

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ДИСЕРТАЦИЯ

на тема

ВЪРХУ СТРУКТУРАТА НА НЯКОИ СФЕРИЧНИ КОДОВЕ И ДИЗАЙНИ

за присъждане на образователната и научна степен

”ДОКТОР”

по научната специалност

01.01.02 Алгебра и Теория на числата

на

Мая Митева Стоянова

Научен консултант: ст.н.с. II ст. дмн Петър Георгиев
Бойваленков

София, 2008 г.

Съдържание

Увод	6
1 Сферични кодове и дизайни	14
1.1 Параметри на сферични кодове и дизайни	14
1.2 Полиноми на Гегенбауер	17
1.3 Сферични (n, M, ℓ, τ) -конфигурации	19
1.4 Граници на линейното програмиране за сферични кодове и дизайни . .	21
1.5 Граници на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за дизайни и на Левенщейн за кодове	22
1.6 Известни ограничения за структурата на сферични дизайни	25
2 Върху някои сферични (n, M, ℓ, τ)-конфигурации	30
2.1 Сферични $(n, M, 2, 3)$ -конфигурации	30

	3
2.2 Сферични $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации	33
2.3 Сферичната $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация	37
2.4 Сферични $(n, M, 3, 5)$ -конфигурации	39
3 Ограничения върху структурата на някои сферични дизайни	42
3.1 Горна граница за максималното скалярно произведение на сферични τ -дизайни	42
3.1.1 Границата $U_{3, C -1}$	44
3.1.2 Границата $U_{4, C -1}$	46
3.1.3 Границата $U_{5, C -1}$	48
3.2 Долна граница за минималното скалярно произведение на сферични τ -дизайни	49
3.2.1 Границата $L_{4,1}$	50
3.2.2 Границата $L_{6,1}$	52
3.3 Долна граница за скалярното произведение $t_2(x)$ на сферични τ -дизайни с нечетна мощност	53
3.4 Горна граница за скалярното произведение $t_2(x)$ на сферични $(2k - 1)$ -дизайни	54

3.5	Необходимы условия за съществуване на някои $(2k - 1)$ -дизайни с нечетна мощност	56
3.5.1	Общи граници за специални тройки $\{x, y, z\} \subset C$	57
3.5.2	Съществува специална четворка, която не е "добра"	59
3.5.3	Всички специални четворки са "добри"	61
3.5.4	Обобщения на резултатите и някои коментари	66
4	Нови резултати за несъществуване на някои сферични 3-, 5- и 7-дизайни	68
4.1	Нови резултати за несъществуване на сферични 3-дизайни	68
4.2	Нови резултати за несъществуване на сферични 5-дизайни	79
4.3	Нови резултати за несъществуване на сферични 7-дизайни	87
4.4	Асимптотични подобрения на долната граница за мощността на сферични 3-дизайни	93
5	Радиус на покритие за сферични дизайни	98
5.1	Нови граници за радиуса на покритие на сферични дизайни	98
5.2	Приложения	102
5.2.1	Границите $t_{\tau}^{(up)}$ за $\tau = 3, 4, 5$	103

5.2.2	Границите $t_3^{(up)}$ и $t_5^{(up)}$ за антиподални дизайни	107
5.2.3	Върху 4-дизайна с 10 точки в размерност $n = 3$	108
6	Граници за мощността на сферични кодове със скаларни произведения в даден интервал	110
6.1	Граници на линейното програмиране за сферични кодове със скаларни произведения в даден интервал	110
6.2	Левенщейн-тип граници за мощността на сферични кодове $C \subset S_n(a, b)$	112
6.3	Някои подобрения на границите $U_{2k}(n; a, b)$ и условия за достигането им	114
	Bibliography	116
	Библиография	116

Увод

Настоящият дисертационен труд съдържа резултати, получени при изследване на някои класове сферични кодове и дизайни. Състои се от увод, шест глави и списък с използвана литература.

Сферичен код е крайно непразно подмножество C на Евклидовата сфера $\mathbb{S}^{n-1}$. Най-важните характеристики на сферични кодове са: *размерността* n , *мощността* $M = |C|$ и *максималното скалярно произведение* (или *максимален косинус*)

$$s = s(C) = \max\{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}.$$

Сферичен код с тези параметри означаваме като (n, M, s) -код. Кодът $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *антиподален*, ако $C = -C$. Друг параметър на сферичен код C е *минималното скалярно произведение* (или *минимален косинус*) $\ell(C) = \min\{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}$.

Сферичните дизайни са разгледани за пръв път като аналог на класическите комбинаторни дизайни от Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] през 1977г.

Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *сферичен τ -дизайн* ($\tau \geq 0$ е цяло число), ако равенството

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} f(x)$$

е изпълнено за всеки полином $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от степен, ненадминаваща τ . Тук $\mu(\cdot)$ е нормализираната Лебегова мярка, т.е. $\mu(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код, максималното цяло неотрицателно число τ , за което C е сферичен τ -дизайн, се нарича *сила* на C .

Горната дефиниция дава връзка между численото пресмятане на интеграли върху $\mathbb{S}^{n-1}$ и сферичните дизайни и е една от мотивациите за изучаването на сферичните дизайни. В числените методи точките на сферичен дизайн със сила τ се разглеждат като върхове на квадратурна формула от Чебишев тип (т.е. с еднакви тегла) с алгебрична степен на точност τ (виж например [46, 47, 54, 55]). Този факт обяснява интереса на учени от други области [48, 64, 65, 62] (най-вече физици и астрономи) към сферичните дизайни.

Всеки сферичен код е 0-дизайн. Сферичните 1-дизайни са кодове, чийто център на тежестта съвпада с центъра на единичната сфера. В частност, оттук следва, че всеки антиподален код е поне 1-дизайн.

Сферичните 2-дизайни също са обекти, известни на геометрите още от 19-ти век - те съвпадат с конфигурациите, разглеждани от Шлефли и наричани от него *eutactic star* (виж [42, 63, 74, 39]).

Всеки сферичен дизайн води до съществуването на тъждества от вида

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^r = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^{2r},$$

което (за рационални λ_i и цели a_{ij}) играе важна роля при решаването на проблема на Варинг. Връзката между сферичните дизайни и тъждества от горния вид е изследвана от Резник [69, 70].

Посочените факти подчертават важността на въпросите за съществуване и несъществуване на сферични дизайни с относително малки мощности. Класически подход в такива задачи е изследването на структурата на разглежданите обекти. Получаването на различни ограничения води до резултати за несъществуване или класификационни резултати.

В първа глава на дисертацията са въведени всички основни понятия, дефиниции и известни резултати, необходими за по-нататъшното изложение. Дефинирани са полиномите на Гегенбауер, използвани съществено в прилаганите в дисертацията полиномиални техники. Описани са универсалните граници на Левенщайн за сферични кодове [57, 60] и границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за сферични дизайни [42]. В последния параграф на главата са описани известни ограничения върху структурата и необходими условия за съществуването на изследваните сферични дизайни.

Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, $\tau \geq 1$, с мощност $M = |C|$ и множеството $A(C) = \{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}$ има ℓ елемента, то C се нарича (n, M, ℓ, τ) -конфигурация.

Подмножествата на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ с фиксиран брой ℓ различни разстояния са разглеждани от редица автори (Е. Банай-Р. Дамерел [9, 10], Е. Банай-Ет. Банай-Стентън [7, 8], А. Блокхаус [12], Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42, 43, 73], Камерън-Гьоталс-Зайдел [37], Лисонек [61]). Броят на различните ненулеви разстояния (еквивалентно различните неединични скаларни произведения) между точки от даден сферичен код е важен параметър при изучаване на свойствата му.

Във втора глава са изследвани такива (n, M, ℓ, τ) -конфигурации за относително малки сила τ и брой различни неединични скаларни произведения ℓ .

Проблем 1.(2.0.1) За фиксирани размерност $n \geq 3$, брой различни разстояния ℓ и сила $\tau \geq 2$, да се намерят всички мощности M , за които съществуват сферични (n, M, ℓ, τ) -конфигурации.

Разгледани са (n, M, ℓ, τ) -конфигурации за параметри $(\ell, \tau) = (2, 3)$, $(2, 2)$ и $(3, 5)$. При $(\ell, \tau) = (2, 3)$ е доказана т. нар. Лойд тип теорема (Теорема 2.1.4; всички скаларни произведения са рационални числа; виж Банай - Дамерел [9, 10]). В случая $(\ell, \tau) = (2, 2)$ също е доказана Лойд тип теорема (Теорема 2.2.3) с един специален случай. Представени са съответни класификационни резултати за $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации в относително малки размерности. В §2.3 е конструиран сферичен код $C \subset \mathbb{S}^5$ с 13 точки, който е 2-дизайн и има две различни ирационални скаларни произведения. Това е единственият известен ни пример за (n, M, ℓ, τ) -конфигурация за $\tau \geq 3$, $n \geq 3$ и $\tau \geq 2l - 2$ освен икосаедъра, който има ирационални произведения. Нещо повече, споменатата конфигурация е единствена с точност до ортогонална трансформация (Теорема 2.3.1). Доказано е, че $(n, M, 2, 3)$ - и $(n, M, 3, 5)$ -конфигурациите

съществуват точно тогава, когато са максимални сферични кодове, достигащи съответно границите на Левенщайн $L_3(n, s)$ и $L_5(n, s)$ (Теорема 2.1.2 и Теорема 2.4.1). Този резултат може да бъде извлечен от работите на Левенщайн [59], но не е експлицитно указан там. За максималните сферични кодове, достигащи границите на Левенщайн $L_3(n, s)$ и $L_5(n, s)$ са известни класификационни резултати, получени от Бойваленков-Данев-Ланджев в [27] (виж също [9, 10]).

Глава 2 е написана въз основа на [32] и [33].

Една от основните техники за изследване на структурата на сферични кодове и дизайни е т. нар. полиномиален подход. Полиномиалните техники се основават на следната еквивалентна дефиниция (виж например Фазекаш-Левенщайн [45]) за сферични дизайни.

Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича сферичен τ -дизайн, ако за всяка точка $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ и всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$ от степен $k \leq \tau$ е в сила равенството

$$\sum_{x \in C} f(\langle x, y \rangle) = f_0 |C| \quad (0.0.1)$$

(тук f_0 е нулевия коефициент в развитието на $f(x)$ по полиномите на Гегенбауер $\{P_i^{(n)}(t)\}_{i=0}^\infty$).

Използваме горната дефиниция както за случаите, когато $y \in C$, така и за $y \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus C$. В Глави 3 и 4 са разгледани следните два проблема:

Проблем 2.(1.1.5) За фиксирани размерност n и сила τ да се оцени величината

$$B(n, \tau) = \min\{M = |C| : \text{съществува } \tau\text{-дизайн } C \subset \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Проблем 3.(1.1.6) За фиксирани размерност $n \geq 3$, сила $\tau \geq 2$ и мощност M да се определи дали съществува сферичен τ -дизайн с M точки върху $\mathbb{S}^{n-1}$.

В трета глава са получени граници за скаларните произведения на някои класове сферични дизайни. Идеята за изследване структурата на сферичните дизайни с помощта на подходящи полиноми в (0.0.1) е използвана за пръв път от Фазекаш-Левенщайн [45]. Някои граници на Фазекаш-Левенщайн са подобрени и обобщени от Бойваленков-Данев-Никова [28], Юдин [78] и Бойваленков-Бумова-Данев [15, 16]. Изследванията в тази глава са продължение на получените в [15, 16] резултати (виж също [13]). Получени са нови граници за най-важните скаларните произведения на сферичните дизайни. Изследването на разпределението на скаларните произведения на сферични дизайни с относително малки мощности надхвърля възможностите на апарата на чистото линейно програмиране и дава по-добър резултат както при малки размерности, така и в асимптотичния процес, при който силата е фиксирана, а размерността расте неограничено.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. За произволна точка $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, разглеждаме множеството (или мултимножество, ако има повторения)

$$I(x) = \{\langle u, x \rangle : u \in C\}.$$

Съществува наредба на точките в $C = \{u_1, u_2, \dots, u_{|C|}\}$ такава, че $-1 \leq \langle u_1, x \rangle \leq \langle u_2, x \rangle \leq \dots \leq \langle u_{|C|}, x \rangle \leq 1$. Да означим $t_i(x) = \langle u_i, x \rangle$ за $i = 1, 2, \dots, |C|$. Тогава можем да считаме, че

$$I(x) = \{t_1(x), t_2(x), \dots, t_{|C|}(x)\},$$

където $-1 \leq t_1(x) \leq t_2(x) \leq \dots \leq t_{|C|}(x) \leq 1$, като $t_{|C|}(x) = 1 \iff x \in C$.

За сферичен τ -дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ и за дадена точка $x \in C$, е удобно да използваме означенията $L_{\tau,i}(x)$ и $U_{\tau,i}(x)$ съответно за долна и горна граници за скаларното произведение $t_i(x)$. Когато получените оценки са налице за всяка точка $x \in C$, пропускаме x в означенията, т.е. бележим тези граници съответно с $L_{\tau,i}$ и $U_{\tau,i}$.

В Теорема 3.1.2 е получена горна граница за максималното скаларно произведение на сферичен τ -дизайн. Направени са както конкретни изчисления в малките размерности за относително малки мощности, така и асимптотичен анализ (при сила на дизайна $\tau = 3, 4$ и 5). При $\tau = 4$ (Теорема 3.1.3) е получен явен вид на границата $t_{|C|-1}(x) \leq U_{4,|C|-1}$.

В Теорема 3.2.2 е получена долна граница за минималното скаларно произведение на сферичен τ -дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Дизайнните с четна сила τ и мощност, която не надминава границата на Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] за $(\tau + 1)$ -дизайни имат горното свойство. Направени са конкретни изчисления в малките размерности за относително малки мощности и асимптотичен анализ (при сила на дизайна $\tau = 4$ и 6). За 4-дизайни в Теорема 3.2.3 е получен явен вид на долната граница $t_1(x) \geq L_{4,1}$.

В §3.4 е получена горна граница $U_{2k-1,2}$ за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферичен $(2k - 1)$ -дизайн C за всяка точка $x \in C$ (Теорема 3.4.1). Границата $U_{3,2} = -\sqrt{\frac{|C|-2n}{n(|C|-2)}}$ се достига за някои класове от 3-дизайни – например за биортогоналните кодове и за кодовете с $2(n + 1)$ точки $(-C_1) \cup C_1$, където C_1 е правилен n -мерен симплекс.

Намирането на граници за $t_1(x)$, $t_2(x)$ и $t_{|C|-1}(x)$ (т.е. за точките от C , които са най-отдалечени от x или най-близки до x) дава възможност за получаване на необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Това е основата на метода, описан в [16] от Бойваленков-Бумова-Данев. В последния параграф на Глава 3 ние продължаваме този подход, като получаваме нови граници за споменатите скаларни произведения и добавяме при изследването на въпроса за съществуване на даден дизайн и граници за $t_3(x)$ и $t_{|C|-2}(x)$ за някои специални точки $x \in C$. Основна роля за усилването на метода играе съществуването на ”добра” специална четворка точки от дизайна с определени свойства. По-точно в §3.5 са разгледани $(2k - 1)$ -дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за параметрите и скаларните произведения, на които са изпълнени следните условия:

$$2 \leq \rho_0|C| < 3, \text{ и } \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1,$$

($\rho_0, \alpha_0, \alpha_{k-1}$ са параметри въведени от Левенщейн [59, 60]). В такива дизайни съществуват специални тройки точки $\{x, y, z\} \subset C$, такива, че $\langle x, y \rangle = t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0$ и $\langle x, z \rangle = t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0$. Към всяка такава специална тройка може да се добави точката $u \in C$, за която $\langle u, z \rangle = t_2(z)$ и ние разглеждаме получените специални четворки $\{x, y, z, u\}$.

Специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C наричаме ”добра”, ако $t_2(z) \leq \alpha_0$.

Разработен е подход, който разграничава следните два основни случая: съществува поне една специална четворка, която не е ”добра”, т.е. $t_2(z) > \alpha_0$ в тази специална четворка и всички специални четворки са ”добри”, т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички

специални четворки.

В ”добри” специални четворки има нови ограничения върху скаларните произведения. Нещо повече, Теорема 3.5.10 и Следствие 3.5.11 показват, че съществува поне една x -”добра” специална четворка (за нея $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$) или съществува поне една z -”добра” специална четворка точки, т.е. $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

За всеки от двата основни случая е получено необходимо условие за съществуване на разглежданите дизайни при съответно наложените ограничения върху структурата им (Лема 3.5.9, 3.5.15 и 3.5.18). Резултатите са обобщени в Теорема 3.5.19.

Глава 3 е написана въз основа на [34], [21] и [23].

В Глава 4 е предложен метод за доказване на несъществуване на сферични дизайни (с нечетна сила и нечетна мощност), който се основава на описания в §3.5 подход. При необходимост подходът от §3.5 е усилен с по-прецизен анализ на разположението на изследваните скаларни произведения относно параметрите на разглежданите дизайни. Получени са нови необходими условия за съществуването на 3-, 5- и 7-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 50$, $5 \leq n \leq 25$ и $5 \leq n \leq 20$ съответно. Получени са и асимптотични подобрения на долната граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни (виж Проблем 2).

В §4.1 са получени резултати за несъществуване на 3-дизайни. Байнок [5, 6] дава конструкция на сферични 3-дизайни за всички размерности $n \geq 7$ и всички нечетни мощности $|C| = M \geq \frac{5n}{2}$. В по-ниските размерности, той конструира 3-дизайни за всички нечетни мощности, започвайки с $|C| = M \geq 11$ за $n = 3$ и $n = 4$ и с $|C| = M \geq 15$ за $n = 5$ и $n = 6$. От друга страна, Бойваленков-Данев-Никова [28] и Бойваленков-Бумова-Данев [16] доказват, че не съществуват 3-дизайни C с нечетна мощност $|C| = M$, за които $\rho_0|C| < 2$. В [17] Бойваленков-Бумова-Данев доказват още несъществуването на 3-дизайни C с нечетна мощност в 50 от всички 144 отворени дотогава случая (при тях $\rho_0|C| \geq 2$) на възможни нечетни мощности на 3-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 50$. Следователно, в тези размерности са останали 94 отворени случая. В §4.1 изследваме въпроса за съществуването на 3-дизайни в 47 случая, за които са в сила условията от §3.5. Несъществуване е доказано в 35 от тях. Получените резултати дават окончателен отговор на Проблем 3 за размерности $n = 8, 13, 14$ и 18 . В Таблица 4.1 новите резултати са указани с $^\circ$. Таблица 4.1 може да се види и на <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/publications/stoyanova/table.html>.

