствата на $T = I - A$ (I е единичният оператор в X).

Означения. $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$, $\operatorname{Coker} T$.

Теорема 1. $\operatorname{Ker} T$ е крайномерно пространство. □

Доказателство:

□

Лема. Съществува константа C, така че за всяко $y \in \operatorname{Im} T$ съществува $x \in X$ със свойствата: $y = Tx$ и $\|x\| \leq \mathrm{C}\,\|y\|$. □

Теорема 2. $\operatorname{Im} T$ е затворено подпространство на X. □

Теорема 3. Съществува единствено естествено число r (число на Рис), така че $\{0\} \subsetneqq \operatorname{Ker} T \subsetneqq \operatorname{Ker} T^2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \operatorname{Ker} T^r = \operatorname{Ker} T^{r+1} = \operatorname{Ker} T^{r+2} \ldots$;

$X \supsetneqq \operatorname{Im} T \supsetneqq \operatorname{Im} T^2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq \operatorname{Im} T^r = \operatorname{Im} T^{r+1} = \operatorname{Im} T^{r+2} \ldots$.

Освен това $X = \operatorname{Ker} T^r \bigoplus \operatorname{Im} T^r$. □

Следствие. $\operatorname{Coker} T$ е крайномерно пространство. □

15. Спектрална теорема за компактни самоспрегнати оператори

16. Алтернатива на Фредхолм.

В този въпрос се предполага, че H е хилбертово пространство над $\mathbb{C}$, $A : H \to H$ е компактен оператор и ще се интересуваме от свойствата на $T = I - A$ (I е единичния оператор в H).

Означения. $\operatorname{Ker} T = \{x \in X : Tx = 0\}$, $\operatorname{Im} T = \{y \in Y : \exists x \in X \ y = Tx\}$, $(\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, $(\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$.

Теорема 1. $\operatorname{Ker} T$ е крайномерно пространство.

Доказателство: $\operatorname{Ker} T$ е затворено линейно подпространство на H. За $x \in \operatorname{Ker} T$ имаме $Tx = 0$, т.е. $Ax = x$.

Следователно ограничението $A_{|\operatorname{Ker} T}$ на A върху $\operatorname{Ker} T$ е единичния оператор $I_{\operatorname{Ker} T}$. Операторът $A_{|\operatorname{Ker} T} = I_{\operatorname{Ker} T}$ е компактен, оттук пространството $\operatorname{Ker} T$ е крайномерно. □

Теорема 2. $\operatorname{Im} T$ е затворено подпространство на H.

Доказателство: Нека вземем сходяща редица $Tx_n \to y_0$ в $\operatorname{Im} T$. Трябва да докажем, че $y_0 \in \operatorname{Im} T$.

БОО можем да смятаме, че $x_n \perp \operatorname{Ker} T$, подменяйки x_n с проекциите им в $\operatorname{Ker} T^{\perp}$.

В сила е алтернативата: редицата $\{\|x_n\|\}$ или е неограничена, или е ограничена. Допускаме, че е неограничена. БОО, минавайки към подредици, можем да смятаме, че $\|x_n\| \to \infty$. От $Tx_n \to y_0$, т.е. $x_n - Ax_n \to y_0$ следва

$$\frac{1}{\|x_n\|}(x_n - Ax_n) \to \lim \left(\frac{1}{\|x_n\|} y_0\right) = 0.$$

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \to 0.$$

БОО, минавайки към подредици, можем да смятаме, че $\left\{A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\}$ е сходяща. От горното равенство следва, че и $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ е сходяща, $\frac{x_n}{\|x_n\|} \to x_0$.

Противоречие с горното допускане получаваме така:

x_0 е граница на единични вектори от $\operatorname{Ker} T^{\perp}$, следователно $\|x_0\| = 1$ и $x_0 \in \operatorname{Ker} T^{\perp}$; от друга страна $x_0 - Ax_0 = 0$, т.е. $Tx_0 = 0$ и $x_0 \in \operatorname{Ker} T$.

Полученото противоречие доказва, че редицата $\{\|x_n\|\}$ е ограничена. Отново преминаваме към подредици и смятаме, че $\{Ax_n\}$ е сходяща. Тогава от $x_n - Ax_n \to y_0$ следва, че и $\{x_n\}$ е сходяща, $x_n \to x_0$ и след граничен преход $Tx_0 = y_0$. □

Теорема 3. $y \in \operatorname{Im} T \Leftrightarrow y \in (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp}$.

Доказателство: $\Rightarrow$: Нека $y \in \operatorname{Im} T$ и $f \in \operatorname{Ker} T$. Трябва да докажем, че $f(y) = 0$.

От $y \in \operatorname{Im} T$ следва, че $y = Tx$ и имаме $f(y) = (y, f) = (Tx, f) = (x, T^* f) = (x, 0) = 0$.

$\Leftarrow$: Нека y е такова, че $f(y) = 0$ за всяко $f \in \operatorname{Ker} T^*$. Трябва да докажем, че $y \in \operatorname{Im} T$.

Допускаме, че $y \notin \operatorname{Im} T$. Тогава (имаме вече, че $\operatorname{Im} T$ е затворено) $d = d(y, \operatorname{Im} T) > 0$.

По Хан-Банах съществува $f \in X'$ със свойствата: $f(y) = 1$ и $f_{|\operatorname{Im} T} = 0$.

Но от $f_{|\operatorname{Im} T} = 0$ следва, че $f \in \operatorname{Ker} T^*$:

$\forall x \ (Tx, f) = 0$, оттук $\forall x \ (x, T^* f) = 0$, следователно $T^* f = 0$ и $f \in \operatorname{Ker} T^*$.

Това е противоречие с допускането, следователно $y \in \operatorname{Im} T$. □

Следствие. $(\operatorname{Ker} T^*) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Im} T = X$.

Теорема 4. $g \in \operatorname{Im} T^* \Leftrightarrow g \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Доказателство: $\Rightarrow$: Нека $g \in \operatorname{Im} T^*$, т.е. $g = T^* f$. Ще докажем, че $g \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$, т.е. че за всяко x, за което $Tx = 0$, е в сила $(x, g) = 0$.
Избираме произволно $x \in \operatorname{Ker} T$, т.е. $Tx = 0$.
Имаме $(x, g) = (x, T^* f) = (Tx, f) = (0, f) = 0$.
$\Leftarrow$: От предишни теореми ще използваме, че:
$\operatorname{Ker} T$ е крайномерно, следователно има представяне на X във вида $X = \operatorname{Ker} T \bigoplus X_1$.
$\operatorname{Im} T$ е затворено. Означаваме $T_1 : X_1 \to \operatorname{Im} T$ (засега не е ясно дали $\operatorname{Im} T$ е допълняемо); T_1 е непрекъснат, следователно (по теоремата за обратния оператор) имаме непрекъснат обратен.
Нека сега $g \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$, т.е. за всяко x с $Tx = 0$ следва, че $(x, g) = 0$. Трябва да докажем, че $g = T^* f$, за някое $f \in X'$.

□

Теорема 5. $\operatorname{Im} T = X \Leftrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$.

Теорема 6. $\dim \operatorname{Im} \mathrm{T} = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{T} = \{0\}$.

Теорема 7. (Алтернатива на Фредхолм.) Нека X и $A : X \to X$ е компактен оператор. Разглеждаме уравненията:

(1)	$Ax - \lambda x = 0$	(1′)	$A'f - \lambda f = 0$
(2)	$Ax - \lambda x = y$	(2′)	$A'f - \lambda f = g$

В сила е точно една от следните две възможности:

I.
- Хомогенното уравнение (1) има само нулевото решение.
- Хомогенното уравнение (1′) има само нулевото решение.
- Нехомогенното уравнение (2) има, при това единствено решение при произволна дясна част.
- Нехомогенното уравнение (2′) има, при това единствено решение при произволна дясна част.

II.
- Хомогенното уравнение (1) има ненулево решение. Тогава множеството L от решенията на (1) е крайномерно линейно пространство.
- Хомогенното уравнение (1′) има ненулево решение. Тогава множеството L' от решенията на (1′) е крайномерно линейно пространство. При това $\mathrm{dimL} = \mathrm{dimL}'$.
- Нехомогенното уравнение (2) има решение само когато $y \in L'^\perp$.
- Нехомогенното уравнение (2′) има решение само когато $g \in L^\perp$.

Недовършена преработка на АФ от случая за банахови в случая за хилбертови.

Известното в крайномерния случай.

• Нека X и Y са крайномерни линейни пространства и $T : X \to Y$ е линеен оператор. Имаме:

$$\dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Ker\ T} = \dim \mathrm{Y} - \dim \mathrm{Coker\ T} = \mathrm{rank\,T}$$

$$\dim \mathrm{Y} - \dim \mathrm{Ker\ T^*} = \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Coker\ T^*} = \mathrm{rank\,T^*}$$

$$\mathrm{rank\,T} = \mathrm{rank\,T^*} \qquad \text{(теорема за ранга)}$$

Оттук следва:

$$\dim \mathrm{Ker\,T} = \dim \mathrm{Coker\ T^*}$$

$$\dim \mathrm{Ker\,T^*} = \dim \mathrm{Coker\ T}$$

$$\mathrm{ind\,T} = -\mathrm{ind\,T^*}$$

Полуточни и точни редици

Определение. Казваме, че редицата

$$\Gamma : \quad \ldots \longrightarrow X_{k-1} \xrightarrow{T_k} X_k \xrightarrow{T_{k+1}} X_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

е *полуточна*, ако $\mathrm{Im}\,T_k \subset \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$ и че е *точна*, ако $\mathrm{Im}\,T_k = \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$.

Теорема 1. Ако редицата $\Gamma : \quad \cdots \longrightarrow X_{k-1} \xrightarrow{T_k} X_k \xrightarrow{T_{k+1}} X_{k+1} \longrightarrow \cdots$ е точна, то и редицата $\Gamma' : \quad \ldots \longleftarrow X'_{k-1} \xleftarrow{T'_k} X'_k \xleftarrow{T'_{k+1}} X'_{k+1} \longleftarrow \ldots$ е точна.

Доказателство.
• $\mathrm{Im}\,T'_k \subset \mathrm{Ker}\,T'_{k+1}$:
Включването $\mathrm{Im}\,T_k \subset \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$ е еквивалентно с $T_{k+1}T_k = 0$. Спрягаме това равенство и получаваме $T'_kT'_{k+1} = 0$, което пък е еквивалентно с $\mathrm{Im}\,T'_k \subset \mathrm{Ker}\,T'_{k+1}$.

• $\mathrm{Im}\,T'_k \supset \mathrm{Ker}\,T'_{k+1}$:
1. Избираме $x^*_k \in \mathrm{Ker}\,T'_k$. Ще докажем, че $x^*_k \in \mathrm{Im}\,T'_{k+1}$.
2. За избрания x^*_k и при всяко $x_{k-1} \in X_{k-1}$ имаме $0 = (x_{k-1}, T'_kx^*_k) = (T_kx_{k-1}, x^*_k)$.
3. За ограничението на x^*_k до $\mathrm{Im}\,T_k$ получихме, че $x^*_k\big|_{\mathrm{Im}\,T_k}$, но $\mathrm{Im}\,T_k = \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$, следователно $x^*_k\big|_{\mathrm{Ker}\,T_{k+1}}$.
4. Дефинираме x^*_{k+1}, определен върху $\mathrm{Im}\,T_{k+1}$ с формулата $(T_kx_k, x^*_{k+1}) = (x_k, x^*_k)$. Необходимо е да се обоснове коректността на дефиницията и ограничеността на x^*_{k+1}.
5. Коректност на дефиницията x^*_{k+1}. Ако за $y = T_kx_k$ има и друго представяне $T_k\widetilde{x_k}$, то $T_kx_x = T_k\widetilde{x_x} \Rightarrow T_k(x_k - \widetilde{x_k})$, т.е. $(x_k - \widetilde{x_k}) \in \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$. Съгласно (3) имаме $(x_k - \widetilde{x_k}, x^*_k) = 0$, т.е. $(x_k, x^*_k) = (\widetilde{x_k}, x^*_k)$, следователно дефиницията на x^*_{k+1} е коректна.
6. Ограниченост на x^*_{k+1}.