В §4.2 са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни. Конструкции на 5-дизайни са описани от Резник [69, 70] (виж също Байнок [4], Хардин-Слоен [49], Банай-Дамерел [10]), който например показва, че 5-дизайни в размерност $n = 3$ съществуват за мощности $|C| = M = 12, 16, 18, 20$ и ≥ 22 . Освен това той предполага, че за всички останали възможни мощности съответните 5-дизайни не съществуват. От друга страна, ”разстоянието” между мощностите на конструираните 5-дизайни и получените резултати за несъществуване е все още доста голямо. Например, резултати за несъществуване на 5-дизайни са получени от Бойваленков-Данев-Никова [28] и Бойваленков-Бумова-Данев [16] за всички възможни нечетни мощности $|C|$ на 5-дизайни, за които е в сила условието $\rho_0|C| < 2$. След това, Бойваленков-Бумова-Данев [17] получават резултати за несъществуване на 5-дизайни за още 53 възможни мощности, за които $\rho_0|C| \geq 2$ в размерности $3 \leq n \leq 20$. По-този начин са останали

42 подлежащи на изследване случая в размерности $5 \leq n \leq 25$, в които мощността $|C|$ е нечетна и са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$ и $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_2$. В §4.2, прилагайки нашия метод, са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни с параметри във всички 42 отворени случая. Получените резултати са обобщени в Теорема 4.2.14, която показва, че за да съществуват 5-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 25$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.

В §4.3 са получени резултати за несъществуване на 7-дизайни. По-точно, след [28, 16] са останали 291 възможни нечетни стойности за мощността на 7-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 20$, за които $2 \leq \rho_0|C| < 3$. За всички тях е налице условието $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_3$ и нашият метод доказва несъществуване във всички отворени случаи с изключение на един: $n = 4, |C| = 43$. Получените резултати са обобщени в Теорема 4.3.12, която показва, че за да съществуват 7-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 20$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$. Нещо повече, получени са резултати за несъществуване в още 18 случая на нечетни мощности за 7-дизайни в размерности $5 \leq n \leq 20$, в които са изпълнени неравенствата $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_3$ и $\rho_0|C| \geq 3$. Да отбележим, че за 7-дизайни методът с използване на съществуването на "добра" специална четворка с особени свойства (съгласно Теорема 3.5.10 и Следствие 3.5.11) дава резултат по-бързо и лесно в сравнение със случаите $\tau = 3$ и $\tau = 5$. Изглежда това е общ феномен - дизайни с по-голяма сила и относително малка мощност съществуват по-рядко и съответно е по-лесно да се доказват резултати за несъществуване. Считаме, че това наблюдение хвърля допълнителна светлина върху стойността на резултатите за 3- и 5-дизайни.

В последната част на Глава 4 е направен асимптотичен анализ на въпроса за съществуване на 3-дизайни с нечетна мощност. По-точно, новият метод е приложен върху 3-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = (2 + \gamma)n$ при $n \rightarrow \infty$. По-долу $B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim An$ ($A = \text{const.}$) означава, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{\text{odd}}(n, 3)}{n} \geq A$. От границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел и конструкциите на Байнок [5, 6] следва, че за числото γ остава да разгледаме $\gamma \in (0, 0.5)$. В [28, 17, 18] долната асимптотична граница за $B_{\text{odd}}(n, 3)$ е подобрена съответно до $(1 + \sqrt[3]{2})n \approx 2.2599n$, $2.3227n$ и $2.3412n$. Затова предполагаме, че $\gamma \in [0.3412, 0.5)$. Получена е (Теорема 4.4.4) следната нова асимптотична долна граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни

$$B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim 2.3925n,$$

т.е. $\gamma \geq 0.3925$.

Тази глава е написана въз основа на [19], [20], [21], [22] и [23].

Друг важен параметър при изследване на структурата на сферичните кодове и дизайни е техния радиус на покритие. В термините на скаларно произведение (виж Дефиниция 5.1.1) радиус на покритие на сферичен код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ наричаме числото

$$t_c = \min_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \max_{x \in C} \{\langle x, y \rangle\}.$$

В специалния случай, когато C е τ -дизайн, се оказва възможно получаването на добри долни и горни граници за t_c . Фазекаш и Левенщайн в [45, Теорема 2] получават долни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни. Не ни е известно да

са получавани други граници (освен долните граници на Фазекаш-Левенщейн [45] и по-слабите от тях граници на Солé [75]) за радиуса на покритие на сферични дизайни.

В Глава 5 на дисертацията е разгледан следният проблем.

Проблем 4.(5.1.2) При фиксирани n , M и τ , да се намерят граници за t_c , които да са в сила за всички τ -дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с мощност $|C| = M$.

Използваните полиномиални техники дават горни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни (Теорема 5.1.5). Тези граници зависят от размерността n , силата на дизайна τ и мощността му $M = |C|$. Намерен е видът на полиномите, с чиято помощ могат да се получават тези горни граници (Теорема 5.1.7). Получен е явен вид на горна граница за радиуса на покритие на сферични 4-дизайни (Теорема 5.2.1).

В предпоследния параграф на тази глава са получени съответни горни граници за радиуса на покритие за антиподални 3- и 5-дизайни. Получената в Теорема 5.2.2 горна граница за радиуса на покритие на антиподални 3-дизайни C с мощности $|C| = n(2 + \gamma)$, $\gamma = \text{const.}$, дава точния порядък на t_c .

Структурата на антиподалните 5-дизайни е изучавана по-рано и от други автори. Резник [70] доказва несъществуването на антиподални 5-дизайни с $n^2 + n + 2$ точки. Бойваленков-Данев-Никова в [28] получават ограничения върху структурата на антиподални 5-дизайни с $n^2 + n + 4$ точки. В параграф §5.2.2 са получени съответни горни граници за радиуса на покритие за антиподални 5-дизайни (Теорема 5.2.3).

Глава 5 е написана въз основа на [35].

В класическия случай, когато $s \in [-1; 1)$, получаването на граници за мощността за даден сферичен (n, M, s) -код, е въпрос, дискутиран от редица автори ([57, 58, 60, 38, 44]). В [57, 60] Левенщейн получава универсални граници за такива кодове. Това е една от нашите мотивации да изследваме този въпрос в малко по-общ вид: за зададен интервал $[a, b]$, $-1 \leq a < b < 1$. По-точно, за дадени фиксирани размерност n и интервал $[a, b]$, $-1 \leq a < b < 1$, означаваме множеството

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : \langle x, y \rangle \in [a, b], \text{ за } x, y \in C, x \neq y\} \\ &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : a \leq \ell(C) < s(C) \leq b\}. \end{aligned}$$

Проблем 5.(1.1.3) За дадени фиксирани размерност n и интервал $[a, b] \subset [-1, 1)$, да се намери (да се намерят граници за) максималната възможна мощност $M = |C|$ на код $C \subset S_n(a, b)$, т.е. да се намери (оцени) величината

$$A(n; a, b) = \max\{|C| : C \subset S_n(a, b)\}.$$

В Глава 6 прилагаме полиномиални техники за изследване на сферични кодове, за които скаларните произведения са във фиксиран подинтервал на интервала $[-1; 1)$, т.е. разглеждаме Проблем 5. Следвайки логиката [57, 25] от ситуацията за интервал $[-1, s]$, първо са получени така наречените Граници на линейното програмиране за разглежданите кодове (Теорема 6.1.1) и вида на полиномите, с чиято помощ могат да се получават такива граници. След това са намерени Левенщейн-тип граници (Теорема 6.2.1-6.2.3) за величината $A(n; a, b)$, описани в първите случаи и

техни подобрения (когато такива са възможни). В Теорема 6.3.1 са описани необходимите условия за достигането на получените граници.

Глава 6 е написана въз основа на [36].

Апробация на резултатите

Резултатите в дисертационния труд се основават на работите [19] - [23], [32] - [36], които са публикувани или приети за публикуване както следва:

- [21] - *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, (accepted),
- [23] - *Problems of Information Transmission*, 2008, (accepted),
- [32] - *Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski"*, (2004),
- [33], [34], [36], [22] - *Proc. Intern. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, (2002, 2004, 2006, 2008),
- [35], [20] - *Proc. Intern. Workshop Optimal Codes and Related Topics*, (2005, 2007),
- [19] - *Scientific Research, a Journal of South-West University*, Blagoevgrad, (2007).

Статиите [19] - [23], [32] - [36] са в съавторство с Петър Бойваленков, [19] - [23] са в съавторство и със Силвия Бумова, а на [19] - [21] е съавтор и Христина Кулина.

Резултатите, представени в дисертацията, са докладвани на:

- Международните конференции по алгебрична и комбинаторна теория на кодирането: Царское село 2002, Кранево 2004, Звенигород 2006, Пампорово 2008;
- Международните конференции по оптимални кодове: Пампорово 2005, Бялата Лагуна 2007;
- *MASSEE* Международен конгрес по математика, Боровец, 2003;
- *MASSEE* Международен конгрес по математика MICOM-2006, Пафос, Кипър;
- Националните семинари по теория на кодирането: Стара Загора, 2001, Баня, 2002, 2003, 2004, 2005, Бачиново, 2006, Боровец, 2007;
- Научната сесия на ФМИ (СУ), катедра Алгебра, 2008;
- Семинари по теория на кодирането в ИМИ (БАН);
- Семинари към катедра Алгебра, ФМИ (СУ), 2008.

Благодарности

Преди всичко искам да изкажа благодарност на научния си консултант ст.н.с. II ст. дмн Петър Бойваленков за многобройните напътствия, полезните съвети и безрезервната подкрепа, оказана по време на работата ми.

Искрено съм благодарна и на н.с. I ст. д-р Силвия Бумова за съвместната ни работа и помощта при оформянето на дисертацията.

Благодаря на всички колеги от катедра Алгебра към Факултета по Математика и Информатика на Софийски Университет, както и на колегите от секция МОИ при Института по Математика и Информатика на БАН за създадената творческа атмосфера за работа и за подкрепата, препоръките и помощта, оказана по време на работата ми, като специално искам да отбележа помощта на акад. проф. дмн Стефан Додунеков, проф. д-р Керопе Чакърян, проф. дмн Недялко Ненов и доц. д-р Евгения Великова.

Глава 1

Сферични кодове и дизайни

В тази глава са представени някои основни понятия, дефиниции и резултати от тематиката, необходими и използвани в по-нататъшното изложение.

1.1 Параметри на сферични кодове и дизайни

В n -мерното Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, с $\mathbb{S}^{n-1}$ означаваме единичната сфера, т.е.

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Използваме стандартната метрика, дефинирана чрез равенството

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

и стандартното скалярно произведение

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

където $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ са произволни точки от $\mathbb{R}^n$.

За точки x и y върху сферата $\mathbb{S}^{n-1}$, скалярното произведение $\langle x, y \rangle$ съвпада с косинуса на ъгъла между векторите x и y . При това, за разстоянието между точките $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ и скалярното им произведение са налице следните зависимости

$$d(x, y) = \sqrt{2(1 - \langle x, y \rangle)} \quad \text{и} \quad \langle x, y \rangle = 1 - \frac{d^2(x, y)}{2}.$$

Последните равенства показват, че както разстоянията, така и скалярните произведения могат да бъдат използвани за описване на конфигурации от точки върху $\mathbb{S}^{n-1}$. Следвайки традициите и за удобство (виж например [43, 57, 44]), ще работим със скалярните произведения.

Дефиниция 1.1.1. *Всяко крайно непразно подмножество C на Евклидовата сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ се нарича сферичен код.*

Обикновено предполагаме, че векторите на разглежданите сферични кодове пораждат пространството $\mathbb{R}^n$ и наричаме числото n *размерност* на съответния код. Други важни характеристики на сферичен код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ са неговата *мощност* $M = |C|$, *максималното скаларно произведение* (или *максимален косинус*)

$$s = s(C) = \max\{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}.$$

и *минималното скаларно произведение* (или *минимален косинус*)

$$\ell(C) = \min\{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}.$$

Минималното разстояние на сферичен код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се дефинира чрез

$$d_{\min} = d_{\min}(C) = \min\{d(x, y) : x, y \in C, x \neq y\},$$

а максималното разстояние на $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се дефинира чрез

$$d_{\max} = d_{\max}(C) = \max\{d(x, y) : x, y \in C, x \neq y\}.$$

От връзката между разстоянията и скаларните произведения върху $\mathbb{S}^{n-1}$ следва, че между максималното/минималното скаларно произведение и минималното/максималното разстояние за един и същи код имаме следните равенствата

$$d_{\min} = \sqrt{2(1-s)} \quad \text{и} \quad s = 1 - \frac{d_{\min}^2}{2},$$

$$d_{\max} = \sqrt{2(1-\ell(C))} \quad \text{и} \quad \ell(C) = 1 - \frac{d_{\max}^2}{2}.$$

Ще използваме максималното скаларно произведение.

Дефиниция 1.1.2. *Сферичен код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с размерност n , мощност $M = |C|$ и максимален косинус s означаваме като (n, M, s) -код. Кодът C се нарича *антипода-лен*, ако $C = -C$.*

В класическия случай, когато $s \in [-1; 1)$, при фиксирани n и s се оценява величината

$$A(n, s) = \max\{M = |C| : \text{съществува } (n, M, s) \text{ код}\}.$$

Освен класическия случай, ще изследваме сферични кодове, за които скаларните произведения са във фиксиран подинтервал на интервала $[-1; 1)$. По-точно, за дадени фиксирани размерност n и интервал $[a, b] \subset [-1, 1)$, означаваме

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : \langle x, y \rangle \in [a, b], \text{ за } x, y \in C, x \neq y\} \\ &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : a \leq \ell(C) < s(C) \leq b\}. \end{aligned}$$

Проблем 1.1.3. *За дадени фиксирани размерност n и интервал $[a, b] \subset [-1, 1)$, да се намери (да се намерят граници за) максималната възможна мощност $M = |C|$ на код $C \subset S_n(a, b)$, т.е. да се намери (оцени) величината*

$$A(n; a, b) = \max\{|C| : C \subset S_n(a, b)\}.$$

Сферичните дизайни са въведени и разгледани за пръв път от Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] през 1977 г. като аналози на класическите комбинаторни дизайни. Важна мотивация за изучаването на сферичните дизайни е връзката им с численото пресмятане на интеграли върху $\mathbb{S}^{n-1}$.

Дефиниция 1.1.4. *Сферичният код C се нарича сферичен τ -дизайн ($\tau \geq 0$ е цяло число), ако равенството*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} f(x) \quad (1.1.1)$$

е изпълнено за всеки полином $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от степен, ненадминаваща τ . Тук $\mu(\cdot)$ е нормализираната Лебегова мярка, т.е. $\mu(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$.

Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код, максималното цяло неотрицателно число τ , за което C е сферичен τ -дизайн, се нарича *сила* на C . Ясно е, че ако C е сферичен τ -дизайн, $\tau \geq 1$, то C е t -дизайн за всяко $t \in \{0, 1, \dots, \tau - 1\}$. Прилагането на ортогонални трансформации не променя силата на сферичните дизайни.

Всеки сферичен код е 0-дизайн. Сферичните 1-дизайни са кодове, чийто център на тежестта съвпада с центъра на единичната сфера. В частност, оттук следва, че всеки антиподален код е поне 1-дизайн.

Поради Дефиниция 1.1.4, в числените методи точките на сферичен дизайн със сила τ се разглеждат като върхове на квадратурна формула от Чебишев тип (т.е. с еднакви тегла) с алгебрична степен на точност τ (виж например [46, 47, 54, 55]). Този факт обяснява интереса на учени от други области [48, 64, 65, 62] (най-вече физици и астрономи) към сферичните дизайни.

Посочените факти подчертават важността на въпросите за съществуване и несъществуване на сферични дизайни с относително малки мощности.

В Глави 3 и 4 са изследвани следните два основни проблема:

Проблем 1.1.5. *За фиксирани размерност n и сила τ да се намери (да се намерят граници за) минималната възможна мощност на τ -дизайн върху $\mathbb{S}^{n-1}$, т.е. да се намери (оцени) величината*

$$B(n, \tau) = \min\{M = |C| : \text{съществува } \tau\text{-дизайн } C \subset \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Проблем 1.1.6. *За фиксирани размерност $n \geq 3$, сила $\tau \geq 2$ и мощност M да се определи дали съществува сферичен τ -дизайн с M точки върху $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Всички възможни мощности на дизайни върху единичната окръжност (най-често представяни като обединение на правилни многоъгълници) са известни [51]. По тази причина в по-нататъшното изложение считаме, че $n \geq 3$.

1.2 Полиноми на Гегенбауер

Получаването на границите на линейното програмиране и използването на полиномиални техники за кодове и дизайни се основава на теорията на ортогоналните полиноми [60]. Това се дължи на факта, че различни класове ортогонални полиноми се явяват зонални сферични функции за съответните полиномиални пространства.

За Евклидовата сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ са релевантни полиномите на Гегенбауер $\{P_i^{(n)}(t)\}_{i=0}^{\infty}$ (наричани още *ултрасферични полиноми* [1, 76]), които са ортогонални относно скаларното произведение

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt.$$

В явен вид имаме

$$c_n \int_{-1}^1 P_i^{(n)}(t)P_j^{(n)}(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt = \delta_{ij},$$

където константата c_n е дефинирана чрез равенството

$$c_n = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt \right)^{-1} = \frac{\Gamma(n-1)}{2^{n-2}(\Gamma(\frac{n-1}{2}))^2}, \quad (1.2.1)$$

където $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$ е Гама функцията.

Тричленната рекурентна връзка, която също дефинира полиномите на Гегенбауер, е

$$(i+n-2)P_{i+1}^{(n)}(t) = (2i+n-2)tP_i^{(n)}(t) - iP_{i-1}^{(n)}(t) \quad (1.2.2)$$

за всяко $i \geq 1$, като $P_0^{(n)}(t) = 1$ и $P_1^{(n)}(t) = t$. Лесно се виждат нормализацията $P_i^{(n)}(1) = 1$ и факта, че полиномите на Гегенбауер от четна (нечетна) степен са четни (нечетни) функции. Да отбележим още, че старшите коефициенти са положителни и че $P_i^{(n)}(-1) = (-1)^i$ за всяко $i \geq 0$.

Полиномите на Гегенбауер могат да бъдат въведени и като полиноми на Якоби $\{P_i^{(\alpha,\beta)}(t)\}_{i=0}^{\infty}$ с параметри $\alpha = \beta = (n-3)/2$ и нормализация $P_i^{\alpha,\beta}(1) = 1$ [76].

Нека $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k$ е произволен полином с реални коефициенти. Както е добре известно, $f(t)$ се представя по единствен начин като (крайна) линейна комбинация

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0 P_0^{(n)}(t) + f_1 P_1^{(n)}(t) + \dots + f_k P_k^{(n)}(t) \\ &= f_0 + f_1 t + \dots + f_k P_k^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Коефициентите $f_0, f_1, \dots, f_k$ в това развитие на Фурие могат да бъдат пресметнати по стандартния начин с помощта на формулата за ортогоналност. Имаме

$$f_i = c_n \int_{-1}^1 f(t) P_i^{(n)}(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt, \quad (1.2.3)$$

където константата c_n е дефинирана чрез (1.2.1).

Особен интерес за нас представлява коефициентът f_0 , за който имаме формулата

$$f_0 = c_n \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} &= a_0 + \sum_{i=1}^{[k/2]} \frac{a_{2i}(2i-1)!!}{n(n+2) \cdots (n+2i-2)} \\ &= a_0 + \frac{a_2}{n} + \frac{3a_4}{n(n+2)} + \cdots . \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

При пресмятането на коефициенти f_i , за които i е близко до k , обикновено е по-удобно, вместо да се пресмятат интегралите от (1.2.3), да се решат първите няколко уравнения от линейната система, която се получава чрез сравняване на коефициентите пред съответните степени на t в развитието

$$f(t) = f_0 P_0^{(n)}(t) + f_1 P_1^{(n)}(t) + \cdots + f_k P_k^{(n)}(t).$$

Трети начин за пресмятане на f_0 чрез квадратурна формула на Гаус-Якоби е предложен от Левенщейн в [60].