6.1. Разглеждаме оператора $T : X_k/\,\mathrm{Ker}\,T_{k+1} \longrightarrow \mathrm{Im}\,T_{k+1}$, $T(\widetilde{x}) = T_{k+1}(x)$ (означаваме $\widetilde{x} = x + \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$). От $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{k \in \mathrm{Ker}\,T_{k+1}} \|x + k\|$ и $\|T\widetilde{x}\| = \|T(x + k)\| \leq \|T\|\|x + k\|$, където $k \in \mathrm{Ker}\,T_{k+1}$ получаваме $\|T\widetilde{x}\| \leq \|T\|.\inf\limits_k \|x + k\|$ и следователно T

е непрекъснат. И така, T е непрекъснат, биекция, $\operatorname{Im} T$ е затворено ($\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker} T_{k+1}$) и по Теоремата на Банах съществува обратен на T оператор S.
6.2. $|x^*_{k+1}(x_{k+1})| = |(x_{k+1}, x^*_{k+1})| = |(T_{k+1}Sx_{k+1}, x^*_{k+1})| = |(Sx_{k+1}, x^*_k)| \leq \|S\|\|x_{k+1}\|\|x^*_k\|$.
Оттук следва, че x^*_{k+1} е непрекъснат и $T'_{k+1}(x^*_{k+1}) = x^*_k$. □

Определение. Казваме, че оператор $T : X \longrightarrow Y$ е фредхолмов, ако
1. $\operatorname{Im} T$ е затворен.
2. $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{T} < \infty$.
3. $\dim \operatorname{Coker} \mathrm{T} < \infty$ (да припомним, че $\operatorname{Coker} T = Y/\operatorname{Im} T$).

За фредхолмов оператор се дефинира индекс indT на оператора с

$$\operatorname{ind} \mathrm{T} = \dim \operatorname{Ker} \mathrm{T} - \dim \operatorname{Coker} \mathrm{T}.$$

Теорема 2. Нека $TX \longrightarrow Y$ е фредхолмов оператор. Тогава $T' : Y' \longrightarrow X'$ е също фредхолмов и

$$\dim \operatorname{Ker} \mathrm{T} = \dim \operatorname{Coker} \mathrm{T}'; \quad \dim \operatorname{Ker} \mathrm{T}' = \dim \operatorname{Coker} \mathrm{T}; \quad \mathrm{indT} = -\mathrm{indT}'$$

Почти обратими оператори

Определение. Казваме, че оператор $T : X \longrightarrow Y$ е почти обратим, ако съществуват оператори $S_1 : Y \longrightarrow X$ и $S_2 : Y \longrightarrow X$, такива че $S_1T = I_X + K_1$ и $TS_2 = I_Y + K_2$, където $K_1 \in \mathcal{K}(X)$ и $K_2 \in \mathcal{K}(Y)$.

Теорема 3. Всеки фредхолмов оператор е почти обратим.

Доказателство. Ще използваме факта, че в банахово пространство всяко крайномерно пространство е допълняемо, откъдето можем да представим X във вида $X_0 \oplus \operatorname{Ker} T$. Също така, пространство с крайномерно коядро е допълняемо, можем да представим Y във вида $Y_0 \oplus N$, където $Y_0 = \operatorname{Im} T$ и N е изоморфно с $Y/\operatorname{Im} T$.

Разглеждаме $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ – ограничението на T до X_0. T_0 е непрекъсната биекция между пълните пространства X_0 и Y_0. По Теоремата на Банах съществува непрекъснат обратен оператор $S_0 : Y_0 \longrightarrow X_0$. Дефинираме оператор S, който изобразява елемент $y = y_0 + n$ ($y_0 \in Y_0$ и $n \in N$) в $S_0(y_0)$. Вижда се, че $S_1 = S_2 = S$ гарантира, че T е почти обратим. □

Теорема 4. Нека $A : X \to X$ е компактен оператор. Тогава $T = I - A$ е фредхолмов.

Доказателство. Както в предната теорема, ще използваме разлагането $X = X_0 \oplus \operatorname{Ker} T$ и оператора $T_0 : X_0 \longrightarrow \operatorname{Im} T$ (има различие със ситуацията от Теорема 3: не знаем дали $\operatorname{Im} T$ е затворено пространство).

T_0 е биекция и съществува обратен (в алгебричн смисъл, не знаем дали е непрекъснат) оператор S_0.

1. Ще докажем, че S_0 е ограничен.

S_0 е ограничен $\Leftrightarrow \exists C$, така че $\dfrac{\|S_0 y\|}{\|y\|} \leq C$ $\exists C$, така че $\|T_0 x\| \geq \dfrac{1}{C}\|x\|$.

Допускаме противното. Тогава съществува $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X_0 със свойствата: $\|x_n\| = 1$ и $\|T_0 x_n\| \leq \dfrac{1}{n}$. От факта, че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, следва че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ има сходяща подредица (по определението на компактен оператор); Преминавайки, ако е необходимо, към подредици, можем да смятаме, че $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

Имаме $T_0 x_n \to 0 \Leftrightarrow x_n - Ax_n \to 0$. От $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходяща и $\{x_n - Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходяща следва, че и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

Нека $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x_0$, тогава от една страна $\|x_n\| \underset{n}{\longrightarrow} \|x_0\|$, това, заедно с $\|x_n\| = 1$ дава $\|x_0\| = 1$. От друга страна, от $\|T_0 x_n\| \leq \dfrac{1}{n}$ следва, че $T_0 x_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, но от непрекъснатостта на T_0 и $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x_0$ следва, че ${}_0 x_0 = 0$, т.е. $x_0 \in \operatorname{Ker}{}_0$. $\operatorname{Ker}{}_0 = \{0\}$, следователно $x_0 = 0$. Достигнахме до противоречие: $x_0 = 0$ и $\|x_0\| = 1$. Следователно S_0 е ограничен.

2. Ще докажем, че $\operatorname{Im} T$ е затворено пространство.

Избираме $y_n = Tx_n \longrightarrow y_0$. Трябва да докажем, че $y_0 \in \operatorname{Im} T$. Имаме, че $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, следователно е фундаментална. Оттук $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е фундаментална (защото $\|x_n - x_m\| = \|S_0 y_n - S_0 y_m\| \leq \|S_0\|.\|y_n - y_m\| < \|S_0\|.\varepsilon$). Следователно $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, $x_n \to x_0$. Тогава $y_n = Tx_n \longrightarrow Tx_0 = y_0$.

3. Ще докажем, че $\operatorname{Coker} T$ е крайномерно.

От затвореността на $\operatorname{Im} T$ и Теорема 2 следва, че $(\operatorname{Coker} T)' \cong \operatorname{Ker}(T')$. Но A' е компактен и $T' = I - A'$, откъдето $\operatorname{Ker}(T')$ е крайномерно. □

Теорема 5. $T : X \longrightarrow Y$ е фредхолмов $\Leftrightarrow$ T е почти обратим.

Доказателство.

Теорема 6. а) $\mathcal{F}(X, Y)$ е отворено.
б) $\mathcal{F}(X, Y)$ е инвариантно относно транслация с компактен оператор.

Доказателство. а) Нека T. Ще докажем, че цяла околност на T е в $\mathcal{F}(X, Y)$.

Избираме оператор ΔT и разглеждаме $T + \Delta T$. Ще докажем, че при подходящо δ и за всички ΔT с $\|\Delta T\| < \delta$ е в сила $T + \Delta T \in \mathcal{F}(X, Y)$.

Избираме δ така, че $(1 + S_1.\Delta T)$ и $(1 + \Delta T.S_2)$ да са обратими. За това пък е достатъчно $\delta < \dfrac{1}{\|S_1\|}$ и $\delta < \dfrac{1}{\|S_2\|}$. Тогава $\|S_1 \Delta T\| \leq \|S_1\|\|\Delta T\| < \|S_1\| \dfrac{1}{\|S_1\|} = 1$ (да припомним, че ако $\|B\| < 1$, то $I + B$ е обратим).

Нека S_1 и S_2 са почти обратните за T, т.е. $S_1 T = I_X + K_1$ и $TS_2 = I_Y + K_2$. Ще проверим, че $(I + S_1 \Delta T)^{-1} S_1$ и $S_2 (I + \Delta T S_2)^{-1}$ са почти обратни за $T + \Delta T$. Наистина:

$$\begin{aligned}
(I + S_1 \Delta T)^{-1} S_1 (T + \Delta T) &= (I + S_1 \Delta T)^{-1} (S_1 T + S_1 \Delta T) = \\
&= (I + S_1 \Delta T)^{-1} (I + K_1 + S_1 \Delta T) = \\
&= (I + S_1 \Delta T)^{-1} (I + S_1 \Delta T + K_1) = \\
&= (I + S_1 \Delta T)^{-1} (I + S_1 \Delta T) + (I + S_1 \Delta T)^{-1} K_1 = \\
&= I + K_1'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T+\Delta T)S_2(I+\Delta TS_2)^{-1} &= (TS_2+\Delta TS_2)(I+\Delta TS_2)^{-1} = \\
&= (I_Y+K_2+\Delta TS_2)(I+\Delta TS_2)^{-1} = \\
&= (I_Y+\Delta TS_2+K_2)(I+\Delta TS_2)^{-1} = \\
&= (I_Y+\Delta TS_2)(I+\Delta TS_2)^{-1}+K_2(I+\Delta TS_2)^{-1} = \\
&= I+K_2'
\end{aligned}$$

б) Нека S_1 и S_2 са почти обратните за T, т.е. $S_1T = I_X + K_1$ и $TS_2 = I_Y + K_2$. Ще проверим, че S_1 и S_2 са почти обратни и за $T+K$ (K е компактен оператор). Наистина:

$$(T+K)S_1 = TS_1 + KS_1 = I + K_1 + KS_1 = 1 + \widetilde{K_1};$$

$$S_2(T+K) = S_2T + S_2K = I + K_2 + S_2K = I + \widetilde{K_2}.$$

□

Лема. Нека

$$X = \begin{matrix} X_1 \\ \oplus \\ X_0 \end{matrix} \xrightarrow{T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} \begin{matrix} Y_1 \\ \oplus \\ Y_0 \end{matrix} = Y$$

Нека T е Фредхолмов и $D : X_2 \longrightarrow Y_2$ е обратим.
Тогава $\mathrm{indT} = \mathrm{ind}(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})$.

Доказателство. Да отбележим най-напред, че $A : X_1 \to Y_1$, $B : X_0 \to Y_1$, $C : X_1 \to Y_0$ и $D : X_0 \to Y_0$.
Операторът $X \to X$ определен с $\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -D^{-1}C & I_{X_2} \end{pmatrix}$ е обратим – обратният оператор е $\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ D^{-1}C & I_{X_2} \end{pmatrix}$. Аналогично, операторът $Y \to Y$, определен с $\begin{pmatrix} I_{Y_1} & -BD^{-1} \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix}$ е обратим – обратният оператор е $\begin{pmatrix} I_{Y_1} & BD^{-1} \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix}$.
Непосредствено се проверява, че

$$\begin{pmatrix} I_{X_1} & -BD^{-1} \\ 0 & I_{X_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -D^{-1}C & I_{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Ако умножим отляво или отдясно фредхолмовия оператор T с обратим оператор, то резултатът е фредхолмов оператор със същия индекс, защото размерностите на ядрото и коядрото не се променят.

$$\begin{aligned}
\mathrm{indT} &= \mathrm{ind}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{ind}\left[\begin{pmatrix} I_{X_1} & -BD^{-1} \\ 0 & I_{X_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -D^{-1}C & I_{X_2} \end{pmatrix}\right] = \\
&= \mathrm{ind}\begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{ind}(\mathrm{A} - \mathrm{BD}^{-1}\mathrm{C})
\end{aligned}$$

□

Теорема 7. а) Функцията $\mathrm{ind} : \mathcal{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \mathbb{N}$ е локално константна.
б) . (. е компактен оператор).
в) ..

Алтернатива на Фредхолм.

Теорема 7. (Алтернатива на Фредхолм.) Нека X и $A : X \to X$ е компактен оператор. Разглеждаме уравненията:

(1)	$Ax - \lambda x = 0$	(1′)	$A'f - \lambda f = 0$
(2)	$Ax - \lambda x = y$	(2′)	$A'f - \lambda f = g$

В сила е точно една от следните две възможности:

I.
- Хомогенното уравнение (1) има само нулевото решение.
- Хомогенното уравнение (1′) има само нулевото решение.
- Нехомогенното уравнение (2) има, при това единствено решение при произволна дясна част.
- Нехомогенното уравнение (2′) има, при това единствено решение при произволна дясна част.