Важността на полиномите на Гегенбауер за Евклидовата сфера се основава на следната зависимост, която ги свързва с хармоничния анализ [50, 77, 53, 3, 42]

$$P_i^{(n)}(\langle x, y \rangle) = \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} v_{ij}(x) v_{ij}(y), \quad (1.2.6)$$

където $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$r_i = \dim(\text{Harm}(i))$$

е размерността на пространството $\text{Harm}(i)$ от хомогенните хармонични полиноми от степен i и $\{v_{ij}(x) : j = 1, 2, \dots, r_i\}$ е ортонормиран базис на $\text{Harm}(i)$ (относно скаларното произведение $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x)g(x)d\mu(x)$).

Дясната страна на (1.2.6) не зависи от избора на точките x и y върху $\mathbb{S}^{n-1}$, а само от скаларното произведение $\langle x, y \rangle$. За размерностите на пространствата от хармонични полиноми имаме $r_0 = 1$, $r_1 = n$ и

$$r_i = \binom{n+i-1}{i} - \binom{n+i-3}{i-2} = \frac{n+2i-2}{i} \binom{n+i-3}{i-1}. \quad (1.2.7)$$

Важна роля в описанието на границите на линейното програмиране играе ядрото

$$T_k(x, y) = \sum_{i=0}^k r_i P_i^{(n)}(x) P_i^{(n)}(y).$$

Ще използваме и полиномите (виж [58, 60])

$$P_k^{1,0}(t) = \frac{(n-1)(P_k^{(n)}(t) - P_{k+1}^{(n)}(t))}{(n+2k-1)(1-t)}, \quad (1.2.8)$$

$$P_{k-1}^{1,1}(t) = \frac{2k(P_{k-1}^{(n)}(t) - P_{k+1}^{(n)}(t))}{(n+2k-2)(1-t^2)} \quad (1.2.9)$$

и

$$P_k^{0,1}(t) = \frac{(P_k^{(n)}(t) + P_{k+1}^{(n)}(t))}{1+t}. \quad (1.2.10)$$

Тези полиноми също определят ядра

$$T_k^{a,b}(x, y) = \sum_{i=0}^k r_i^{a,b} P_i^{a,b}(x) P_i^{a,b}(y)$$

(тук $(a, b) \in \{0, 1\}$), където $r_i^{a,b}$ са естествени числа.

За всяко естествено k , да означим с $t_k^{a,b}$ най-голямата нула на полинома $P_k^{a,b}(t)$, $(a, b) \in \{0, 1\}$. Тогава са в сила следните неравенства.

Лема 1.2.1. [59] *За всяко естествено число k най-големите нули на полиномите $P_k^{1,0}(t)$, $P_k^{1,1}(t)$ и $P_k^{0,1}(t)$ удовлетворяват неравенствата*

$$t_{k-1}^{1,1} < t_k^{1,0} < t_k^{1,1} < t_k^{0,1}$$

($t_0^{1,1} = -1$ по дефиниция).

1.3 Сферични (n, M, ℓ, τ) -конфигурации

Изучаването на комбинаторните свойства, и в частност на разпределението на разстоянията между точките, играе важна роля в изследването на оптималните и близките до тях кодове и дизайни.

Дефиниция 1.3.1. *Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код и $x \in C$. Системата от цели неотрицателни числа $\{A_t(x) : -1 \leq t < 1\}$, където*

$$A_t(x) = |\{y \in C : \langle x, y \rangle = t\}|$$

се нарича спектър на C относно x .

Системата от рационални неотрицателни числа $\{A_t : -1 \leq t < 1\}$, където

$$A_t = \frac{1}{|C|} \sum_{x \in C} A_t(x)$$

се нарича спектър на C .

Обикновено няма да разглеждаме случаите $A_t(x) = 0$ и $A_t = 0$. Особен интерес за нас представляват кодовете, за които числата $A_t(x)$ не зависят от x .

Дефиниция 1.3.2. Ако $A_t(x) = A_t$ за всяко $t \in [-1, 1)$ и за всяка точка $x \in C$, кодът C се нарича регулярен.

Броят на различните ненулеви разстояния между точки от даден код също е важен параметър за оптималните и близките до тях кодове и дизайни.

Дефиниция 1.3.3. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, $\tau \geq 1$, с мощност $M = |C|$ и $A(C) = \{\langle x, y \rangle : x, y \in C, x \neq y\}$. Ако множеството $A(C)$ има ℓ елемента, то C се нарича (n, M, ℓ, τ) -конфигурация.

Връзката между параметрите ℓ и τ и спектрите на дизайните е разгледана за пръв път от Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42], които доказват следната теорема.

Теорема 1.3.4. [42, Теорема 7.4] Ако C е (n, M, ℓ, τ) -конфигурация с $\ell \leq \tau + 1$, то C е регулярен код и спектърът му може да бъде пресметнат като функция на n , M и числата от $A(C)$.

Един от начините за пресмятане на спектърта по Теорема 1.3.4 е предложен от Бойваленков [24] и се основава на следната еквивалентна дефиниция (виж например [45]) за сферични дизайни.

Дефиниция 1.3.5. Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича сферичен τ -дизайн, ако за всяка точка $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ равенството

$$\sum_{x \in C} f(\langle x, y \rangle) = f_0 |C|$$

е в сила за всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$ от степен $k \leq \tau$.

Ще използваме Дефиниция 1.3.5 както за случаите, когато $y \in C$, така и за $y \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus C$. Такова приложение имаме в следната теорема [24].

Теорема 1.3.6. [24] Нека C е $(n, |C|, \ell, \tau)$ -конфигурация, където $\ell \leq \tau + 1$ и $A(C) = \{t_1, t_2, \dots, t_\ell\}$. Тогава спектърът на C може да бъде пресметнат от Вандермондовата система

$$A_{t_1} t_1^i + A_{t_2} t_2^i + \dots + A_{t_\ell} t_\ell^i = b_i |C| - 1, \quad i = 0, 1, \dots, \ell - 1 \quad (1.3.1)$$

където $b_i = 0$ за нечетно i и $b_i = \frac{(2j-1)!!}{n(n+2)\dots(n+2j-2)}$, за четно $i = 2j$.

Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] описват конструкция, която позволява от съществуващи дизайни да се конструират нови, които при определени условия имат сравнително голяма сила.

Дефиниция 1.3.7. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код, $x \in C$ и $\alpha \in A(C)$. Тогава множеството $C_\alpha(x) = \{y \in C : \langle x, y \rangle = \alpha\}$, разгледано като сферичен код върху $\mathbb{S}^{n-2}$, се нарича произведен код на C .

Действително, точките от $C_\alpha(x)$ лежат в хиперравнина, която е ортогонална на вектора x . Следователно те могат да бъдат проектирани върху $\mathbb{S}^{n-2}$. Имаме $|C_\alpha(x)| = A_\alpha(x)$, а силата на $C_\alpha(x)$ се дава от следната теорема.

Теорема 1.3.8. [42, Теорема 8.2] Ако C е (n, M, ℓ, τ) -конфигурация, то $C_\alpha(x)$ е $(n-1, A_\alpha(x), \ell^*, \tau^*)$ -конфигурация, където $\ell^* = |A(C_\alpha(x))| \leq \ell$ и $\tau^* = \max\{0, \tau - \ell^* + 1\}$.

Нещо повече, всички скалярни произведения от $A(C_\alpha(x))$ принадлежат на множеството

$$S = \left\{ \frac{\beta - \alpha^2}{1 - \alpha^2} : \beta \in A(C) \right\} \cap [-1, 1]. \quad (1.3.2)$$

В частност, оттук следва, че максималното скалярно произведение на производния код $A(C_\alpha(x))$ е равно на $\frac{s - \alpha^2}{1 - \alpha^2}$.

При $\ell^* \leq \tau^* + 1$, може да бъде пресметнат (например с помощта на Теорема 1.3.6) спектърът на производния код $C_\alpha(x)$. По-точно, от Теорема 1.3.4 и 1.3.8 получаваме следния факт.

Следствие 1.3.9. Ако $\ell^* \leq \tau^* + 1$, то производният код $C_\alpha(x)$ е регулярен и спектърът му може да бъде пресметнат.

1.4 Граници на линейното програмиране за сферични кодове и дизайни

Равенството (1.2.6) позволява извеждането на твърдение, което играе централна роля в доказателството на общите теореми за границите на линейното програмиране.

Теорема 1.4.1. [42, Следствие 3.8], [58, (1,7)] За всеки сферичен код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ и за всеки полином с реални коефициенти $f(t)$ е в сила равенството

$$|C|f(1) + \sum_{x, y \in C, x \neq y} f(\langle x, y \rangle) = |C|^2 f_0 + \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{r_i} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\sum_{x \in C} v_{ij}(x) \right)^2, \quad (1.4.1)$$

където $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$.

Отчитането на особеностите на сферичните кодове и дизайни в (1.4.1) позволява да бъдат изведени следните общи теореми.

Теорема 1.4.2. (Граница на линейното програмиране за сферични кодове [42, 52]) Нека $n \geq 3$, $s \in [-1, 1)$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти, за който са изпълнени условията

(A1) $f(t) \leq 0$ за всяко $t \in [-1, s]$,

(A2) Коефициентите в развитието $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$ удовлетворяват неравенствата $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ за $i = 1, \dots, k$.

Тогава $A(n, s) \leq f(1)/f_0$.

Множеството от полиномите, които удовлетворяват (A1) и (A2), е непразно за всяко $n \geq 3$ и $s \in [-1, 1)$.

В Глава 6 ще докажем и използваме аналог на Теорема 1.4.2 за случая, когато предварително е известно, че скаларните произведения на C се съдържат в интервал $[a, b] \subset [-1, 1)$.

За доказателството на съответната теорема за сферични дизайни се използва и следната еквивалентна дефиниция за дизайн [42]:

Дефиниция 1.4.3. Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн тогава и само тогава, когато

$$\sum_{x \in C} v(x) = 0 \quad (1.4.2)$$

за всеки полином $v(x) \in \text{Harm}(1) \oplus \text{Harm}(2) \oplus \dots \oplus \text{Harm}(\tau)$ (т.е. за всеки хармоничен полином от степен, ненадминаваща τ).

Теорема 1.4.4. (Граница на линейното програмиране за сферични дизайни [42]) Нека $n \geq 3$, $\tau \geq 1$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти, за който са изпълнени условията

(B1) $f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1, 1]$,

(B2) Коефициентите в развитието $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$ удовлетворяват неравенствата $f_i \leq 0$ за $i = \tau + 1, \dots, k$.

Тогава $B(n, \tau) \geq f(1)/f_0$.

Задачата за намиране и изследване на подходящи полиноми за Теорема 1.4.2 и 1.4.4 е разглеждана от много автори след средата на 70-те години на 20-ти век. С изключение на някои частни случаи, не е известно кои са полиномите, които дават най-добри оценки чрез Теорема 1.4.2 и 1.4.4.

1.5 Граници на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за дизайни и на Левенщейн за кодове

При фиксирани n и τ , Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] прилагат Теорема 1.4.4, т.е. използват границата на линейното програмиране за дизайни за полинома

$$f_{\tau}^{(n)}(t) = \begin{cases} (t+1) \left(P_{k-1}^{1,1}(t) \right)^2, & \text{ако } \tau = 2k-1, \\ \left(P_k^{1,0}(t) \right)^2, & \text{ако } \tau = 2k. \end{cases}$$

Условията (B1) и (B2) от Теорема 1.4.4 очевидно са удовлетворени от полинома $f_\tau^{(n)}(t)$ и след пресмятането на частното $f_\tau^{(n)}(1)/f_0$ имаме

$$B(n, \tau) \geq \begin{cases} 2 \binom{n+k-2}{n-1}, & \text{ако } \tau = 2k-1, \\ \binom{n+k-1}{n-1} + \binom{n+k-2}{n-1}, & \text{ако } \tau = 2k. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Означаваме дясната страна на (1.5.1) с $D(n, \tau)$. Да отбележим, че

$$\begin{aligned} D(n, 2k-1) &= \left(1 - \frac{P_{k-1}^{1,0}(-1)}{P_k^{(n)}(-1)}\right) \sum_{i=0}^{k-1} r_i, \\ D(n, 2k) &= \sum_{i=0}^k r_i. \end{aligned}$$

Сферичните дизайни, които достигат границата (1.5.1), се наричат *плътни* [42]. При $\tau = 1, 2$ и 3 във всяка размерност $n \geq 3$ съществуват плътни τ -дизайни, като те са единствени с точност до изометрия. Действително, двойка противоположни точки образува плътен 1-дизайн, върховете на правилния n -мерен симплекс образуват плътен 2-дизайн с $n+1$ точки, а векторите на ортонормиран базис заедно с противоположните им образуват плътен 3-дизайн с $2n$ точки. Последният код се нарича също и биортогонален. Следователно имаме

$$B(n, 1) = 2, \quad B(n, 2) = n+1 \quad \text{и} \quad B(n, 3) = 2n.$$

От друга страна, при $n \geq 3$ и $\tau \geq 4$ са известни точно осем плътни дизайна (всичките описани като такива от Делсарт-Гьоталс-Зайдел в [42]), които също са единствени с точност до изометрия [11]).

Първите подобрения в някои случаи на границата (1.5.1) с повече от 1 са получени от Бойваленков-Никова [30, 31] през 1993г. с помощта на подходящи полиноми. Аналогични подобрения са получени през 1997г. от Юдин [78], който изследва и асимптотичното поведение на новите граници в асимптотичния процес, при който размерността n е фиксирана, а силата τ расте неограничено.

Условията за съществуване на подобрения на (1.5.1) чрез линейно програмиране са изследвани от Ников-Никова [67] (виж също дисертацията на Никова [66]) като аналог на съответните изследвания на Бойваленков-Бумова-Данев [15] за кодове.

По-нататъшни подобрения на (1.5.1) са получени от Бойваленков-Данев-Никова [28] и Бойваленков-Бумова-Данев [15, 16]. Подходът, използван в работите [28, 15, 16] вече надхвърля възможностите на "чистото" линейно програмиране, като резултати за несъществуване на дизайни се получават и в случаите, когато (1.5.1) не може да бъде подобрена с помощта единствено на Теорема 1.4.4.

Друга важна граница е границата на Левенщейн за величината $A(n, s)$.

За всяко естествено число k разглеждаме затворените интервали

$$\mathcal{I}_m = \begin{cases} [t_{k-1}^{1,1}, t_k^{1,0}], & \text{ако } m = 2k-1, \\ [t_k^{1,0}, t_k^{1,1}], & \text{ако } m = 2k, \end{cases}$$

като дефинираме $\mathcal{I}_0 = [-1, t_1^{1,0}]$. От Лема 1.2.1 следва, че интервалите $\mathcal{I}_m$ определят разбиране на полуотворения интервал $\mathcal{I} = [-1, 1)$ на изброимо много непресичащи се във вътрешни точки затворени подинтервали.

За всяко $s \in \mathcal{I}_m$, Левенщейн [57, 60] използва полинома

$$f_m^{(n,s)}(t) = \begin{cases} (t-s) (T_{k-1}^{1,0}(t,s))^2, & \text{ако } m = 2k-1, \\ (t+1)(t-s) (T_{k-1}^{1,1}(t,s))^2, & \text{ако } m = 2k, \end{cases}$$

от степен m в Теорема 1.4.2. Условието (A1) очевидно е изпълнено, а може да се докаже, че (A2) също е налице за всички стойности на $s \in \mathcal{I}_m$ (дори и в малко по-широк интервал), като при това $f_i > 0$ за $i = 0, 1, \dots, m$.

Пресмятането на частното $f_m^{(n,s)}(1)/f_0$ дава следната граница

$$A(n, s) \leq \begin{cases} L_{2k-1}(n, s) = \binom{k+n-3}{k-1} \left[\frac{2k+n-3}{n-1} - \frac{P_{k-1}^{(n)}(s) - P_k^{(n)}(s)}{(1-s)P_k^{(n)}(s)} \right] \\ \quad \text{за } s \in \mathcal{I}_{2k-1}, \\ L_{2k}(n, s) = \binom{k+n-2}{k} \left[\frac{2k+n-1}{n-1} - \frac{(1+s)(P_k^{(n)}(s) - P_{k+1}^{(n)}(s))}{(1-s)(P_k^{(n)}(s) + P_{k+1}^{(n)}(s))} \right] \\ \quad \text{за } s \in \mathcal{I}_{2k}. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

При фиксирана размерност n , всяка от границите $L_m(n, s)$ е гладка по s . Функцията

$$L_m(n, s) = \begin{cases} L_{2k-1}(n, s) & \text{при } s \in \mathcal{I}_{2k-1}, \\ L_{2k}(n, s) & \text{при } s \in \mathcal{I}_{2k} \end{cases}$$

е непрекъсната по s , като в краищата на интервалите $\mathcal{I}_m$ са в сила равенствата

$$L_{2k-2}(n, t_{k-1}^{1,1}) = L_{2k-1}(n, t_{k-1}^{1,1}) = D(n, 2k-1) = 2 \binom{n+k-2}{n-1}, \quad (1.5.3)$$

$$L_{2k-1}(n, t_k^{1,0}) = L_{2k}(n, t_k^{1,0}) = D(n, 2k) = \binom{n+k-1}{n-1} + \binom{n+k-2}{n-1}. \quad (1.5.4)$$

Да отбележим, че освен непрекъснатостта на $L_m(n, s)$, тъждествата (1.5.3, 1.5.4) показват и връзка между границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел и Левенщейн.

Тъй като $\mathcal{I}_1 = [-1, -\frac{1}{n}]$ и $\mathcal{I}_2 = [-\frac{1}{n}, 0]$, а стойностите на $A(n, s)$ са известни за $s \in [-1, 0]$, по-нататък разглеждаме само границите $L_m(n, s)$ за $m \geq 3$. Границата

$$A(n, s) \leq L_m(n, s)$$

се нарича m -та граница на Левенщейн.

Например за третата, четвъртата и петата граници на Левенщейн имаме съответно

$$A(n, s) \leq L_3(n, s) = \frac{n(1-s)[2+(n+1)s]}{1-n s^2}$$

за всяко $s \in \mathcal{I}_3 = [t_1^{1,1}, t_2^{1,0}] = \left[0, \frac{\sqrt{n+3}-1}{n+2}\right]$,

$$A(n, s) \leq L_4(n, s) = \frac{2n(1-s)[(n+2)s+1]}{1+2s-(n+2)s^2}$$

за всяко $s \in \mathcal{I}_4 = [t_2^{1,0}, t_2^{1,1}] = \left[\frac{\sqrt{n+3}-1}{n+2}, \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right]$ и

$$A(n, s) \leq L_5(n, s) = \frac{n(1-s)[(n+3)(n+2)s^2 + 4s(n+2) - n + 1]}{2s(3 - (n+2)s^2)}$$

за всяко $s \in \mathcal{I}_5 = [t_2^{1,1}, t_3^{1,0}] = \left[\frac{1}{\sqrt{n+2}}, t_3^{1,0}\right]$.