II.
- Хомогенното уравнение (1) има ненулево решение. Тогава множеството L от решенията на (1) е крайномерно линейно пространство.
- Хомогенното уравнение (1′) има ненулево решение. Тогава множеството L' от решенията на (1′) е крайномерно линейно пространство. При това $\mathrm{dimL} = \mathrm{dimL}'$.
- Нехомогенното уравнение (2) има решение само когато $y \in L'^{\perp}$.
- Нехомогенното уравнение (2′) има решение само когато $g \in L^{\perp}$.

Задача 16.1.

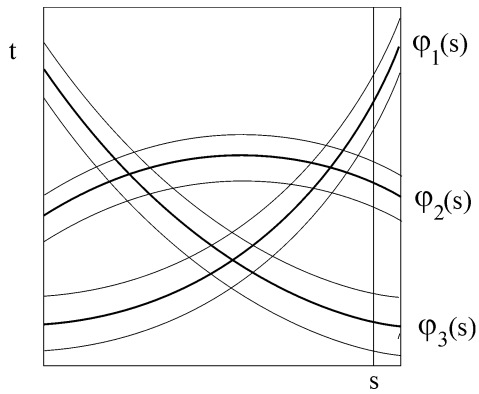
Задача 16.2.

17. Интегрални оператори.

Означения. Ще разглеждаме интегрални оператори, зададени с формулата $Ax(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt$. Функцията $K(s,t)$ се нарича ядро на оператора.

Обикновено интегралните оператори се задават в пространства от непрекъснати функции или в класовете L^p. В този въпрос ще бъдат засегнати операторите в $C[a,b]$, а в следващ въпрос – операторите в $L^2[a,b]$.

Теорема 1. Ако $K(s,t)$ е ограничена в $[a,b]\times[a,b]$ и точките на прекъсване на $K(s,t)$ лежат върху краен брой непрекъснати криви $t=\varphi_k(s), \quad k=1,\dots,n$, то горната формула определя компактен оператор $A: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$.



Доказателство: 1. При всяко фиксирано s функцията $K(s,t)$ има краен брой точки на прекъсване, следователно интегралът $\int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt$ съществува.

2. Ще докажем най-напред, че $y(s)=(Ax)(s)$ е непрекъсната функция.

2.1. Определяме $G=\{(s,t) : |t-\varphi_k(s)|<\varepsilon \quad$ за някое k$\}$, т.е. това са точките от квадрата, които са близки до някоя от графиките на функциите $t=\varphi_k(s)$.

2.2. Също така определяме $G_s=\{t : |t-\varphi_k(s)|<\varepsilon \quad$ за някое k$\}$,

т.е. върху вертикалната отсечка, отговарящя на фиксираното s, вземаме тези t, за които (s,t) е близка до някоя от графиките на функциите $t=\varphi_k(s)$.

2.3. Нека $M=\sup|x(s,t)|$.

Нека $F=[a,b]\times[a,b]\setminus G$; F е затворено и ограничено, следователно компактно.

$K(s,t)$ е непрекъсната, следователно равномерно непрекъсната в F. Избираме δ такова, че от $|s'-s''|+|t'-t''|<\delta$ да следва $|K(s',t')-K(s'',t'')|<\varepsilon$.

2.4. Избираме произволна $x\in C[a,b]$. За $y=Ax$ имаме:

$$|y(s')-y(s'')| \le \int\limits_a^b |K(s',t)-K(s'',t)|\,|x(t)|\,dt = \int\limits_{G_{s'}\cup G_{s''}} + \int\limits_{[a,b]\setminus(G_{s'}\cup G_{s''})}$$

2.5. Първия интеграл има ограничена от $2M\|x\|$ подинтегрална функция, а множеството, върху което интегрираме е подмножество на $2n$ интервала, всеки от тях с по-малка от ε дължина. Следователно първият интеграл е по-малък от $4Mn\|x\|.\varepsilon$.

2.6. При вторият интеграл: множеството, върху което интегрираме, има мярка по-малка от $(b-a)$, а подинтегралната фукция е по-малка от $\|x\|.\varepsilon$. Следователно вторият интеграл е по-малък от $\|x\|(b-a).\varepsilon$.
2.7. И така, за произволна x и за $y = Ax$ имаме: $|y(s') - y(s'')| \leq [4Mn + (b-a)]\|x\|.\varepsilon$. Оттук следва, че $y(s)$ е непрекъсната.
3. Ще докажем, че образът $A(B)$ на единичното кълбо B е предкомпактен. По теоремата на Арцела е достатъчно да установим, че образът е равностепенно непрекъсната и равномерно ограничена фамилия от функции.
3.1. Оценката 2.7, с допълнителното изискване $\|x\|_\infty \leq 1$, доказва, че $A(B)$ е равностепенно непрекъсната фамилия.
От $\|y\| = \sup|y(s)| \leq \sup\int\limits_a^b |K(s,t)|\,|x(t)|\,dt \leq M(b-a)$ следва, че $A(B)$ е и равномерно ограничена.
Следователно образът $A(B)$ на единичното кълбо B е предкомпактен, а A е компактен оператор. □

Определение. $Ax = y(s) = \lambda \int\limits_a^s K(s,t)x(t)dt$ ще наричаме оператор на Волтера (λ е числов параметър).

Следствие. Оператор на Волтера с непрекъснато ядро, зададен в $C[a,b]$ е компактен.

Теорема 2. Нека A е оператор на Волтера. Тогава:
а) съществува k, за което A^k е свиващ оператор;
б) $\lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ и $sp(A) = \{0\}$.

Доказателство: $K(s,t)$ е ограничена, нека $|K(s,t)| \leq M$.
Избираме $x_1, x_2 \in C[a,b]$. Тогава

$$\begin{aligned}
|(Ax_1 - Ax_2)(s)| &\leq |\lambda| \int\limits_a^s |K(s,t)|\,|x_1(t) - x_2(t)|dt \leq && n=1\\
&\leq |\lambda|.M.(s-a).\|x_1 - x_2\| &&\\
|(A^2x_1 - A^2x_2)(s)| &\leq |\lambda| \int\limits_a^s |K(s,t)|\,|Ax_1(t) - Ax_2(t)|dt \leq && n=2\\
&\leq |\lambda|.M.\int\limits_a^s |\lambda|.M.(t-a).\|x_1 - x_2\|dt \leq &&\\
&\leq |\lambda|^2.M^2.\frac{(s-a)^2}{2}.\|x_1 - x_2\| &&\\
|(A^nx_1 - A^nx_2)(s)| &\leq |\lambda|^n.M^n.\frac{(s-a)^n}{n!}.\|x_1 - x_2\| \leq && \text{по индукция}\\
&\leq |\lambda|^n.M^n.\frac{(b-a)^n}{n!}.\|x_1 - x_2\|. &&
\end{aligned}$$

Можем да заключим, че $\|(A^nx_1 - A^nx_2)\| \leq |\lambda|^n.M^n.\dfrac{(b-a)^n}{n!}.\|x_1 - x_2\|$.

От $|\lambda|^n.M^n.\dfrac{(b-a)^n}{n!}\to\infty$ следва, че $|\lambda|^n.M^n.\dfrac{(b-a)^n}{n!}<1$ за всички достатъчно големи n. За тези стойности на n операторът A^n е свиващо изображение.
От горното неравенство, при $x_2=0$ получаваме $\|A^nx\|\leq|\lambda|^n.M^n.\dfrac{(b-a)^n}{n!}.\|x\|$, откъдето $\|A^n\|\leq|\lambda|^n.M^n.\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ (съгласно Стирлинг $n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, т.е. $\sqrt[n]{n!}\to\infty$).
Следователно $\lim\|A^n\|^{\frac{1}{n}}=0$.
Комбинираме този резултат с изразяването на спектралния радиус $r(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ (да си припомним, че по дефиниция $r(A)=\sup\{|\lambda|:\lambda\in sp(A)\}$), получаваме, че $sp(A)=\{0\}$. □

- Алтернативата на Фредхолм, приложена към оператор на Волтера.
- Метод на свиващите изображения, приложен към оператор на Волтера.

Препоръчвана литература: [КолмФомин, 239]

В горната теорема изискването точките на прекъсване да лежат върху краен брой криви $t = \varphi_k(s), \quad k = 1, \ldots, n$, е съществено.

Задача 17.1. Докажете, че ако

$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{ако } s < \dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{ако } s \geq \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

то формулата (1) **не** задава оператор $A : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$.

Упътване. Докажете, че образът на единичната функция не е непрекъснат.

Нека $G \subset \mathbb{R}$ е компактно, измеримо по Жордан множество с ненулева мярка. Ще казваме, че интегрален оператор $A : C(G) \to C(G)$ има слабо сингулярно ядро $K(s,t)$, ако
а) $K(s,t)$ е непрекъсната при $s \neq t$;
б) съществуват константи $M > 0$ и $\alpha \in (0,2]$, така че
$|K(s,t)| \leq M|s-t|^{\alpha-2}, \quad \forall s \neq t \in G \subset \mathbb{R}$.

Задача 17.2. Интегрален оператор със слабо сингулярна особеност е компактен.

18. Оператори на Хиберт-Шмидт.

Определение. Оператор на Хилберт-Шмидт.

Теорема. Нека A е оператор на Хилберт-Шмидт с ядро $K(s,t)$. Тогава

$$\|A\| \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|\, ds\, dt}.$$

Теорема. Ако A_n са оператори на Хилберт-Шмидт с ядра $K_n \in L^2\left([a,b]^2\right)$ и ако $K_n \xrightarrow{\|\,\|_2} K$, то $Ax(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt$ е оператор на Хилберт-Шмидт и $A_n \xrightarrow{\|\,\|} A$.

Теорема. Нека A е оператор на Хилберт-Шмидт: $\quad Ax(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt.$

Тогава A^* е оператор на Хилберт-Шмидт с ядро $\quad K(s,t) = \overline{K(t,s)}.$

Теорема. Нека A и B са оператори на Хилберт-Шмидт:

$$Ax(s) = \int\limits_a^b K_A(s,t)x(t)dt, \qquad Bx(s) = \int\limits_a^b K_B(s,t)x(t)dt.$$

Тогава AB е оператор на Хилберт-Шмидт с ядро

$$K_{AB} = \int\limits_a^b K_A(s,u)K_B(u,t)du.$$

Теорема. Операторите на Хилберт-Шмидт са компактни. □

19. Линейни интегрални уравнения. Уравнения с изродени ядра.

Интегрални оператори с изродени ядра.

Разглеждаме уравнения от II род $x(s) = \int\limits_a^b K(s,t)x(t)dt + h(s)$. Ще предполагаме, че ядрото $K(s,t)$ е изродено, т.е. $K(s,t) = \sum\limits_{i=1}^n P_i(s)Q_i(t)$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че съвкупностите P_i и Q_i са линейно независими. При тези предположения решаването на интегралното уравнение се свежда до решаване на линейна система.

Записваме уравнението във вида:
$x(s) = \int\limits_a^b \sum\limits_{i=1}^n P_i(s)Q_i(t)x(t)dt + h(s)$. Преобразуваме, полагайки $q_i = \int\limits_a^b Q_i(t)x(t)dt$:
$x(s) = \sum\limits_{i=1}^n P_i(s) \int\limits_a^b Q_i(t)x(t)dt + h(s) = \sum\limits_{i=1}^n P_i(s)q_i + h(s)$.
Оттук се вижда, че оператора A е крайномерен. Намирането на решение $x(s)$ е еквивалентно с намирането на константите q_i. Можем да получим система относно неизвестните q_i по следния начин. Умножаваме равенството $x(s) = \sum\limits_{j=1}^n P_j(s)q_j + h(s)$ с фунцията $Q_i(s)$ и интегрираме по s:
$\int\limits_a^b Q_i(s)x(s)ds = \sum\limits_{j=1}^n q_j \int\limits_a^b Q_i(s)P_j(s)ds + \int\limits_a^b Q_i(s)h(s)ds$.
Означаваме $a_{ij} = \int\limits_a^b Q_i(s)P_j(s)ds$, $b_i = \int\limits_a^b Q_i(s)h(s)ds$; лявата част на равенството е точно q_i. Получихме система

$$q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}q_j + b_b, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Към тази система може да се приложи Алтернативата на Фредхолм (приложете я).