От доказателството на Теорема 1.4.2 следва [57], че ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е максимален $(n, L_m(n, s), s)$ код, то C е m -дизайн. Освен това броят на различните скаларни произведения между различни точки от C не може да надвишава броя на нулите на полинома $f_m^{(n,s)}(t)$, т.е. е не повече от $\lfloor (m+1)/2 \rfloor$. Съгласно Теорема 1.3.4 спектърът на C може да бъде пресметнат.

Всички известни кодове, които достигат границата (1.5.2) са описани от Левенщейн в [59, Табл. 3]. С изключение на една безкрайна редица (да напомним, че $m \geq 3$), известни са само краен брой $(n, L_m(n, s), s)$ -кодове. Да отбележим, че от (1.5.3-1.5.4) следва, че всички $(n, L_m(n, s), s)$ -кодове, за които $s > 0$ е край на интервала $\mathcal{I}_m$, са същевременно и плътни дизайни със сила m или $m+1$ в зависимост от това дали s е ляв или десен край на $\mathcal{I}_m$.

1.6 Известни ограничения за структурата на сферични дизайни

Някои свойства на полиномите на Левенщейн позволяват извеждането на важна за нашето изложение формула за коефициента f_0 в развитието на някои полиноми с реални коефициенти по полиномите на Гегенбауер.

Да започнем с описанието на корените на полиномите на Левенщейн $f_m^{(n,s)}(t)$. Полиномът $(t-s)T_{k-1}^{1,0}(t, s)$ има k прости реални нули $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$, които принадлежат на интервала $[-1, 1)$. Считаме, че

$$-1 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{k-2} < \alpha_{k-1} = s.$$

Да отбележим, че $\alpha_0 = -1$ точно когато $s = t_{k-1}^{1,1}$.

Аналогично, полиномът $(t+1)(t-s)T_{k-1}^{1,1}(t, s)$ има $k+1$ прости реални нули

$$-1 = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{k-1} < \beta_k = s.$$

Левенщейн [59] доказва, че числата $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ (съответно $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$) могат да бъдат разглеждани като върхове за квадратурна формула на Гаус-Якоби

за числено интегриране в интервала $[-1, 1]$ с тегло $(1 - t^2)^{(n-3)/2}$. Формулировката на това свойство е следната.

Теорема 1.6.1. [59] а) За всяко фиксирано $s \in \mathcal{I}_{2k-1}$ съществуват положителни числа (тегла) $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$, такива, че равенството

$$f_0 = \rho_k f(1) + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_i f(\alpha_i) \quad (1.6.1)$$

е изпълнено за всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^{2k-1} f_i P_i^{(n)}(t)$ от степен, ненадминаваща $2k-1$. Нещо повече, числата $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$ са еднозначно определени от n и s , като е изпълнено равенството $\rho_k = 1/L_{2k-1}(n, s)$.

б) За всяко фиксирано $s \in \mathcal{I}_{2k}$ съществуват неотрицателни числа (тегла) $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$ (като нулево тегло е възможно единствено при $s = t_k^{1,0}$, когато $\gamma_0 = 0$), такива, че равенството

$$f_0 = \gamma_{k+1} f(1) + \sum_{i=0}^k \gamma_i f(\beta_i) \quad (1.6.2)$$

е изпълнено за всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^{2k} f_i P_i^{(n)}(t)$ от степен, ненадминаваща $2k$. Нещо повече, $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$ са еднозначно определени от n и s , като е изпълнено равенството $\gamma_{k+1} = 1/L_{2k}(n, s)$.

Формули за теглата ρ_i ($0 \leq i \leq k-1$) и γ_i ($0 \leq i \leq k$) могат да бъдат намерени в [59, 60, 27] (вж. Лема 1.6.3 и 1.6.4 по-долу).

От формулите на Кристофел-Дарбу [59] следва по-прецизно формулиране на полиномите, чиито корени са числата $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ (съответно $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$).

Лема 1.6.2. [59, 60] а) Числата $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ съвпадат с корените на уравнението

$$P_k^{1,0}(t)P_{k-1}^{1,0}(s) - P_k^{1,0}(s)P_{k-1}^{1,0}(t) = 0.$$

б) Числата $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ съвпадат с корените на уравнението

$$P_k^{1,1}(t)P_{k-1}^{1,1}(s) - P_k^{1,1}(s)P_{k-1}^{1,1}(t) = 0.$$

Ще използваме уравненията от Лема 1.6.2 за пресмятанията на $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ в практическите приложения.

Поведението на нулите на полиномите на Левенщайн и на съответните тегла, разглеждани като функции на s , се описва от следващите две лема.

Лема 1.6.3. а) [27] Функциите $\alpha_i = \alpha_i(s)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ и $\beta_i = \beta_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, k$ са строго растящи съответно за $s \in [t_{k-1}^{1,1}, t_k^{1,0}]$ и $s \in [t_k^{1,0}, t_k^{1,1}]$.

б) [40] Ако $s = t_k^{1,0}$ то $\gamma_0 = 0$, $\rho_i = \gamma_{i+1}$ и $\alpha_i = \beta_{i+1}$ за $i = 0, 1, \dots, k-1$.

в) [40] Ако $s = t_k^{1,1}$, то $\rho_i = \gamma_{i+1}$, $\beta_{i+1} = \alpha_i$ за $i = 0, 1, \dots, k$ и $\alpha_0 = -1$.

Лема 1.6.4. Имаме $\alpha_i \neq -\alpha_j$ за всички $i, j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и за всяко $s \in (t_{k-1}^{1,1}, t_k^{1,0})$.

Следващата лема въвежда някои параметри за сферичните кодове и дизайни.

Лема 1.6.5. [45, 26, 27] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, то съществува единствено число $s \in [a, 1)$, където $a = t_{k-1}^{1,1}$ при $\tau = 2k - 1$ и $a = t_k^{1,0}$ при $\tau = 2k$, за което $|C| = L_\tau(n, s)$. В частност, мощността $|C|$ еднозначно определя $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = s$ и $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k = 1/L_{2k-1}(n, s) = 1/|C|$ при $\tau = 2k - 1$ или $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ и $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1} = 1/L_{2k}(n, s) = 1/|C|$ при $\tau = 2k$.

Оттук нататък при предположение за съществуване на τ -дизайн C винаги разглеждаме C заедно със съответните корени на полинома на Левенщайн $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = s$ и теглата $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k = 1/L_{2k-1}(n, s)$, при $\tau = 2k - 1$ или съответно корените $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ и теглата $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k+1} = 1/L_{2k}(n, s)$, при $\tau = 2k$, съгласно Лема 1.6.5. Да отбележим, че равенството $|C| = L_\tau(n, s)$ не означава непременно, че C е максимален сферичен код.

Когато C е сферичен $2k - 1$ -дизайн за $\rho_0|C|$ е налице следната формула

$$\rho_0|C| = -\frac{(1 - \alpha_1^2)(1 - \alpha_2^2) \cdots (1 - \alpha_{k-1}^2)}{\alpha_0(\alpha_0^2 - \alpha_1^2)(\alpha_0^2 - \alpha_2^2) \cdots (\alpha_0^2 - \alpha_{k-1}^2)},$$

която ще използваме в числовите пресмятания на някои конкретни приложения.

Да означим с $g(t)$ следния полином

$$g(t) = (t - \alpha_1)^2(t - \alpha_2)^2 \cdots (t - \alpha_{k-1})^2 = \sum_{i=0}^{2k-2} g_i P_i^{(n)}(t).$$

Тогава от (1.6.1) следва, че $g_0 = \rho_0|C|g(\alpha_0)$.

Удобно е да въведем следните означения, които ще използваме за описване на скаларните произведения и на ограниченията, получени за тези скаларни произведения.

Дефиниция 1.6.6. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. За произволна точка $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, разглеждаме

$$I(x) = \{\langle u, x \rangle : u \in C\}.$$

Съществува наредба на точките в $C = \{u_1, u_2, \dots, u_{|C|}\}$ такава, че $-1 \leq \langle u_1, x \rangle \leq \langle u_2, x \rangle \leq \cdots \leq \langle u_{|C|}, x \rangle \leq 1$. Да означим $t_i(x) = \langle u_i, x \rangle$ за $i = 1, 2, \dots, |C|$. Тогава можем да считаме, че

$$I(x) = \{t_1(x), t_2(x), \dots, t_{|C|}(x)\},$$

където $-1 \leq t_1(x) \leq t_2(x) \leq \cdots \leq t_{|C|}(x) \leq 1$, като $t_{|C|}(x) = 1 \iff x \in C$.

Да отбележим, че са възможни равенства $t_i(x) = t_{i+1}(x)$, т.е. $I(x)$ може да бъде мултимножество.

Дефиниция 1.6.7. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. За дадена точка $x \in C$, ще означаваме с $L_{\tau,i}(x)$ и $U_{\tau,i}(x)$ съответно всяка (нетривиална) долна и горна граници за скаларното произведение $t_i(x)$, т.е.

$$L_{\tau,i}(x) \leq t_i(x) \leq U_{\tau,i}(x).$$

Когато получените ограничения са налице за всяка точка $x \in C$, ще пропускаме x в означенията, т.е. ще бележим тези граници съответно с $L_{\tau,i}$ и $U_{\tau,i}$,

$$L_{\tau,i} \leq t_i(x) \leq U_{\tau,i}.$$

Означенията от Дефиниция 1.6.6, приложени за $x \in C$ върху равенството от Дефиниция 1.3.5, водят до

$$\sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(x)) = f_0|C| - f(1), \quad (1.6.3)$$

което е в сила за всяка точка $x \in C$ и за всеки полином $f(t)$ от степен $1, 2, \dots, \tau$.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$ -дизайн и числото $s \geq t_{k-1}^{1,1}$ е такова, че $|C| = L_{2k-1}(n, s)$.

Теорема 1.6.8. [16] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$ -дизайн, то за всяка точка $x \in C$ са изпълнени неравенствата

$$t_1(x) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1} \quad (1.6.4)$$

и

$$t_{|C|-1}(x) \geq s = \alpha_{k-1} = L_{2k-1,|C|-1}. \quad (1.6.5)$$

Ако в някой от тези два случая имаме равенство, то всички елементи на $I(x)$ са от множеството $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}\}$ (в частност, равенство има и в двата случая).

Аналогично, ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k)$ -дизайн и числото $s \geq t_k^{1,0}$ е такова, че $|C| = L_{2k}(n, s)$, е в сила следното твърдение.

Теорема 1.6.9. [16] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k)$ -дизайн, то за всяка точка $x \in C$ са изпълнени неравенствата

$$t_1(x) \leq \beta_1 = U_{2k,1} \quad (1.6.6)$$

и

$$t_{C-1}(x) \geq s = \beta_k = L_{2k,|C|-1}. \quad (1.6.7)$$

Ако в някой от тези два случая имаме равенство, то всички елементи на $I(x)$ са от множеството $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k\}$ (в частност, равенство има и в двата случая).

Неравенствата (1.6.5) и (1.6.7), които са изпълнени при съответните условия на Теорема 1.6.8 и Теорема 1.6.9, са обобщение съответно на неравенствата $s(C) \geq t_{k-1}^{1,1}$ при $\tau = 2k-1$ и $s(C) \geq t_k^{1,0}$ при $\tau = 2k$, доказани от Фазекаш-Левенщейн в [45].

Теорема 1.6.10. [16] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност, то

$$\rho_0|C| \geq 2. \quad (1.6.8)$$

Следващата лема е доказана от Бойваленков-Бумова-Данев в [16], но ние приеждаме доказателство на първата ѝ част за пълнота, а и защото дефинираният в него граф Γ се използва отново в Глава 3.

Лема 1.6.11. [16] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност, то съществуват три различни точки x, y и z от C , за които:

- а) $\langle x, y \rangle = t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0$ и $\langle x, z \rangle = t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0$.
- б) $t_{|C|-1}(z) \geq \max\{\alpha_{k-1}, 2\alpha_0^2 - 1\} = L_{2k-1, |C|-1}(z)$.

Доказателство. (на първата част) Нека Γ е ориентиран граф с върхове точките от C и ребра

$$x \rightarrow y \Leftrightarrow t_1(x) = \langle x, y \rangle \quad \text{и}$$

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow t_1(x) = t_1(y) = \langle x, y \rangle.$$

Тъй като $|\Gamma| < \infty$, всяко ребро дава начало на път, който завършва като цикъл или с двупосочно ребро $u \leftrightarrow v$. За цикли, в които всички ребра са от тип $\leftrightarrow$ и дължина поне три, твърдението очевидно е в сила (взимаме произволен подпът с дължина 3).

Да допуснем, че имаме цикъл, който започва с ребро от тип $u \rightarrow v$. Нека този цикъл е $uvv_1 \dots v_r u$. Тогава $t_1(u) > t_1(v) \geq t_1(v_1) \geq \dots \geq t_1(v_r) = t_1(u)$, противоречие (с други думи, индуцираните цикли от този тип в Γ са възможни само ако тяхната дължина е две). Следователно всеки път, който започва с ребро от тип $\rightarrow$, завършва с ребро $\leftrightarrow$.

Тъй като $|\Gamma| = |C|$ е нечетно, не можем да разбием Γ на непресичащи се цикли с дължина 2. Следователно имаме ситуация от вида $y \leftrightarrow x \leftarrow z$, което завършва доказателството. $\square$

Да отбележим, че от Лема 1.6.11 имаме $t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1}$ и $t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1} = U_{2k-1,2}(x)$.

Една от целите ни в Глава 3 и Глава 4 ще бъде за сферични $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност да получаваме нова горна граница за $t_1(z)$, т.е. оценка от вида

$$t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0. \quad (1.6.9)$$

Такива граници позволяват да се стартира процес, който води често до резултати за несъществуване.

Глава 2

Върху някои сферични (n, M, ℓ, τ) -конфигурации

Много изследвания на комбинаторни обекти започват с предположения за някаква регулярност. В тази глава са разгледани (n, M, ℓ, τ) -множества за параметри $(\ell, \tau) = (2, 3)$, $(2, 2)$ и $(3, 5)$. Тъй като често множествата с оптимални параметри имат голяма сила като сферични дизайни, мотивацията за изучаване на $(n, M, 2, 3)$, $(n, M, 2, 2)$ и $(n, M, 3, 5)$ - конфигурациите е естествена. Изчисляването на спектрите на тези кодове и на съответните им производни кодове дава възможност да докажем съответна теорема на Лойд, т.е. всички скаларни произведения са рационални числа. Тези техники ни позволяват да изследваме следния проблем.

Проблем 2.0.1. За фиксирани размерност $n \geq 3$, брой различни разстояния ℓ и сила $\tau \geq 2$, да се намерят всички мощности M , за които съществуват сферични (n, M, ℓ, τ) -конфигурации. В частност, да се намери максималната възможна мощност M , за която съществува сферична (n, M, ℓ, τ) -конфигурация.

Като резултат от това изследване са получени и класификационни резултати за разглежданите в тази глава (n, M, ℓ, τ) -конфигурации.

2.1 Сферични $(n, M, 2, 3)$ -конфигурации

Множествата в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ с фиксиран брой ℓ различни разстояния са разглеждани от редица автори [7, 12, 43, 42, 61, 8, 73]. При изследването на такива (n, M, ℓ, τ) -конфигурации обикновено долни граници за мощността им се получават чрез подходящи конструкции, а горни граници се получават с аналитични методи.

Делсарт-Гьоталс-Зайдел [42] доказват следната теорема, която свързва силата τ и броя на разстоянията ℓ .

Теорема 2.1.1. [42] Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е множество с ℓ разстояния и сферичен τ -дизайн. Тогава са в сила неравенствата $\tau \leq 2\ell$ и

$$M = |C| \leq D(n, 2\ell) = \binom{n+\ell-1}{\ell} + \binom{n+\ell-2}{\ell-1}.$$

Ако една от тези две граници се достига, същото важи и за другата.

Горната граница $|C| \leq D(n, 2\ell)$ от Теорема 2.1.1 е известна като ”абсолютна граница”.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(n, M, 2, 3)$ -конфигурация. Тогава от Теорема 1.3.4 следва, че сферичният код C е регулярен, а от границата на Делсарт-Гьоталс-Зайдел и Теорема 2.1.1 съответно следва, че

$$2n \leq |C| \leq \frac{n(n+3)}{2}.$$

Ако тук се достига долната или горната граница, то C е съответно плътен 3- или 4-дизайн. Затова разглеждаме само $(n, M, 2, 3)$ -конфигурации за мощността на които имаме $|C| \leq \frac{n(n+3)}{2} - 1$.

Теорема 2.1.2. Кодът C е $(n, M, 2, 3)$ -конфигурация тогава и само тогава, когато е $(n, L_3(n, s), s)$ -код.

Доказателство. Посоката ” $\Leftarrow$ ” следва от необходимите условия за достигане на границите на Левенщайн.

Обратно, нека C е $(n, M, 2, 3)$ -конфигурация и $|C| = 2n + k$, където k е цяло число такова, че: $0 < k < \frac{n(n-1)}{2}$.

От Теорема 1.3.4 имаме, че кодът C е регулярен. Нека $A(C) = \{t_1, t_2\}$ и да означим за краткост $A_{t_1}(x) = P$ и $A_{t_2}(x) = Q$ (P и Q не зависят от точката $x \in C$), като $t_1 < t_2$.

Тогава с помощта на полиномите $t - t_2$ и $t - t_1$ в Дефиниция 1.3.5 (за $x \in C$) изразяваме

$$P = \frac{(2n+k-1)t_2+1}{t_2-t_1} \quad \text{и} \quad Q = \frac{(2n+k-1)t_1+1}{t_1-t_2}.$$

По-нататък с помощта на полинома $f(t) = (t-t_1)(t-t_2)$ в Дефиниция 1.3.5 получаваме

$$t_1 t_2 = \frac{n(t_1+t_2)+n+k}{n(1-2n-k)}.$$

С помощта на горните равенства и тъждеството

$$Pt_1^3 + Qt_2^3 = -1,$$

което следва от Дефиниция 1.3.5 за $f(t) = t^3$, достигаем до равенствата

$$t_1 + t_2 = -\frac{n-1}{n+k-1} \quad \text{и} \quad t_1 t_2 = -\frac{k}{n(n+k-1)}.$$

Следователно t_1 и t_2 са корени на квадратното уравнение

$$n(n + k - 1)t^2 + n(n - 1)t - k = 0.$$

В частност имаме, че $t_1 < 0 < t_2 < |t_1|$, а именно

$$t_1 = \frac{n(n - 1) - \sqrt{n^2(n + 3)^2 - 4n|C|(3n + 1 - |C|)}}{2n(n + 1 - |C|)}$$

и

$$t_2 = \frac{n(n - 1) + \sqrt{n^2(n + 3)^2 - 4n|C|(3n + 1 - |C|)}}{2n(n + 1 - |C|)}. \quad (2.1.1)$$

От друга страна получените изрази са равни на α_0 и α_1 (определените за $(n, L_3(n, s = t_2), s = t_2)$ -код), което означава, че $t_1 = \alpha_0$, $t_2 = \alpha_1$ и е налице тъждеството

$$L_3(n, t_2) = \frac{n(1 - t_2)[(n + 1)t_2 + 2]}{1 - nt_2^2}.$$

Следователно, C е $(n, L_3(n, s), s)$ -код, където $s = t_2$ се задава от (2.1.1). $\square$

В теория на кодирането се разглеждат така наречените теореми на Лойд (виж [9, 10]), които поставят силни ограничения върху възможните разстояния в даден код или клас кодове. Банай-Дамерел [9] доказват следната теорема.