Задачи.

Решете уравненията.
$x(s) = \lambda \int\limits_a^b e^{s-t}x(t)dt + 1$
$x(s) = \lambda \int\limits_{-1}^1 (1+st)x(t)dt + Ax^2 + Bx + C$.

Задача 19.1. а) Да се реши интегралното уравнение (в $L^2([0,\pi])$, λ е параметър)

$$x(s) = \lambda \int_0^\pi \sin(s+t)x(t)dt + C\sin s + \cos s.$$

б) Да се приложи Алтернативата на Фредхолм към това интегрално уравнение.
Решение. Уравнението е с изродено ядро поради $\sin(s+t) = \sin s\cos t + \cos s\sin t$. Записваме го във вида:

$$x(s) = \sin s\left[\lambda\int_0^\pi \cos t.\, x(t)dt\right] + \cos s\left[\lambda\int_0^\pi \sin t.\, x(t)dt\right] + C\sin s + \cos s$$

Оттук е ясно, че търсим $x(s)$ във вида $x(s) = A\sin s + B\cos s$. Заместваме с този израз в началното уравнение:

$$\begin{aligned} A\sin s + B\cos s &= \sin s\left[\lambda\int_0^\pi \cos t(A\sin t + B\cos t)dt + C\right] + \\ &+ \cos s\left[\lambda\int_0^\pi \sin t(A\sin t + B\cos t)dt - 1\right] \end{aligned}$$

Имаме $\int_0^\pi \sin t\cos t dt = 0$; $\int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$. Горното уравнение се записва във вида

$$A\sin s + B\cos s = \sin s\left[B.\lambda.\frac{\pi}{2} + C\right] + \cos s\left[A.\lambda.\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

Приравняваме коефициентите на $\sin s$ и $\cos s$ отляво и отдясно[8] и получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{ll} A - B.\lambda.\frac{\pi}{2} & = 1 \\ -A.\lambda.\frac{\pi}{2} + B & = -1 \end{array}\right. \qquad \text{Единствено решение при } \lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}.$$

• Ако $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$, то решението е единствено, $x(s) = \frac{2}{\lambda\pi - 2}\sin s - \frac{2}{\lambda\pi + 2}\cos s$.

• Ако $\lambda = \frac{2}{\pi}$ получаваме $\left|\begin{array}{ll} A - B & = 1 \\ -A + B & = -1 \end{array}\right.$ т.е. $B = A - 1$ и решенията имат вида $x(s) = A\sin s + (A-1)\cos s$.

• Ако $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ получаваме $\left|\begin{array}{ll} A + B & = 1 \\ A + B & = -1 \end{array}\right.$ и системата и интегралното уравнение нямат решение.

б) Ядрото $K(s,t) = \sin(s+t)$ е симетрично, следователно операторът A е самоспрегнат. В терминологията от Алтернативата на Фредхолм, задачата (1) съвпада с $(1')$, а (2) – с $(2')$.

[8] Разбира се, можем да следваме и начина описан във въпроса и ще получим същата система.

Използвана литература

[ЛюСо] Л. Люстерник, Соболев, В., Елементи на функционалния анализ, Техника, София, 1975.

[Прод1] И. Проданов, Увод във функционалния анализ, Първа част, Наука и изкуство, София, 1982.

[Прод2] И. Проданов, Увод във функционалния анализ, Втора част, Наука и изкуство, София, 1983.

[КолмФо] А. Колмогоров, Фомин, С., Елементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1976.

[КантАк] Л. Канторович, Акилов, Г., Функциональный анализ, Наука, Москва, 1977.

Допълнителна литература

[Йосида] К. Йосида, Функциональный анализ, Мир, Москва, 1967.

[Рудин] У. Рудин, Функциональный анализ, Мир, Москва, 1975.

[КирГви] А. Кириллов, Гвишиани, А., Теоремы и задачи функционального анализа, Наука, Москва, 1979.

[Трен] В. Треногин, Писаревский, Б., Соболева, Т., Задачи и упражнения по фунциональному анализу, Наука, Москва, 1984.

Билет, падал се на предишен изпит.

7. Теорема на Хан-Банах

Нека $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots\right)$.

1. Докажете, че $x_n \in l^1$. Пресметнете $\|x_n\|_1$.

2. Докажете, че $x_n \in l^2$. Пресметнете $\|x_n\|_2$.

3. Сходяща ли е редицата $\{x_n\}$ в l^1; в l^2?

4. Слабо сходяща ли е редицата $\{x_n\}$ в l^1; в l^2?

Нека $Ax(s) = \int\limits_0^\pi \sin(s+t)x(t)\,dt$.

5. Разглеждаме $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$.
Непрекъснат ли е операторът (ако да – дайте оценка за нормата).

6. Разглеждаме $A : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi]$.
Непрекъснат ли е операторът (ако да – дайте оценка за нормата).

7. Да се реши уравнението $x(s) = \lambda \int\limits_0^\pi \sin(s+t)x(t)\,dt + e^s$

8. Да се определи дали е сходяща редицата Ax_n, където $x_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(n+k)x}{2^k}$.

Още задачи от изпити

9. Определете дали е сходяща в l^2 редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, където

$$x^{(n)} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ на брой}}, 0, 0, \ldots \Big).$$

10. Нека функционалът l е зададен с формулата $l\,(x(t)) = \int\limits_0^1 x(t) \sin t \, dt$.

а) Пресметнете нормата му в $L^2[0,1]$.

б) Пресметнете нормата му в $C[0,1]$.

11. Операторът $A : l^2 \to l^2$ се дефинира с

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

а) Пресметнете $\|A\|$.
б) Определете A^*.
в) Има ли операторът A собствени стойности (ако има – кои са те)?
г) Компактни ли са операторите A и A^*?
д) Определете $Sp\,(A)$ и $Sp\,(A^*)$.
е) Пресметнете $\|A^*A\|$.

12. Нека $x^{(n)} = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ на брой}}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots \Big)$.

а) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^1? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^1 редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?

б) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^2? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^2 редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?

в) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^∞? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^∞ редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?