Теорема 2.1.3. [15] *Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е τ -дизайн, $\tau \geq 3$, $n \geq 3$ (с изключение на случая $\tau = 5$, $n = 3$), то скаларните произведения на C са рационални.*

Подобна теорема на Лойд за $(n, L_3(n, s), s)$ -кодове е доказана от Бойваленков-Ланджев в [29]. Следващата теорема на Лойд е следствие от Теорема 2.1.2 и [29, Теорема 3.2], но за пълнота ще приведем доказателство, което е по-кратко от това в [29].

Теорема 2.1.4. (Лойд тип теорема) *Ако C е $(n, M, 2, 3)$ -конфигурация, то скаларните произведения на C са рационални.*

Доказателство. В доказателството на Теорема 2.1.2 получихме, че $t_1 + t_2$ и $t_1 t_2$ са рационални числа. От друга страна с помощта на полинома $f(t) = t$ използван в Дефиниция 1.3.5 при означенията в Теорема 2.1.2 получаваме равенството

$$Pt_1 + Qt_2 = -1,$$

което е еквивалентно на

$$P(t_1 + t_2) + (Q - P)t_2 = -1.$$

Оттук за t_2 получаваме

$$t_2 = \frac{P(n - 1) - (n + k - 1)}{(n + k - 1)(Q - P)}.$$

Последната зависимост показва, че скалярното произведение t_2 е рационално, а оттам очевидно следва, че и t_1 е рационално. $\square$

В Теорема 2.1.2 показахме, че $(n, M, 2, 3)$ -конфигурациите съвпадат със съответните $(n, L_3(n, s), s)$ -кодове. Последните са разглеждани от Бойваленков-Данев-Ланджев в [27], като там е дадена пълна класификация на $(n, L_3(n, s), s)$ -кодове за размерност $n \leq 1600$. Освен това Бойваленков-Данев [26] описват единадесет безкрайни редици от параметри, за които е възможно да съществуват такива кодове.

2.2 Сферични $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации

В тази част ще разгледаме частен случай на Проблем 2.0.1, когато $\tau = 2$ и $\ell = 2$.

Проблем 2.2.1. *За фиксирана размерност $n \geq 3$, да се намерят всички мощности M , за които съществуват сферични $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации. В частност, да се намери максималната възможна мощност M , такава, че съществува сферична $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация.*

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация. Тогава от границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел и Теорема 2.1.1 следва, че

$$n + 1 \leq |C| \leq \frac{n(n+3)}{2}$$

и C е регулярен код (по Теорема 1.3.4). Да означим $M = |C| = n + 1 + k$, където $0 < k < \frac{(n-1)(n+2)}{2}$, k е естествено число. Налице е следната връзка между скалярните произведения t_1 и t_2 на C и съответните им числа от спектъра A_{t_1} и A_{t_2} .

Лема 2.2.2. *Ако C е $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация със скалярни произведения t_1 и t_2 , то*

$$t_1 = -\frac{1}{n+k} - \frac{\sqrt{D}}{n(n+k)A_{t_1}}$$

и

$$t_2 = -\frac{1}{n+k} + \frac{\sqrt{D}}{n(n+k)A_{t_2}},$$

където $D = nk(n+k+1)A_{t_1}A_{t_2}$ е естествено число.

Доказателство. Нека $A(C) = \{t_1, t_2\}$, $A_{t_1}(x) = A_{t_1}$ и $A_{t_2}(x) = A_{t_2}$ (кодът C е регулярен), като $t_1 < t_2$. Тогава с помощта на полиномите $f(t) = 1$, $f(t) = t$ и $f(t) = t^2$ използвани в Дефиниция 1.3.5 получаваме съответно следните три зависимости

$$A_{t_1} = \frac{(n+k+1)k}{1+k+nB},$$

$$A_{t_2} = \frac{n(1 + (n + k)B)}{1 + k + nB}$$

и

$$t_2 = -\frac{k + 1 + nt_1}{n(1 + (n + k)t_1)},$$

където за краткост сме означили $B = (n + k)t_1^2 + 2t_1$.

Условията A_{t_1}, A_{t_2} да са цели (Дефиниция 1.3.1) показват, че B е неотрицателно рационално число. Тогава скалярното произведение t_1 е от вида

$$t_1 = \frac{a + b\sqrt{D}}{c},$$

където a, b, c и D са рационални числа. С помощта на това равенство, от израза за B след някои алгебрични преобразувания получаваме, че B е рационално тогава и само тогава, когато

$$b[a(n + k) + c] = 0.$$

От тази зависимост следва, че са налице две възможности:

- 1) $b = 0$, т.е. скалярните произведения са рационални,
- 2) $a(n + k) + c = 0$ и $b \neq 0$, т.е. скалярните произведения са ирационални.

И в двата случая заместваем получените изрази за t_1 и t_2 в B . Образоваме частното $\frac{A_{t_2}}{A_{t_1}}$, заместваем в него преобразувания израз за B и използваме, че полученият израз е положително рационално число. Така окончателно за t_1 и t_2 получаваме

$$t_1 = -\frac{1}{n + k} - \frac{\sqrt{D}}{n(n + k)A_{t_1}}$$

и

$$t_2 = -\frac{1}{n + k} + \frac{\sqrt{D}}{n(n + k)A_{t_2}},$$

където $D = nk(n + k + 1)A_{t_1}A_{t_2}$ е естествено число. $\square$

Изследването на $(n, M, 2, 2)$ -конфигурациите може да продължи чрез изчисляване на спектрите на производните им кодове (Следствие 1.3.9). Съгласно Теорема 1.3.8 производните кодове са $(n - 1, A_{t_i}, 2, 1)$ конфигурации за $i = 1, 2$ и следователно са регулярни. Това ни дава възможност да докажем теорема на Лойд в следния вид.

Теорема 2.2.3. *Ако C е $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация със скалярни произведения t_1 и t_2 , то е изпълнено точно едно от двете:*

- 1) *двете скалярни произведения са рационални;*
- 2) *размерността n е четна, $M = 2n + 1$ и $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2n+1}}{2n}$, като $2n + 1$ не е точен квадрат.*

Доказателство. Прилагаме формулите от (1.3.2) за изразяване на новите скалярни произведения u_1, u_2 и v_1, v_2 на съответните производни кодове $C_{t_1(x)} = (n - 1, A_{t_1}, u_2)$ и $C_{t_2(x)} = (n - 1, A_{t_2}, v_2)$ като функции на t_1 и t_2 . Имаме

$$u_1 = \frac{t_1}{1 + t_1}, \quad u_2 = \frac{t_2 - t_1^2}{1 - t_1^2},$$

и

$$v_1 = \frac{t_1 - t_2^2}{1 - t_2^2}, \quad v_2 = \frac{t_2}{1 + t_2}.$$

Като използваме Дефиниция 1.3.5 за полиномите $t - u_1$, $t - u_2$ и $t - v_1$, $t - v_2$ съответно, получаваме

$$A_{u_1} = -\frac{u_2(A_{t_1} - 1) + 1}{u_1 - u_2} \quad \text{и} \quad A_{u_2} = \frac{u_1(A_{t_1} - 1) + 1}{u_1 - u_2}$$

за спектъра на производния $(n - 1, A_{t_1}, u_2)$ код и

$$A_{v_1} = -\frac{v_2(A_{t_2} - 1) + 1}{v_1 - v_2} \quad \text{и} \quad A_{v_2} = \frac{v_1(A_{t_2} - 1) + 1}{v_1 - v_2}$$

за $(n - 1, A_{t_2}, v_2)$ кода.

Заместваме u_1 , u_2 , v_1 и v_2 в горните равенства и ги решаваме относно числата от спектрите на производните кодове. Получаваме съответно

$$A_{u_1} = -\frac{A_{t_1}(t_2 - t_1^2) + 1 - t_2}{t_1 - t_2} \quad \text{и} \quad A_{u_2} = \frac{(A_{t_1} + 1)(1 - t_1)}{t_1 - t_2},$$

$$A_{v_1} = -\frac{(A_{t_2} + 1)(1 - t_2)}{t_1 - t_2} \quad \text{и} \quad A_{v_2} = \frac{A_{t_2}(t_2 - t_1^2) + 1 - t_1}{t_1 - t_2}.$$

Заместваме t_1 и t_2 от Лема 2.2.2 в първото и третото от тези равенства и след подходящи алгебрични преобразувания получаваме съответно

$$A_{u_1} = \frac{((n + k)(A_{t_1} - 1) - 2A_{t_2})A_{t_1}}{(n + k)^2} + \frac{(n(n + k) - kA_{t_2} - nA_{t_1})\sqrt{D}}{nk(n + k)^2},$$

$$A_{v_1} = \frac{((n + k)(A_{t_2} - 1) + 2A_{t_2})A_{t_1}}{(n + k)^2} + \frac{(n(n + k) - kA_{t_1} - nA_{t_2})\sqrt{D}}{nk(n + k)^2},$$

където $D = nk(n + k + 1)A_{t_1}A_{t_2}$ е естествено число.

Ако D е точен квадрат, получаваме че t_1 и t_2 са рационални, т.е. в сила е 1).

Нека D не е точен квадрат. Тъй като A_{u_1} и A_{v_1} трябва да са цели числа, получаваме

$$n(n + k) - kA_{t_2} - nA_{t_1} = 0 \quad \text{и} \quad (n + k) - kA_{t_1} - nA_{t_2} = 0.$$

Да напомним, че от доказателството на Лема 2.2.2 имаме $M = |C| = n + 1 + k$, т.е. $n + k = A_{t_1} + A_{t_2}$ откъдето получаваме, че равенствата $n(n + k) - kA_{t_2} - nA_{t_1} = 0$ и $(n + k) - kA_{t_1} - nA_{t_2} = 0$ са еквивалентни помежду си и на $n = k$.

Тогава

$$A_{u_1} = \frac{(n(A_{t_1} - 1) - A_{t_2})A_{t_1}}{2n^2} \quad \text{и} \quad A_{u_2} = \frac{(n(A_{t_1} - 1) + A_{t_1})A_{t_2}}{2n^2},$$

$$A_{v_1} = \frac{(n(A_{t_2} - 1) + A_{t_2})A_{t_1}}{2n^2} \quad \text{и} \quad A_{v_2} = \frac{(n(A_{t_2} - 1) - A_{t_1})A_{t_2}}{2n^2}.$$

От факта, че новополучените спектри трябва да са цели числа, имаме, че и числата $A_{u_1} + A_{v_1}$ и $A_{u_2} + A_{v_2}$ също трябва да са цели, т.е. цели са числата $\frac{(n-1)A_{t_1}}{n}$ и $\frac{(n-1)A_{t_2}}{n}$. Тъй като $A_{t_1} + A_{t_2} = 2n$, то единствената възможност да са верни горните условия е, когато $A_{t_1} = A_{t_2} = k = n$. За да цели числата $A_{u_1} = A_{v_2} = \frac{n-2}{2}$ и $A_{u_2} = A_{v_1} = \frac{n}{2}$, трябва размерността n да е четно число. Тогава мощността на кода е $M = 2n + 1$ и имаме

$$t_1 = -\frac{1}{2n} - \frac{\sqrt{2n+1}}{2n}$$

и

$$t_2 = -\frac{1}{2n} + \frac{\sqrt{2n+1}}{2n}.$$

Ако $2n + 1$ е точен квадрат, то t_1 и t_2 са рационални, т.е. 1 отново е изпълнено).

Ако $2n + 1$ не е точен квадрат, то t_1 и t_2 са ирационални, като в този случай $n = k = A_{t_1} = A_{t_2}$ е четно число, т.е. в сила е 2). $\square$

От доказателството на Теорема 2.2.3 и неравенствата $n + 1 < M \leq \frac{n(n+3)}{2} - 1$ следва, че за намиране на подходящи кандидати за $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации (в частност за максималните по отношение на мощността M конфигурации) е достатъчно да разгледаме тези, за които числото $D = nk(n + k + 1)A_{t_1}A_{t_2}$ е точен квадрат. С помощта на програма на Maple можем за фиксирана размерност n да пресметнем потенциалните кандидати за такива $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации, т.е. можем да намерим всички възможни решения на Проблем 2.2.1. В Таблица 2.1 по-долу са представени всички кандидати за $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации в размерности $3 \leq n \leq 10$.

Например, в размерност $n = 4$ и трите възможни конфигурации съществуват, докато в размерност $n = 5$ за едната от двете възможни конфигурации е доказано, че не съществува. За всяко естествено k , имаме конструкции на $(2k, 2k + 2, 2, 2)$ -конфигурации, за които $\{t_1 = -\frac{1}{k}, t_2 = 0\}$ и $(2k, 3k, 2, 2)$ -конфигурации, за които $\{t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 0\}$, получени по аналогия на описания в следващата част метод за конструиране на $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурацията. От Таблица 2.1 се вижда, че има размерности, в които е налице единствен такъв кандидат, в частност той е максималният за тази размерност. Например, такава е $(7, 28, 2, 2)$ -конфигурацията [56, 61]. Да отбележим още, че кандидатите с максимална мощност, близка до абсолютната граница от Теорема 2.1.1 са нарядко. Такива са например $(23, 276, 2, 2)$, а за размерност $n = 23$ абсолютната граница е $M \leq 299$; $(47, 1128, 2, 2)$, където абсолютната граница е $M \leq 1175$ и $(79, 3160, 2, 2)$, където абсолютната граница е $M \leq 3239$.

От друга страна, случаят на ирационални произведения в Теорема 2.2.3 се реализира още при първата възможност $n = 6$. Съответната $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация със скалярни произведения $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{12}$ ще бъде представена в следващия параграф. Това е единственият известен ни пример за (n, M, ℓ, τ) -конфигурация за $\tau \geq 3$, $n \geq 3$ и $\tau \geq 2\ell - 2$ освен икосаедъра, за който е в сила случай 2 на Теорема 2.2.3. Освен това различията от класическата теорема на Лойд, т.е. ирационалните случаи в Теорема 2.2.3 се получават за кодове със сравнително малка мощност спрямо абсолютната граница $|C| \leq D(n, 2\ell)$. В този смисъл за екстремалните кандидати (важните за нас) за $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации е налице класическата теорема на Лойд.

размерност	скаларни произведения		спектър		мощност	съществуване
n	t_1	t_2	A_{t_1}	A_{t_2}	$M = C $	да/не/?
4	$-1/2$	0	2	3	6	да
4	$-1/2$	$1/4$	4	4	9	да
4	$-2/3$	$1/6$	3	6	10	да
5	$-1/3$	$1/3$	6	3	10	не
5	$-1/2$	$1/4$	6	8	15	да
6	$-1/3$	0	3	4	8	да
6	$-1/2$	0	2	6	9	да
6	$-(\sqrt{13}+1)/12$	$(\sqrt{13}-1)/12$	6	6	13	да
6	$-1/3$	$1/3$	9	6	16	?
6	$-2/5$	$3/10$	10	10	21	?
7	$-1/3$	$1/3$	15	12	28	?
8	$-1/4$	0	4	5	10	да
8	$-1/2$	0	2	9	12	да
8	$-(\sqrt{17}+1)/16$	$(\sqrt{17}-1)/16$	8	8	17	?
9	$-1/3$	0	3	8	12	?
9	$-1/4$	$1/6$	8	6	15	?
9	$-1/3$	$1/9$	6	9	16	?
10	$-1/5$	0	5	6	12	да
10	$-1/2$	0	2	12	15	да
10	$-1/5$	$1/5$	10	5	16	?
10	$-(\sqrt{21}+1)/20$	$(\sqrt{21}-1)/20$	10	10	21	?

Таблица 2.1. Всички възможни $(n, M, 2, 2)$ -конфигурации за $3 \leq n \leq 10$.

2.3 Сферичната $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация

В този параграф е представена конструкция на сферичен код $C \subset \mathbb{S}^5$ с $|C| = 13$ точки, който е 2-дизайн и има две различни скаларни произведения $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{12}$. Това е първата разрешена от Теорема 2.2.3 възможност за съществуване на $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация, за която е налице случай 2.

Да предположим, че $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация със скаларни произведения

$$t_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{12} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{12}.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \in C$, като за тази точка имаме, че $A_{t_1}(x) = A_{t_2}(x) = 6$. Пресмятанията по-долу са извършени с Maple, като координатите на точките са записани като десетични дроби с точност до седмата цифра след десетичната запетая. В действителност работим с аритметика в $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ и имаме точните координати на точките от C , но те са твърде тежки като

запис. Ще използваме знака "=", въпреки че дадените десетични числа са приближения.

Нека

$$V = \{a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}, a_{i,5}, a_{i,6}) \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle a_i, x \rangle = t_1(x), i = 1, \dots, 6\},$$

$$W = \{b_i = (b_{i,1}, b_{i,2}, b_{i,3}, b_{i,4}, b_{i,5}, b_{i,6}) \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle b_i, x \rangle = t_2(x), i = 1, \dots, 6\}.$$

Тогава $C = \{x\} \cup V \cup W$.

За точката a_1 имаме уравненията $\langle a_1, x \rangle = t_1$ и $\langle a_1, a_1 \rangle = 1$, откъдето

$$a_1 = (0.9234179, 0, 0, 0, 0, -0.3837959).$$

От $\langle a_2, x \rangle = t_1$, $\langle a_2, a_1 \rangle = t_2$ и $\langle a_2, a_2 \rangle = 1$ за точката a_2 имаме

$$a_2 = (0.0756212, 0.9203163, 0, 0, 0, -0.3837959).$$

Аналогично,

$$a_3 = (0.0756212, -0.5832927, 0.7118649, 0, 0, -0.3837959),$$

$$a_4 = (0.0756212, 0.0696623, -0.6970146, 0.5969086, 0, -0.3837959),$$

$$a_5 = (0.5751407, 0.1231346, 0.2600862, -0.5275454, 0.4010021, -0.3837959) \quad \text{и}$$

$$a_6 = (-0.5751407, -0.5298205, -0.2749365, -0.0693632, -0.4010021, -0.3837959).$$

Дотук са конструирани точките от кода, за които имаме $\langle a_i, x \rangle = t_1$, т.е. точките $a_i \in V$. Продължаваме по аналогичен начин с точките $b_i \in W$, за които имаме $\langle b_i, x \rangle = t_2$.

За точката b_1 имаме $\langle b_1, x \rangle = t_2$, $\langle b_1, a_1 \rangle = t_2$, $\langle b_1, a_2 \rangle = t_1$, $\langle b_1, a_3 \rangle = t_2$, $\langle b_1, a_4 \rangle = t_1$, $\langle b_1, a_5 \rangle = t_1$, $\langle b_1, a_6 \rangle = t_2$ и $\langle b_1, b_1 \rangle = 1$ откъдето намираме

$$b_1 = (0.3253810, -0.3532137, 0.0980944, -0.3888189, -0.7492793, 0.2171293).$$

Аналогично,

$$b_2 = (-0.3253810, 0.3532137, -0.0980944, 0.3888189, -0.7492793, 0.2171293),$$

$$b_3 = (0.3253810, -0.3532137, 0.0980944, 0.6179101, 0.5751407, 0.2171293),$$

$$b_4 = (0.3253810, 0.2997414, -0.2110391, -0.8259997, 0.1741386, 0.2171293),$$

$$b_5 = (-0.3253810, 0.3532137, 0.7460618, 0.3678175, 0.1741386, 0.2171293) \quad \text{и}$$

$$b_6 = (-0.3253810, -0.2997414, -0.6331172, -0.1597279, 0.5751407, 0.2171293).$$

По този начин получихме координатите на всичките тринадесет точки от кода C . С директна проверка се вижда, че C е регулярен код, т.е.

$$A_{t_i}(x) = A_{t_i}(a_j) = A_{t_i}(b_k) = 6 \quad \text{за всички } i = 1, 2 \quad \text{и } j, k = 1, 2, \dots, 6.$$

Следователно C е $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация. Да напомним, че фактическите пресмятания са в $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$, например

$$a_5 = \left(\frac{(-2 - \sqrt{13})\sqrt{130 - 2\sqrt{13}}}{108}, \frac{(-2 + \sqrt{13})\sqrt{65 + \sqrt{13}}}{108}, \frac{(-1 + 2\sqrt{13})\sqrt{91 - 5\sqrt{13}}}{204}, \right. \\ \left. \frac{(-7 - \sqrt{13})\sqrt{3094 + 170\sqrt{13}}}{1224}, \frac{\sqrt{13 - 2\sqrt{13}}}{6}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{12} \right).$$

Горната конструкция и Теорема 2.2.3 доказват следния факт.

Теорема 2.3.1. *Съществува единствена с точност до ортогонална трансформация сферична $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация.*

Съгласно Дефиниция 1.3.7 от намерената $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурация може да се конструират (от Теорема 1.3.8 и Теорема 1.3.6) следните два регулярни производни кода: $C_{t_1(x)} = (5, 6, 2, 1)$ -конфигурация със скаларни произведения $u_1 = -\frac{2+\sqrt{13}}{9}$ и $u_2 = \frac{-5+2\sqrt{13}}{27}$ и $C_{t_2(x)} = (5, 6, 2, 1)$ -конфигурация със скаларни произведения $v_1 = -\frac{5+2\sqrt{13}}{27}$ и $v_2 = -\frac{2+\sqrt{13}}{9}$.

2.4 Сферични $(n, M, 3, 5)$ -конфигурации

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(n, M, 3, 5)$ -конфигурация. Тогава от Теорема 2.1.1 и от границата на Делсарт-Гьоталс-Зайдел следва, че

$$n(n+1) \leq |C| \leq \frac{n(n+1)(n+5)}{6}.$$

Ако тук се достига долната или горната граница, то C е съответно плътен 5- или 6-дизайн. Тъй като плътни 6-дизайни не съществуват при $n \geq 3$, считаме, че $|C| < \frac{n(n+1)(n+5)}{6} - 1$.

Следващата теорема е аналог на Теорема 2.1.2 от §2.1.

Теорема 2.4.1. *Кодът C е $(n, M, 3, 5)$ -конфигурация тогава и само тогава, когато е $(n, L_5(n, s), s)$ -код.*

Доказателство. Посоката " $\Leftarrow$ " следва от условията за достигане на границите на Левенщайн.

Обратно, нека C е $(n, M, 3, 5)$ -конфигурация и $|C| = n^2 + n + k$, където $0 < k < \frac{n(n^2-1)}{6}$, k е цяло число.

Нека $A(C) = \{t_1, t_2, t_3\}$, $A_{t_1}(x) = A_{t_1}$, $A_{t_2}(x) = A_{t_2}$ и $A_{t_3}(x) = A_{t_3}$ (кодът C е регулярен по Теорема 1.3.4), като $t_1 < t_2 < t_3$.

Тогава с помощта на полиномите $f(t) = (t - t_1)(t - t_2)$, $f(t) = (t - t_2)(t - t_3)$ и $f(t) = (t - t_3)(t - t_1)$ в Дефиниция 1.3.5 (за $y \in C$) изразяваме

$$\begin{aligned} A_{t_1} &= \frac{n(n^2 + n + k - 1)t_2t_3 + n(t_2 + t_3) + n^2 + k}{n(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)}, \\ A_{t_2} &= \frac{n(n^2 + n + k - 1)t_3t_1 + n(t_3 + t_1) + n^2 + k}{n(t_3 - t_2)(t_1 - t_2)}, \\ A_{t_3} &= \frac{n(n^2 + n + k - 1)t_1t_2 + n(t_1 + t_2) + n^2 + k}{n(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)}. \end{aligned}$$

Да означим за краткост

$$U = t_1 + t_2 + t_3, \quad V = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1, \quad W = t_1t_2t_3.$$

По-нататък с помощта на полиномите $f(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$, $f(t) = t(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$ и $f(t) = t^2(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$, заместени последователно в Дефиниция 1.3.5, получаваме уравненията

$$(n^2 + k)U + nV + (n^2 + n + k - 1)nW = 0,$$

$$n(n + 2)U + (n + 2)(n^2 + k)V + n(n + 2)W + 2n^2 + n + 3k = 0,$$

$$(2n^2 + n + 3k)U + n(n + 2)V + (n + 2)(n^2 + k)W + n(n + 2) = 0.$$

Разглеждаме горните равенства като система относно U , V и W и получаваме

$$U = -\frac{n(n - 1)}{n^2 - n + 2k},$$

$$V = -\frac{n^2 - n + 6k}{(n + 2)(n^2 - n + 2k)}$$

и

$$W = -\frac{n(n - 1)}{(n + 2)(n^2 - n + 2k)}.$$

Следователно числата t_1 , t_2 и t_3 са корени на кубичното уравнение

$$(n + 2)(n^2 - n + 2k)t^3 + n(n - 1)(n + 2)t^2 - (n^2 - n + 6k)t - n(n - 1) = 0.$$

От друга страна ([59, 60]) знаем, че α_0 , α_1 и $\alpha_2 = s$ също са корени на това кубично уравнение. Следователно $t_1 = \alpha_0$, $t_2 = \alpha_1$ и $t_3 = \alpha_2 = s$.

Сега твърдението следва от тъждеството

$$L_5(n, t_3) = |C| = n^2 + n + k,$$

което показва, че разглежданият от нас код C е $(n, M, 3, 5)$ -конфигурация тогава и само тогава, когато е $(n, L_5(n, s = t_3), s = t_3)$ код. $\square$

Въпреки аналогията в твърденията и доказателствата на Теорема 2.1.2 и Теорема 2.4.1 в частта им за връзката на нашите конфигурации и максималните кодове по границите на Левенщайн, опитът за доказване на теорема на Лойд за $(n, M, 3, 5)$ -конфигурации се сблъсква с редица технически трудности. От друга страна Бойваленков-Данев в [27] дават пълна класификация на всички $(n, L_5(n, s), s)$ -кодове за $n \leq 400$. От Теорема 2.4.1 и тази класификация следва, че Теорема на Лойд е в сила за тези размерности.

Тази глава е написана въз основа на [32] и [33]. Конструкцията от §2.3 на $(6, 13, 2, 2)$ -конфигурацията, която дава доказателството за единственост и е пръв пример на случай 2 в Теорема 2.2.3, т.е. $(n, M, 2, 2)$ -конфигурация с две различни ирационални скаларни произведения, досега не е публикувана.

Глава 3

Ограничения върху структурата на някои сферични дизайни

В тази глава са получени граници за скаларните произведения на някои сферични дизайни. Идеята за изследване на структурата на сферичните дизайни с помощта на подходящи полиноми в Дефиниция 1.3.5 е използвана за пръв път от Фазекаш-Левенщейн [45]. Някои граници на Фазекаш-Левенщейн са подобрени от Бойваленков-Данев-Никова [28], Юдин [78] и Бойваленков-Бумова-Данев [15, 16]. Целта на настоящата глава е развитие на методите от [15, 16] (виж също [13]) и получаването на нови граници за скаларните произведения на някои сферични дизайни. Намирането на граници за $t_1(x)$, $t_2(x)$ и $t_{|C|-1}(x)$ (т.е. за точките от C , които са най-отдалечени от x или най-близки до x) дава възможност за получаване на необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Това е основата на метода, описан в [16] от Бойваленков-Бумова-Данев. В последния параграф на тази глава ние продължаваме този подход, като получаваме нови граници за споменатите скаларни произведения и добавяме при изследването на въпроса за съществуване на даден дизайн и граници за $t_3(x)$ и $t_{|C|-2}(x)$ за някои специални точки $x \in C$. Основна роля за усилването на метода играе съществуването на ”добра” специална четворка точки от дизайна с определени свойства. Получени са нови необходими условия за съществуване на някои сферични $(2k - 1)$ -дизайни с нечетна мощност.

3.1 Горна граница за максималното скаларно произведение на сферични τ -дизайни

В тази част получаваме горна граница за максималното скаларно произведение на сферични τ -дизайни. Използваният по-долу подход е разглеждан за пръв път в дисертацията на Бумова [13], но там не са търсени оптимални решения за него. Нашата цел е намирането на оптимални (в рамките на разглежданите задачи) полиноми, т.е. такива, с които се получават възможно най-добри граници за $s(C)$.

3.1. Горна граница за максималното скалярно произведение на сферични τ -дизайни 43

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. Ще считаме, че n , $|C|$ и τ са фиксирани и разглеждаме следното множество от реални полиноми.

Дефиниция 3.1.1. Да означим с

$$P_{\tau,s}^+ = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : f(t) = A^2(t), \text{ ако } \tau \text{ е четно, или} \\ f(t) = (t+1)A^2(t), \text{ ако } \tau \text{ е нечетно}\},$$

където полиномът $A(t) \in \mathbb{R}[t]$ има $\deg(A)$ реални нули в $[-1, s]$. Нека μ_f е най-големият корен на уравнението $2f(t) = f_0|C|$, където $f(t) \in P_{\tau,s}^+$.

Ясно е, че за всеки полином $f(t) \in P_{\tau,s}^+$, имаме $f(t) \geq 0$, за всяко $t \in [-1, 1]$ и $f(t)$ е растяща функция в интервала $(s, +\infty)$. Ще наричаме “оптимален” полиномът от $P_{\tau,s}^+$, с помощта на който получаваме минимална стойност на μ_f . От формулата (1.2.4) за f_0 следва, че μ_f е непрекъснатата функция на коефициентите на $A(t)$ и достига своя минимум.

Теорема 3.1.2. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. Тогава

$$s(C) \leq U_{\tau,|C|-1} = \inf\{\mu_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^+\},$$

където $\mu_\tau(f) = 2\mu_f^2 - 1$. В частност, за всяка точка $x \in C$ имаме $t_{|C|-1}(x) \leq U_{\tau,|C|-1} = \inf\{\mu_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^+\}$.

Доказателство. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн. Нека x и y са две най-близки точки в C , т.е. $\langle x, y \rangle = s(C) = \cos 2\varphi$, където $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Да означим с $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ средата на геодезичната дъга, определена от точките x и y . Тогава имаме

$$\langle u, x \rangle = \langle u, y \rangle = \cos \varphi.$$

От равенството от Дефиниция 1.3.5 приложено за точката $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, дизайна C и произволен полинома $f(t) \in P_{\tau,s}^+$ получаваме:

$$2f(\mu_f) = f_0|C| = \sum_{z \in C} f(\langle u, z \rangle) \geq f(\langle u, x \rangle) + f(\langle u, y \rangle) = 2f(\cos \varphi),$$

откъдето следва неравенството $f(\cos \varphi) \leq f(\mu_f)$. Последното неравенство е изпълнено за всеки полином $f(t) \in P_{\tau,s}^+$.

Тъй като $\cos \varphi > \cos 2\varphi = t_{|C|-1}(x) \geq s$ (последното неравенство следва от (1.6.5) в Теорема 1.6.8) и $f(t)$ е растяща в $(s, +\infty)$, имаме $s < \cos \varphi \leq \mu_f$. Следователно,

$$t_{|C|-1}(x) = \cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 \leq 2\mu_f^2 - 1.$$

Вземайки инфимума на дясната страна на това неравенство, получаваме търсената граница. $\square$

В конкретни случаи границата $U_{\tau,|C|-1}$ може да бъде пресметната числено. По-долу разглеждаме случаите $\tau = 3$, $\tau = 4$ и $\tau = 5$.

3.1.1 Границата $U_{3,|C|-1}$

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 3-дизайн. Съгласно Теорема 3.1.2 да разгледаме полинома $f(t) = (t+1)(t-a)^2$ от трета степен с един двукратен корен $a \in [-1, s = \alpha_1]$, като търсим оптималната стойност на параметъра a . Очевидно $f(t) \in P_{\tau,s}^+$. За да намерим оптималната стойност на a , решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$2f(t) = f_0|C| \iff t^3 + (1-2a)t^2 + a(a-2)t + a^2 - \frac{(na^2 - 2a + 1)|C|}{2n} = 0$$

да е възможно най-малък.

Последното уравнение е еквивалентно на

$$t^3 - \frac{(a+1)^2 t}{3} + \frac{4n(1+a)^3 - 27|C|(na^2 - 2a + 1)}{54n} = 0.$$

С помощта на формулите на Кардано намираме, че съответното $\mu_f = \mu(a)$ е

$$\mu(a) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{2a-1}{3},$$

където

$$q = \frac{4n(1+a)^3 - 27|C|(na^2 - 2a + 1)}{54n}$$

и

$$\Delta = \frac{|C|(na^2 - 2a + 1)[27|C|(na^2 - 2a + 1) - 8n(a+1)^3]}{432n^2}.$$

Оптималната стойност a_0 на параметъра a избираме измежду реалните решения на уравнението $\frac{d}{da}\mu(a) = 0$ такава, че $a_0 \leq s$. Тогава след заместване на a_0 в $\mu(a)$ получаваме границата

$$s(C) \leq U_{3,|C|-1} = \mu_3(f) = 2\mu^2(a_0) - 1$$

и численото ѝ пресмятане при фиксирани n и $|C|$ не е проблем.

Оказва се, че близка до оптималната стойност на $U_{3,|C|-1}$ се получава, при $a = -\frac{1}{n(2n-3)}$, която е корен на уравнението $\frac{2n(1-s)}{1-sn} = 2n - 1$. Да отбележим, че лявата страна в последното уравнение е границата на Левенщайн $L_2(n, s)$. Тази граница за $s(C)$ означаваме с $U'_{3,|C|-1}$. И в този случай аналитичното представяне на границата $U'_{3,|C|-1}$ е сложно, но численото му пресмятане не е проблем.

В Таблица 3.1 са дадени някои стойности на $U_{3,|C|-1}$ и $U'_{3,|C|-1}$ за 3-дизайни при фиксирани размерност n и мощност $|C|$. Пресмятанията в тази част са извършени с Maple, числовите резултати са апроксимирани като горните граници са ”отрязани” и числата са записани до шестата цифра след десетичната запетая.

Асимптотично, т.е. при $n \rightarrow \infty$ и за $|C| = n(2 + \gamma)$, където $\gamma \geq 0$ е константа, имаме

$$U'_{3,|C|-1} \approx \frac{((A-1)^2 + 3)^2}{18A^2} - 1,$$

където

$$A = \sqrt[3]{54\gamma + 100 + 6\sqrt{3(2+\gamma)(27\gamma + 46)}}.$$

В Таблица 3.2 са показани стойностите на границата $U'_{3,|C|-1}$ за някои стойности на $\gamma \in [0.3227, 0.5]$.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $U_{3, C -1}$	Граница $U'_{3, C -1}$	Известна граница [13], стр.94
3	9	0.576535	0.580246	
5	13	0.401924	0.403937	0.436624
7	17	0.326933	0.331066	0.473873
8	19	0.303499	0.308024	0.516178
11	27	0.342616	0.345899	
12	29	0.325813	0.329178	
13	31	0.311577	0.314974	
14	33	0.299364	0.302755	
15	37	0.349657	0.352290	
16	39	0.336674	0.339329	
17	41	0.325201	0.327861	
18	43	0.314991	0.317641	
19	45	0.305846	0.308476	
19	47	0.353662	0.355843	
20	47	0.297607	0.300210	
20	49	0.343105	0.345292	

Таблица 3.1. Стойности на $U_{3,|C|-1}$ и $U'_{3,|C|-1}$ за всички отворени случаи за Проблем 1.1.6 в размерности $3 \leq n \leq 20$.

γ	$U'_{3, C -1}$	γ	$U'_{3, C -1}$
0.3227	≈ 0.288492	0.425	≈ 0.334683
0.35	≈ 0.300862	0.45	≈ 0.345904
0.375	≈ 0.312162	0.475	≈ 0.357100
0.4	≈ 0.323436	0.5	≈ 0.368270

Таблица 3.2. Стойности на $U'_{3,|C|-1}$ за някои стойности на $\gamma \in [0.3227, 0.5]$.

3.1.2 Границата $U_{4,|C|-1}$

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн. Аналогично на предходния параграф, съгласно Теорема 3.1.2 разглеждаме полинома $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ с два двукратни корена в интервала $[-1, s = \beta_2]$, като търсим оптималните стойности на параметрите a и b . Очевидно $f(t) \in P_{\tau,s}^+$, т.е. условията на Теорема 3.1.2 са изпълнени. За да намерим оптималните стойности на a и b , решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$2f(t) = f_0|C| \iff (t^2 + at + b)^2 = \frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{2n(n+2)}$$

да е възможно най-малък.

Съответното $\mu_f = \mu(a, b)$ (съгласно Теорема 3.1.2) е

$$\mu(a, b) = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b + 4 \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{2n(n+2)}}}.$$

Оптималните стойности на a и b са измежду реалните решения на системата

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} \mu(a, b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \mu(a, b) = 0 \end{cases},$$

която е еквивалентна на

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - 4b + 4 \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{2n(n+2)}}} = a \left(1 + \frac{|C|}{n \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{2n(n+2)}}} \right) \\ \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{2n(n+2)}} = \frac{|C|(nb+1)}{2n} \end{cases}.$$

Заместваме лявата страна на второто уравнение в първото и след преобразувания получаваме

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - 4b + \frac{2|C|(nb+1)}{n}} = \frac{a(nb+3)}{nb+1} \\ a^2 = \frac{|C|(nb+1)^2}{2n} - \frac{3}{n+2} - b(nb+2) \end{cases}.$$

Сега заместваме a^2 в първото уравнение и след алгебрични преобразувания получаваме, че оптималната стойност на b е

$$b_0 = \frac{6(n+1) - (n+2)|C| + 2\sqrt{(n-1)[(n+2)|C| - 3(n+3)]}}{n(n+2)(|C| - 4)},$$

(взет е коренът с $+$ тъй като параметрите a и b трябва да бъдат избрани така, че полиномът $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ да има два двукратни корена в интервала $[-1, s]$). Аналогично за оптималната стойност на параметъра a получаваме

$$a_0 = \frac{2}{(n+2)(|C| - 4)} \sqrt{\frac{(n-1)[(2n+1)|C| - 6(n+1) + (|C| - 2)\sqrt{A}]}{n}},$$

3.1. Горна граница за максималното скалярно произведение на сферични τ -дизайни 47

където $A = (n - 1)[(n + 2)|C| - 3(n + 3)]$.

Тогава след заместване на a_0 и b_0 в $\mu(a, b)$ получаваме аналитичен вид на границата $U_{4,|C|-1} = \mu_4(f)$.