13. Нека $f(t) = t - t^2$. Пресметнете $\|f\|$ в пространствата:
а)$L^1[0,1]$; б)$L^2[0,1]$; в) $L^\infty[0,1]$; г) $V[0,1]$.

14. а) С $l(f) = \int\limits_0^1 \left(t - \frac{1}{3}\right) f(t)\, dt$ е зададен функционал $l : C[0,1] \to \mathbb{R}$. Линеен ли е този функционал? Непрекъснат ли е? Ако да, пресметнете $\|l\|$.

б) С $l(f) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(t - \frac{1}{3}\right) f(t)\, dt$ е зададен функционал $l : L^2[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Линеен ли е този функционал? Непрекъснат ли е? Ако да, пресметнете $\|l\|$.

15. Нека операторът $A : l^2 \to l^2$ се дефинира с

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mapsto \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$

а) Пресметнете $\|A\|$.
б) Определете A^*.
в) Има ли операторът A собствени стойности (ако има – кои са те)?
г) Компактни ли са операторите A и A^*?
д) Определете $Sp\,(A)$ и $Sp\,(A^*)$.
е) Пресметнете $\|A^*A\|$.

16. Разглеждаме уравнението $y(t) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t^2s^2 - 1)\, y(s)\, ds$ в $L^2[-\pi, \pi]$.
При кои стойности на λ уравнението има решение?
Решете уравнението $y(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (t^2s^2 - 1)\, y(s)\, ds + t$.

17. Нека $x^{(n)} = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ на брой}}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots \Big)$.

а) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^1? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^1 редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?
б) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^2? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^2 редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?
в) $x^{(n)}$ елемент ли е на пространството l^∞? Ако отговорът е положителен, сходяща ли е в l^∞ редицата $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$? Слабо сходяща ли е?

18. Нека $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(n_0 + k)x}{n}$.
Проверете, че $f \in L^2[-\pi, \pi]$ и пресметнете $\|f\|_2$.

19. Нека $(Af)(s) = \int\limits_0^{\pi} \cos(s - t) f(t)\, dt$.
Направете оценка за нормата на този интегрален оператор
а) в $C[0, \pi]$; б) в $L^2[0, \pi]$.
Обратим ли е A? Компактен ли е A? Намерете A^*.

20. Какви изводи, основани на алтернативата на Фредхолм могат да се направят за уравнението:

$$f(s) = \int\limits_0^{\pi} \cos(s - t) f(t)\, dt + e^s \quad ?$$

21. Нека $(Ax)(t) = t \int\limits_0^1 x(\tau) d\tau$ действа в $L^2[0, 1]$. Определете $\|A\|$.

Още задачи

22. Дайте пример на оператор $A : X \to X$, който не е компактен, а оператора A^2 е компактен.
Упътване: Разгледайте $X = Y \times Y$ и $A : Y \times Y \to Y \times Y$, дефиниран с $A(y_1, y_2) = (0, y_1)$.

23. Докажете, че образът $\operatorname{Im} A$ на компактен оператор е сепарабелно множество.
Упътване: Използвайте, че ако M_n е $\frac{1}{n}$–мрежа на $A(B_X(0,1))$, то $\bigcup_n M_n$ е изброимо и навсякъде гъсто в $A(B_X(0,1))$, а $\mathbb{Q} \bigcup_n M_n$ е изброимо и навсякъде гъсто в $A(X)$.

В безкрайномерно пространство компактен оператор не може да има ограничен обратен оператор. Възможно е компактен оператор да има обратен (в алгебричния смисъл) оператор; обратният ще е неограничен.

24. $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{2^2}, \ldots)$ е компактен оператор, но има обратен (в алгебричен смисъл) оператор.

25. В прстранството l^2 операторът A действа по формулата:

$$A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

Докажете, че A е компактен точно когато $\alpha_n \to 0$.

26. Нека $A : l^2 \to l^2$ е записан в матричен вид (безкрайна матрица спрямо стандартния базис):

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и матрицата на оператора A има свойството: $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$.
Докажете, че операторът A е компактен.

Упътване: Покажете, че съшествува N, за което $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| - \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}| < \varepsilon$.

Ако $(A_N x)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathbb{N}} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots,$, оценете $A - A_N$.
Твърдението следва от това, че A_N са крайномерни и $A_N \to A$.

27. Нека компактният оператор $A : l^2 \to l^2$ е записан в матричен вид.
Съществуват компактни оператори, за които редът $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|$ е разходящ.
Упътване: Разгледайте $A : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \ldots)$, за подходяща редица $\{\alpha_n\}$.

28. Нека $A : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ е оператор на Хилберт-Шмидт с ядро $K(s,t)$ (т.е. $\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds dt < \infty$).
Записваме A в матричен вид: $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$, където $a_{ij} = (Ae_i, e_j)$.
Докажете, че $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$.

29. Може ли да е компактен операторът M_a на умножение с функция $a(t)$ $(M_a x(t) = a(t)x(t))$
а) в $C[a,b]$;
б) в $C(X)$, където X е метрично пространство?
Упътване: а) Не. б) Разгледайте случая, когато X има изолирани точки.

30. Може ли да е компактен операторът M_a на умножение с функция $a(t)$ $(M_a x(t) = a(t)x(t))$
а) в $L^2[a,b]$;
б) в $L^2(X,\mu)$, където μ е мярка в множвството X?
Упътване: а) Не. б) Разгледайте случая, когато X има точки с ненулева мярка.

31. Нека D е ограничено затворено подмножество на $\mathbb{R}^n$. В $C(D)$ разглеждаме интегралния оператор A с ядро $K(s,t)$.
Нека ядрото удовлетворява условията:
а) $\int_D |K(s,t)| \, dt$ е ограничена функция (на $s \in D$);
б) За всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ, така че от $|s_1 - s_2| < \delta$ да следва
$\int_D |K(s_1,t) - K(s_2,t| \, ds < \varepsilon$.
Докажете, че при тези предположения A е компактен оператор.

Нека A и B са оператори в хилбертовото пространство H. Казваме, че A и B са подобни, ако съществува обратим оператор S, така че $A = C^{-1}BC$.

32. Нека A е подобен на B. Докажете, че:
а) A^n е подобен на B^n;
б) A^* е подобен на B^*;
в) B е подобен на A.