Теорема 3.1.3. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, то за всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_{|C|-1}(x) \leq U_{4,|C|-1} = \frac{2(3 + \sqrt{(n - 1)[(n + 2)|C| - 3(n + 3)])}{n(n + 2)} - 1.$$

В Таблица 3.3 са дадени някои стойности на $U_{4,|C|-1}$ за фиксирани размерност n и мощност $|C|$.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $U_{4, C -1} \approx$	Известна граница [13], стр.95
3	10	$\frac{7}{15}$	0.554044
3	11	$\frac{2\sqrt{74}-9}{15} \approx 0.546976$	0.652241
4	15	$\frac{\sqrt{23}-3}{4} \approx 0.448957$	0.602594
4	16	$\frac{1}{2}$	0.659847
5	21	$\frac{4\sqrt{123}-29}{35} \approx 0.438918$	0.663330
5	22	$\frac{4\sqrt{130}-29}{35} \approx 0.474486$	0.701357
6	28	$\frac{\sqrt{985}-21}{24} \approx 0.432696$	0.724281
6	29	$\frac{5\sqrt{41}-21}{24} \approx 0.458984$	0.751888
7	36	$\frac{3}{7}$	0.782804
7	37	$\frac{2\sqrt{202}-19}{21} \approx 0.448825$	0.804097
8	45	$\frac{\sqrt{2919}-37}{40} \approx 0.425694$	0.838448
8	46	$\frac{7\sqrt{61}-37}{40} \approx 0.441793$	0.855584
9	55	$\frac{4\sqrt{1138}-63}{99} \approx 0.423606$	0.891343
9	56	$\frac{8\sqrt{290}-63}{99} \approx 0.436718$	0.905565
10	66	$\frac{\sqrt{753}-19}{20} \approx 0.422042$	0.941757
10	67	$\frac{3\sqrt{85}-19}{20} \approx 0.432931$	0.953836

Таблица 3.3. Стойности на $U_{4,|C|-1}$ за размерности $3 \leq n \leq 10$ и първите две (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ във всяка размерност.

Асимптотично (т.е. при $n \rightarrow \infty$ и за $|C| = n(n + 3)/2 + \alpha(n)$, където $\alpha(n)$ е линейна функция на n (възможно е $\alpha(n) = \text{const}$)) за горната граница $U_{4,|C|-1}$ имаме

$$U_{4,|C|-1} \approx \sqrt{2} - 1.$$

3.1.3 Границата $U_{5,|C|-1}$

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 5-дизайн. Съгласно Теорема 3.1.2 разглеждаме полинома $f(t) = (t+1)(t-a)^2(t-b)^2$ с два двукратни корена a и $b \in [-1, s]$, като търсим оптималните стойности на параметрите a и b . Очевидно полинома $f(t) \in P_{\tau,s}^+$, т.е. условията на Теорема 3.1.2 са изпълнени. С помощта на Maple намираме оптималните стойности на a и b такива, че най-големият корен на уравнението $2f(t) = f_0|C| \iff$

$$\begin{aligned} t^5 &+ (1-2a-2b)t^4 + (a(a-2) - 2(1-2a)b + b^2)t^3 + \\ &+ (a^2 - 2a(a-2)b + (1-2a)b^2)t^2 - 2ab(a - (a-2)b)t + a^2b^2 - \\ &- \frac{|C|[3(1-2a-2b) + (a^2 - 2a(a-2)b + (1-2a)b^2)(n+2) + a^2b^2n(n+2)]}{2n(n+2)} = 0 \end{aligned}$$

да е възможно най-малък.

Аналитичният вид на получената граница $U_{5,|C|-1}$ е сложен, но численото ѝ пресмятане не е проблем.

Оказва се обаче, че близка до оптималната стойност на $U_{5,|C|-1}$ се получава, когато положим $a = -\frac{1+\sqrt{n^5-5n^3+5n+3}}{n^3+n^2-3n-2}$ и $b = \frac{-1+\sqrt{n^5-5n^3+5n+3}}{n^3+n^2-3n-2}$, които са корени на уравнението $L_4(n, s) = \frac{2n(1-s)(1+(n+2)s)}{1+2s-(n+2)s^2} = n^2 + n - 1$. Тази граница означаваме с $U'_{5,|C|-1}$. И в този случай аналитичното представяне на границата $U'_{5,|C|-1}$ е сложно, но численото му пресмятане не е проблем.

В Таблица 3.4 са дадени някои стойности на $U_{5,|C|-1}$ и $U'_{5,|C|-1}$ за фиксирани размерност n и мощност $|C|$.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $U_{5, C -1}$	Граница $U'_{5, C -1}$	Известна граница [13], стр.82
3	14	0.631946	0.638191	
3	15	0.676901	0.680527	
4	22	0.588701	0.596885	
4	23	0.616871	0.623429	
5	32	0.563266	0.571169	0.870495
5	34	0.601467	0.607596	
6	44	0.546573	0.553697	0.764542
6	46	0.574464	0.580503	
7	58	0.534799	0.541125	0.695576
7	60	0.556051	0.561677	0.885451
8	74	0.526059	0.531680	0.644346
8	76	0.542788	0.547936	0.787011
9	92	0.519321	0.524344	0.603836
9	94	0.532830	0.537520	0.725612
10	112	0.513970	0.518490	0.570551
10	114	0.525107	0.529386	0.678937

Таблица 3.4. Стойности на $U_{5,|C|-1}$ и $U'_{5,|C|-1}$ за размерности $3 \leq n \leq 10$ и първите две (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ във всяка размерност.

3.2 Долна граница за минималното скалярно произведение на сферични τ -дизайни

В тази част получаваме долна граница за минималното скалярно произведение на сферичен τ -дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Такива са със сигурност дизайните с четна сила τ и мощност, която не надминава границата на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за $(\tau + 1)$ -дизайни (например, 4-дизайните с мощност $\frac{n(n+3)}{2} < |C| < n(n+1)$). Долни граници за минималното скалярно произведение на сферичен τ -дизайн са получавани от Бумова в [13], но с различен от използвания по-долу подход.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Ще считаме, че n , $|C|$ и τ са фиксирани.

Дефиниция 3.2.1. *Да означим с*

$$P_{\tau,s}^{+,even} = \{f(t) \in P_{\tau,s}^+ : f(t) \text{ е четна функция}\}.$$

Нека θ_f е най-големият корен на уравнението $2f(t) = f_0|C|$, където $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$.

За всяка точка $x \in C$ и всеки полином $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$ имаме $f(\langle u, x \rangle) \geq 0$ за произволна точка $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Теорема 3.2.2. *Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Тогава*

$$\ell(C) \geq L_{\tau,1} = \sup\{\theta_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}\},$$

където $\theta_\tau(f) = 1 - 2\theta_f^2$. В частност, за всяка точка $x \in C$ имаме $t_1(x) \geq L_{\tau,1} = \sup\{\theta_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}\}$.

Доказателство. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ -дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Нека x и y са две най-отдалечени точки в дизайна C , т.е. $\langle x, y \rangle = \ell(C) = \cos(\pi - 2\varphi) = -\cos 2\varphi$, където $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. В равнината, определена от векторите x и y , ако $-x$ е противоположната точка на x , имаме $\langle -x, y \rangle = \cos 2\varphi$.

Да означим с $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ средата на геодезичната дъга, определена от точките $-x$ и y . Тогава имаме

$$t_1(u) = \langle u, x \rangle = \cos(\varphi + \pi - 2\varphi) = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

и (без ограничение на общността)

$$t_i(u) = \langle u, y \rangle = \cos \varphi, \quad \text{за някое } i \in \{1, 2, \dots, |C|\}.$$

От равенството от Дефиниция 1.3.5 приложено за точката $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, дизайна C и полинома $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$ получаваме

$$\begin{aligned}
2f(\theta_f) = f_0|C| &= \sum_{z \in C} f(\langle u, z \rangle) \geq f(\langle u, x \rangle) + f(\langle u, y \rangle) \\
&= f(\cos \varphi) + f(-\cos \varphi) = 2f(\cos \varphi),
\end{aligned}$$

тъй като $f(t)$ е четна функция. Така получаваме неравенството $f(\cos \varphi) \leq f(\theta_f)$, което е в сила за всеки полином $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$.

Ако $s \leq \cos \varphi$, имаме $\langle u, y \rangle = \cos \varphi \leq \theta_f$ тъй като $f(t)$ е растяща в $[s, 1)$. В другия случай $\cos \varphi \leq s$, но от факта, че $s \leq \theta_f$ също получаваме, че $\cos \varphi \leq \theta_f$.

Следователно $\cos 2\varphi = 2\cos \varphi^2 - 1 \leq 2\theta_f^2 - 1$ и

$$t_1(x) = \langle x, y \rangle = -\cos 2\varphi \geq 1 - 2\theta_f^2.$$

Вземайки супремума на дясната страна (в последното неравенство), получаваме исканата граница. $\square$

В конкретни случаи границата $L_{\tau,1}$ може да бъде пресметната. По-долу разглеждаме случаите $\tau = 4$ и $\tau = 6$.

3.2.1 Границата $L_{4,1}$

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн с мощност $\frac{n(n+3)}{2} < |C| < n(n+1)$. Както отбелязахме, тези дизайни не притежават двойка противоположни точки. Съгласно Теорема 3.2.2 разглеждаме полинома $f(t) = (t^2 - a)^2$, като търсим оптималната стойност на параметъра $a > 0$ така, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $[s = \beta_2, 1)$. Очевидно $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$, т.е. условията на Теорема 3.2.2 са изпълнени. За да намерим оптималната стойност на a , решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$2f(t) = f_0|C| \iff (t^2 - a)^2 = \frac{|C|[3 - 2a(n+2) + a^2n(n+2)]}{2n(n+2)}$$

да е възможно най-малък.

Съответното $\theta_f = \theta(a)$ (съгласно Теорема 3.2.2) е

$$\theta(a) = \sqrt{a + \sqrt{\frac{|C|[3 - 2a(n+2) + a^2n(n+2)]}{2n(n+2)}}}.$$

Оптималната стойност a_0 на a избираме измежду реалните положителни решения на уравнението $\frac{d}{da}\theta(a) = 0$ така, че $\sqrt{a_0} < s$. След алгебрични преобразувания получаваме

$$a_0 = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \sqrt{\frac{n-1}{(n+2)(|C|-2)}}.$$

откъдето

$$\theta(a_0) = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{(n-1)(|C|-2)}{n+2}} \right)}.$$

Тогава от $\theta_4(f) = 1 - 2\theta(a_0)^2$ получаваме аналитичен вид на търсената граница $L_{4,1} = \theta_4(f)$.

Теорема 3.2.3. *Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Тогава за всяка точка $x \in C$ имаме*

$$t_1(x) \geq L_{4,1} = 1 - \frac{2}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{(n-1)(|C|-2)}{n+2}} \right).$$

В Таблица 3.5 са дадени някои стойности на $L_{4,1}$ за фиксирани размерност n и мощност $|C|$. Пресмятанията в тази част са извършени с Maple, като числовите резултати са апроксимирани и долните граници са закръглени до шестата цифра след десетичната запетая.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $L_{4,1} \approx$
3	10	$\frac{5-8\sqrt{5}}{15} \approx -0.859236$
3	11	$\frac{5-6\sqrt{10}}{15} \approx -0.931578$
4	15	$\frac{2-\sqrt{26}}{4} \approx -0.774755$
4	16	$\frac{1-\sqrt{7}}{2} \approx -0.822876$
5	21	$\frac{21-4\sqrt{133}}{35} \approx -0.718007$
5	22	$\frac{21-8\sqrt{35}}{35} \approx -0.752247$
6	28	$\frac{4-\sqrt{65}}{6} \approx -0.677043$
6	29	$\frac{4-3\sqrt{30}}{12} \approx -0.702640$
7	36	$\frac{15-4\sqrt{51}}{21} \approx -0.645986$
7	37	$\frac{15-2\sqrt{210}}{21} \approx -0.665845$
8	45	$\frac{30-\sqrt{3010}}{40} \approx -0.621587$
8	46	$\frac{15-\sqrt{770}}{20} \approx -0.637444$
9	55	$\frac{77-4\sqrt{1166}}{99} \approx -0.601889$
9	56	$\frac{77-24\sqrt{33}}{99} \approx -0.614843$
10	66	$\frac{4-4\sqrt{3}}{5} \approx -0.585641$
10	67	$\frac{8-\sqrt{195}}{10} \approx -0.596424$

Таблица 3.5. Стойности на $L_{4,1}$ за размерности $3 \leq n \leq 10$ и първите две (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ във всяка размерност.

Асимптотично (т.е. при $n \rightarrow \infty$ и за $|C| = n(n+3)/2 + \alpha(n)$, където $\alpha(n)$ е линейна функция на n) имаме

$$L_{4,1} \approx 1 - \sqrt{2}.$$

Да отбележим, че в разглеждания асимптотичен процес имаме

$$L_{4,1} \approx -U_{4,|C|-1}.$$

3.2.2 Границата $L_{6,1}$

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 6-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Съгласно Теорема 3.2.2 разглеждаме полинома $f(t) = t^2(t^2 - a)^2$, като търсим оптималната стойност на параметъра $a > 0$ така, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $[s, \infty)$. Очевидно $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$, т.е. условията на Теорема 3.2.2 са изпълнени. За да намерим оптималната стойност на a , решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$2f(t) = f_0|C| \iff t^2(t^2 - a)^2 = \frac{|C|[15 - 6a(n+4) + a^2(n+2)(n+4)]}{2n(n+2)(n+4)}$$

да е възможно най-малък.

Съответното $\theta_f = \theta(a)$ (съгласно Теорема 3.2.2) е корен на уравнението

$$t^3 - at - \sqrt{\frac{|C|[15 - 6a(n+4) + a^2(n+2)(n+4)]}{2n(n+2)(n+4)}} = 0,$$

т.е.

$$\theta(a) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}},$$

където

$$q = -\sqrt{\frac{|C|[15 - 6a(n+4) + a^2(n+2)(n+4)]}{2n(n+2)(n+4)}}$$

и

$$\Delta = \frac{|C|[15 - 6a(n+4) + a^2(n+2)(n+4)]}{8n(n+2)(n+4)} - \frac{a^3}{27}.$$

Оптималната стойност a_0 на a избираме измежду реалните положителни решения на уравнението $\frac{d}{da}\theta(a) = 0$ така, че $\sqrt{a_0} < s$. След заместване на a_0 в $\theta(a)$ и от $\theta_6(f) = 1 - 2\theta(a_0)^2$ получаваме границата

$$L_{6,1} = \theta_6(f) = 1 - 2\theta(a_0)^2.$$

Аналитичният вид на получената граница $L_{6,1}$ е сложен, но численото му пресмятане не е проблем. В Таблица 3.6 са дадени някои стойности на $L_{6,1}$ за фиксирани размерност n и мощност $|C|$.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $L_{6,1}$	Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $L_{6,1}$
3	17	-0.929011	6	78	-0.822393
3	18	-0.953704	6	79	-0.828323
3	19	-0.977331	6	80	-0.834201
4	32	-0.896867	7	113	-0.801092
4	33	-0.910731	7	114	-0.805251
4	34	-0.924287	7	115	-0.809384
5	51	-0.848773	8	157	-0.783450
5	52	-0.857655	8	158	-0.786480
5	53	-0.866415	8	159	-0.789498

Таблица 3.6. Стойности на $L_{6,1}$ за размерности $3 \leq n \leq 8$ и първите три (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ във всяка размерност.

3.3 Долна граница за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферични τ -дизайни с нечетна мощност

В тази част за точка $x \in C$ получаваме долна граница $L_{2k-1,2}$ за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферичен $(2k-1)$ -дизайн C с нечетна мощност $|C|$, където x е специална точка както в Лема 1.6.11. Долни граници за това скаларно произведение с друг подход са получавани от Бумова в [13].

Теорема 3.3.1. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност и x, y, z са съществуващата по Лема 1.6.11 специална тройка различни точки от дизайна C , за които

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0, \\ \langle x, z \rangle &= t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0.\end{aligned}$$

Тогава

$$t_2(x) \geq L_{2k-1,2}(x) = -\sqrt{\frac{1 + U_{2k-1,|C|-1}}{2}}.$$

Доказателство. Означаваме с $\varphi = \angle(O(-x), Oy)$ и $\psi = \angle(O(-x), Oz)$ острите ъгли между съответните радиус-вектори. Тогава

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \langle -x, y \rangle = -t_1(x) = -t_1(y) \geq -\alpha_0 \geq 0, \\ \cos \psi &= \langle -x, z \rangle = -t_2(x) = -t_1(z) \geq -\alpha_0 \geq 0.\end{aligned}$$

Имаме $\cos \varphi = -t_1(x) \geq -t_2(x) = \cos \psi$, което е еквивалентно на $\varphi \leq \psi$ и следователно $\varphi + \psi \leq 2\psi$. Тогава последователно получаваме

$$2(\cos \psi)^2 - 1 = \cos 2\psi \leq \cos(\varphi + \psi) \leq \langle y, z \rangle = t_i(z) \leq U_{2k-1,|C|-1}.$$

3.4. Горна граница за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферични $(2k-1)$ -дизайни 54

Така за $t_2(x)$ имаме $2(t_2(x))^2 - 1 = 2(\cos \psi)^2 - 1 \leq U_{2k-1,|C|-1}$, откъдето получаваме търсената граница. $\square$

В Таблица 3.7 по-долу са дадени някои стойности на $L_{2k-1,2}(x)$ за фиксирани сила τ , размерност n и мощност $|C|$.

Сила τ	Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $L_{2k-1,2}(x)$
3	3	9	-0.887844
3	5	13	-0.837234
3	7	17	-0.814535
5	3	14	-0.903312
5	4	22	-0.891263
5	5	32	-0.884100

Таблица 3.7. Стойности на $L_{2k-1,2}(x)$ за $\tau = 3$ и 5 , размерности n и първите (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ в съответната размерност.

3.4 Горна граница за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферични $(2k-1)$ -дизайни

В тази част получаваме горна граница $U_{2k-1,2}$ за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферичен $(2k-1)$ -дизайн C за всяка точка $x \in C$. Долни граници за това скаларно произведение са получавани от Бумова в [13], но не ни е известно да са получавани горни граници за $t_2(x)$.

Теорема 3.4.1. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$ -дизайн, $k \geq 3$ и $j = 2k-4$. За всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_2(x) \leq U_{2k-1,2} = -\sqrt{\frac{(j+1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j)}{(n+j)[(j-1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j-2)]}}.$$

Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн, то $t_2(x) \leq U_{3,2} = -\sqrt{\frac{|C|-2n}{n(|C|-2)}}$, за всяка точка $x \in C$.

Доказателство. Нека $f(t) = (t - t_2(x))(t - a)^2 t^{2k-4}$ е такъв полином, че $a \in (t_2(x), 1)$ (всъщност числовите пресмятания показват, че оптималната стойност на параметъра a е в интервала $(0, 1)$). Тогава $f(t_i(x)) \geq 0$, за $i = 2, 3, \dots, |C|-1$ и $f(t_1(x)) \geq f(-1)$, тъй като $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, t_2(x))$. Прилагаме равенството от Дефиниция 1.3.5 с полинома $f(t)$, дизайна C и точка $x \in C$. Получаваме

$$f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(x)) \geq f(t_1(x)) \geq f(-1),$$

3.4. Горна граница за скалярното произведение $t_2(x)$ на сферични $(2k-1)$ -дизайни 55

От $f_0|C| - f(1) - f(-1) \geq 0$ получаваме линейно неравенство относно t_2 , което при отрицателен коефициент пред t_2 е еквивалентно на

$$t_2(x) \leq -\frac{2a[(j+1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j)]}{(j-1)!!|C|[j+1+(n+j)a^2] - 2n(n+2) \cdots (n+j)(1+a^2)}.$$

Да означим дясната страна на последното неравенство с $\omega(a)$. Оптималната стойност на a е

$$a_0 = \sqrt{\frac{(j+1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j)}{(n+j)[(j-1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j-2)]}}.$$

Заместваме a_0 в $\omega(a)$ и получаваме търсената граница

$$U_{2k-1,2} = -\sqrt{\frac{(j+1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j)}{(n+j)[(j-1)!!|C| - 2n(n+2) \cdots (n+j-2)]}}$$

(да отбележим, че оптималната стойност $a_0 > 0$, за нея коефициента пред t_2 е отрицателен и $U_{2k-1,2} = -a_0$).

Лесно се вижда, че аналогично доказателство е в сила и за $\tau = 3$. □

Границата $t_2(x) \leq U_{3,2}$ се достига за някои класове от 3-дизайни. Например за биортогоналните кодове имаме $t_2(x) = U_{3,2} = 0$. Границата се достига и за кодовете с $2(n+1)$ точки $(-C_1) \cup C_1$, където C_1 е правилен n -мерен симплекс ($t_2(x) = U_{3,2} = -\frac{1}{n}$).

При $\tau = 5$, границата е $t_2(x) \leq U_{5,2} = -\sqrt{\frac{3|C|-2n(n+2)}{(n+2)(|C|-2n)}}$, а за $\tau = 7$, имаме $t_2(x) \leq U_{7,2} = -\sqrt{\frac{15|C|-2n(n+2)(n+4)}{(n+4)(3|C|-2n(n+2))}}$.

В Таблица 3.8 са дадени някои стойности на $U_{2k-1,2}$ за фиксирани сила τ , размерност n и мощност $|C|$.

Сила τ	Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $U_{2k-1,2} \approx$
3	3	9	$-\frac{\sqrt{7}}{7} \approx -0.377964$
3	5	13	$-\frac{\sqrt{165}}{55} \approx -0.233549$
3	7	17	$-\frac{\sqrt{35}}{35} \approx -0.169030$
5	3	14	$-\frac{\sqrt{30}}{10} \approx -0.547722$
5	4	22	$-\frac{\sqrt{42}}{14} \approx -0.462910$
5	5	32	$-\frac{\sqrt{1001}}{77} \approx -0.410890$
7	5	72	$-\frac{5\sqrt{73}}{73} \approx -0.585205$
7	6	114	$-\frac{5\sqrt{82}}{82} \approx -0.552157$
7	7	170	$-\frac{\sqrt{2134}}{88} \approx -0.524945$

Таблица 3.8. Стойности на $U_{2k-1,2}$ за $\tau = 3, 5, 7$, размерности n и първите (съгласно Проблем 1.1.6) стойности на $|C|$ в съответната размерност.

За сферични $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност границата $t_2(z) \leq U_{2k-1,2}(z)$ може да бъде подобрена за точката z от специалната тройка точки x, y и z (виж Лема 1.6.11). В следващия параграф ще намерим такива подобрения и ще ги използваме за получаване на необходими условия за съществуване на изследваните дизайни.

3.5 Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност. Ще считаме, че $n, |C|$ и $\tau = 2k-1$ са фиксирани. От Лема 1.6.5 определяме съответните корени на полинома на Левенщайн $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = s$ и теглата $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k = 1/L_{2k-1}(n, s) = 1/|C|$.

Оттук нататък ще предполагаме, че са изпълнени и условията

$$\rho_0|C| < 3 \quad \text{и} \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1. \quad (3.5.1)$$

Да отбележим, че от $\alpha_0 < 0$ и $\alpha_{k-1} \geq 0$ имаме $-1 \leq \alpha_0 \leq -1/\sqrt{2}$, т.е. $\text{Arccos } \alpha_0 \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ и $\text{Arccos } (-\alpha_0) \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Както в Глава 1 да означим $g(t) = (t-\alpha_1)^2(t-\alpha_2)^2 \dots (t-\alpha_{k-1})^2 = \sum_{i=0}^{2k-2} g_i P_i^{(n)}(t)$.

От Теорема 1.6.8 за всяка точка $x \in C$ знаем, че $t_1(x) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1}$ и $L_{2k-1,|C|-1} = \alpha_{k-1} \leq t_{|C|-1}(x)$, а от Теорема 1.6.10 имаме $\rho_0|C| \geq 2$. Съгласно (3.5.1) и Лема 1.6.11 съществуват различни точки x, y и z от дизайна C такива, че

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1}, \\ \langle x, z \rangle &= t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0 = U_{2k-1,1} = U_{2k-1,2}(x) \quad \text{и} \\ \langle y, z \rangle &= t_{|C|-1}(z) \geq L_{2k-1,|C|-1}(z) = \max\{\alpha_{k-1}, 2\alpha_0^2 - 1\} = 2\alpha_0^2 - 1. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Към специалната тройка $\{x, y, z\} \subset C$ добавяме точката $u \in C$, за която $\langle z, u \rangle = t_2(z)$. Оттук нататък винаги ще считаме, че $\{x, y, z, u\}$ са специална четворка точки от C , получена по този начин.

Дефиниция 3.5.1. Специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C се нарича "добра", ако $t_2(z) \leq \alpha_0$.

Нашият метод се базира на комбинирането на полиномиални техники с някои геометрични аргументи – изследване на специални четворки точки $\{x, y, z, u\}$ от C , с цел получаване на ограничения върху структурата на разглежданите дизайни. Както отбелязахме в края на Глава 1, стремим се да получаваме нови горни граници за $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$. Използването на тези граници позволява да се стартира процес, който за фиксирани n , нечетно $|C|$ и $\tau = 2k-1$ води до получаване на нови необходими условия за съществуване на такива дизайни.

3.5.1 Общи граници за специални тройки $\{x, y, z\} \subset C$

Следващите няколко лема дават общи резултати, които са валидни и за ”добри” специални четворки.

Лема 3.5.2. Ако $\rho_0|C| < 3$, то за всяка точка $x \in C$ имаме $\alpha_0 < t_3(x)$.

Доказателство. Да допуснем, че съществува точка $x \in C$ такава, че

$$t_1(x) \leq t_2(x) \leq t_3(x) \leq \alpha_0.$$

От Теорема 1.6.1 и $g(\alpha_i) = 0$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$ следва, че $\rho_0|C|g(\alpha_0) = g_0|C| - g(1)$. Прилагаме (1.6.3) с полинома $g(t)$, точката $x \in C$ и дизайна C и последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0 g(\alpha_0)|C| &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(x)) \\ &\geq g(t_1(x)) + g(t_2(x)) + g(t_3(x)) \\ &\geq 3g(t_3(x)) \geq 3g(\alpha_0) \end{aligned}$$

(тук използваме, че $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$). Тъй като $g(\alpha_0) > 0$, то горното неравенство е еквивалентно на $\rho_0|C| \geq 3$ и е в противоречие с условието. $\square$

Лема 3.5.3. Имаме $t_1(z) \geq L_{\tau,1}(z)$, където $L_{\tau,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$2g(t) = \rho_0|C|g(\alpha_0).$$

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $g(t)$, точката $x \in C$ и дизайна C . Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|g(\alpha_0) &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(x)) \\ &\geq g(t_1(x)) + g(t_2(x)) \\ &\geq 2g(t_2(x)) = 2g(t_1(z)) \end{aligned}$$

(използваме равенството $t_2(x) = t_1(z)$). Сега твърдението следва от факта, че $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$. $\square$

Използвайки долните граници за $t_1(z)$ и $t_{|C|-1}(z)$ в следващата лема получаваме горна граница за $t_2(z)$.

Лема 3.5.4. Ако $\rho_0|C| > \frac{2g(2\alpha_0^2 - 1)}{g(\alpha_0)}$, то

$$t_2(z) \leq U_{\tau,2}(z) = \frac{(L_{\tau,1}(z) - 2\alpha_0)\rho_0|C|g(\alpha_0) + 2(2\alpha_0^2 - 1)(z)g(2\alpha_0^2 - 1)}{2g(2\alpha_0^2 - 1) - \rho_0|C|g(\alpha_0)}.$$

Доказателство. Използваме (1.6.3) с полинома $f(t) = (t - t_2(z))g(t)$, точката $z \in C$ и дизайна C . Тъй като $f(t)$ е растяща функция в интервалите $(-\infty, t_2(z))$ и $(\alpha_{k-1}, +\infty)$, имаме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|f(\alpha_0) &= f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \geq f(L_{\tau,1}(z)) + f(L_{\tau,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned} &t_2(z)[g(L_{\tau,1}(z)) - \rho_0|C|g(\alpha_0) + g(L_{\tau,|C|-1}(z))] \\ &\geq L_{\tau,1}(z)g(L_{\tau,1}(z)) + L_{\tau,|C|-1}(z)g(L_{\tau,|C|-1}(z)) - \rho_0|C|\alpha_0g(\alpha_0). \end{aligned}$$

От Лема 3.5.3 заместваем $g(L_{\tau,1}(z)) = \frac{\rho_0|C|g(\alpha_0)}{2}$. След някои елементарни преобразувания и използване на условието $\rho_0|C| > \frac{2g(2\alpha_0^2 - 1)}{g(\alpha_0)}$ получаваме търсената граница. $\square$

Възможно е да подобряваме горната граница от Лема 3.5.4, като вместо $f(t) = (t - t_2(z))g(t)$ разглеждаме полином $(t - t_2(z))(t - a_1)^2(t - a_2)^2 \dots (t - a_{k-1})^2$ и избираме параметрите $a_i \in [\alpha_0, \alpha_{k-1}]$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$, оптимални за подхода. Такива подобрения ще бъдат направени в Глава 4 при $\tau = 3, 5$ и 7 .

Лема 3.5.5. Ако за $x, y_1, y_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ имаме $\langle x, y_1 \rangle = a < 0$ и $\langle x, y_2 \rangle = b < 0$, то $\langle y_1, y_2 \rangle \geq ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}$.

Доказателство. Да означим с φ и ψ острите ъгли, за които $\cos \varphi = -a$ и $\cos \psi = -b$. Тогава ъгълът между радиус-векторите на точките y_1 и y_2 е не повече от $\varphi + \psi$ и имаме

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \cos \angle(Oy_1, Oy_2) \geq \cos(\varphi + \psi) = ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}. \quad \square$$

Да отбележим, че границата $t_{|C|-1}(z) \geq L_{2k-1,|C|-1}(z) = 2\alpha_0^2 - 1$ от (3.5.2) следва и от Лема 3.5.5 при $a = b = \alpha_0$. Нещо повече, при намерени (подходящи) отрицателни горни граници $U_{2k-1,i}(z)$ за $t_i(z)$, $i = 1, 2$, за сферичен $(2k-1)$ -дизайн C с нечетна мощност можем да получим нова долна граница за $t_{|C|-1}(x)$.

Лема 3.5.6. Нека C е сферичен $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C|$. Имаме

$$t_{|C|-1}(x) \geq L_{2k-1,|C|-1}(x) = U_{2k-1,1}(z)U_{2k-1,2}(z) - \sqrt{(1 - U_{2k-1,1}^2(z))(1 - U_{2k-1,2}^2(z))},$$

където $U_{2k-1,i}(z)$ са (подходящи) отрицателни горни граници за $t_i(z)$, $i = 1, 2$.

Доказателство. Следва от Лема 3.5.5 за $a = U_{2k-1,1}(z)$, $b = U_{2k-1,2}(z)$ и точките x, z, u от C като x, y_1, y_2 съответно. $\square$

Лема 3.5.7. Имаме $t_3(z) \geq L_{2k-1,3}(z) = \min\{\theta_z, \alpha_1\}$, където θ_z е най-малкият корен на уравнението

$$2g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(2\alpha_0^2 - 1).$$

Доказателство. Ако $\min\{\theta_z, \alpha_1\} = \alpha_1$, лемата е доказана. Затова разглеждаме случая, когато е изпълнено неравенството $t_3(z) < \alpha_1$. Използваме (1.6.3) с $g(t)$, точката $z \in C$ и дизайна C . За полинома $g(t)$ имаме $g(t_1(z)) \geq g(U_{2k-1,1}(z)) = g(\alpha_0)$ и $g(t_{|C|-1}(z)) \geq g(L_{2k-1,|C|-1}(z)) = g(2\alpha_0^2 - 1)$, тъй като $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$ и растяща в интервала $(\alpha_{k-1}, +\infty)$. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|g(\alpha_0) &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(z)) \\ &\geq g(t_1(z)) + g(t_2(z)) + g(t_3(z)) + g(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq g(\alpha_0) + 2g(t_3(z)) + g(2\alpha_0^2 - 1). \end{aligned}$$

Сега твърдението следва от повторното използване на факта, че $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$. $\square$

От (3.5.1) и Лема 3.5.7 имаме

$$\begin{aligned} 2g(L_{2k-1,3}(z)) &= \rho_0|C|g(\alpha_0) - g(\alpha_0) - g(2\alpha_0^2 - 1) \\ &< 3g(\alpha_0) - g(\alpha_0) - g(2\alpha_0^2 - 1) < 2g(\alpha_0). \end{aligned}$$

Но $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$ и следователно $\alpha_0 < L_{2k-1,3}(z)$, т.е. в Лема 3.5.7 подобряваме общата долна граница за $t_3(z)$ от Лема 3.5.2.

Оттук нататък ще разглеждаме специалните четворки $\{x, y, z, u\} \subset C$, получени по описания в началото на §3.5 начин. Нашият подход разграничава следните две възможности:

Случай 1. Съществува специална четворка, която не е ”добра”, т.е. $t_2(z) > \alpha_0$.

Случай 2. Всички специални четворки са ”добри”, т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки.

3.5.2 Съществува специална четворка, която не е ”добра”

В тази част разглеждаме сферични $(2k-1)$ -дизайни C с нечетна мощност в Случай 1, т.е. в C съществува поне една специална четворка, за която $t_2(z) > \alpha_0$. С помощта на границите $t_2(z) > \alpha_0$ и $L_{2k-1,3}(z)$ (виж Лема 3.5.7) можем да получим по-добра горна граница за $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$.

Лема 3.5.8. *Имаме $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{2k-1,3}(z))g(t)$ и $U_{2k-1,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{2k-1,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $f(t)$, точката $z \in C$ и дизайна C . Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|f(\alpha_0) &= f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_2(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(\alpha_0) + f(L_{2k-1,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 60

Сега твърдението следва от факта, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, L_{2k-1,3}(z))$.
□

От Теорема 1.6.10, (3.5.1), Лема 3.5.8 и факта, че $f(\alpha_0) < 0$ имаме

$$\begin{aligned} f(U_{2k-1,1}(z)) &= (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) \\ &< (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) \leq f(\alpha_0), \end{aligned}$$

като $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, L_{2k-1,3}(z))$. Следователно $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$, т.е. в Лема 3.5.8 получаваме (търсената от нас) нова горна граница за $t_1(z)$.

Нещо повече, от получената в Лема 3.5.8 граница $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$ имаме $t_2(x) = t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) = U_{2k-1,2}(x)$. По-нататък често ще използваме горните граници за $t_2(x)$ получавани чрез $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) = U_{2k-1,2}(x)$.

С помощта на границите $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$ (Лема 3.5.8) и $t_2(z) \leq U_{2k-1,2}(z)$ (Лема 3.5.4) прилагаме Лема 3.5.6 и получаваме границата за $t_{|C|-1}(x) \geq L_{2k-1,|C|-1}(x)$. Ограниченията върху скаларните произведения от $I(x)$ ни дават възможност да получим необходимо условие за съществуване на $(2k-1)$ -дизайни C с нечетна мощност, за които е налице Случай 1. За краткост, проверката в точката $x \in C$ за съществуване на разглежданите дизайни ще означаваме като $C_x(h)$.

Лема 3.5.9. (Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществува полином $h(t) = (t - a_1)^2(t - a_2)^2 \dots (t - a_{k-1})^2$, където $a_i \in [\alpha_0, \alpha_{k-1}]$, за $i = 1, 2, \dots, k-1$, такъв, че е изпълнено неравенството

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{2k-1,2}(x)) - h(L_{2k-1,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват $(2k-1)$ -дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува специална четворка, която не е "добра".

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. съществува $(2k-1)$ -дизайн C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за който $t_2(z) > \alpha_0$ за някоя специална четворка $\{x, y, z, u\}$ от C . Прилагаме (1.6.3) с полинома $h(t)$, точката $x \in C$ и дизайна C . Като използваме получените граници за скаларните произведения от $I(x)$ и факта, че функцията $h(t)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, \alpha_0)$ и растяща в интервала $(\alpha_{k-1}, +\infty)$, последователно получаваме

$$\begin{aligned} h_0|C| - h(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} h(t_i(x)) \\ &\geq h(t_1(x)) + h(t_2(x)) + h(t_{|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(t_2(x)) + h(t_{|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(U_{2k-1,2}(x)) + h(L_{2k-1,|C|-1}(x)), \end{aligned}$$

което противоречи на неравенството от условието на лемата. □

След оптимизация на параметрите a_i за $i = 1, 2, \dots, k-1$ е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тъй като $t_1(x) \leq t_2(x) = t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$ можем да

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 61

приложим Лема 3.5.5 за $a = b = U_{2k-1,1}(z)$ и да получим по-добра долна граница $t_{|C|-1}(z) \geq L_{2k-1,|C|-1}(z) = 2U_{2k-1,1}^2(z) - 1 > 2\alpha_0^2 - 1$. Тогава продължаваме с рекурсивна процедура, в която замества новата граница $L_{2k-1,|C|-1}(z)$ в Лема 3.5.8 и получаваме по-добра горна граница $t_1(x) \leq U_{2k-1,1}(z)$, а от там (като използваме и границата $t_2(z) \leq U_{2k-1,2}(z)$ от Лема 3.5.4) по Лема 3.5.6 нова граница $t_{|C|-1}(x) \geq L_{2k-1,|C|-1}(x)$. С тях отново извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 3.5.9 и т.н. Ако след няколко стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн C при наличие на условието $t_2(z) > \alpha_0$. В противен случай тази процедура изглежда е сходяща и дава най-добрите за Случай 1 съответни граници.

Когато докажем несъществуване, т.е. Случай 1 е приключен, ни остава да разглеждаме дизайна $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$, при условие, че $t_2(z) \leq \alpha_0$ е в сила за всички специални четворки от разглеждания вид, т.е. всички специални четворки са "добри".

3.5.3 Всички специални четворки са "добри"

Нека C е сферичен $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C|$, за който всички специални четворки от разглеждания вид са "добри", т.е. за всички специални четворки е в сила $t_2(z) \leq \alpha_0$ (Случай 2).

Освен $\langle z, u \rangle = t_2(z) \leq \alpha_0$ от (3.5.2) имаме $\langle x, z \rangle = t_2(x) \leq \alpha_0$. Прилагайки Лема 3.5.6 получаваме $\langle x, u \rangle \geq 2\alpha_0^2 - 1$, откъдето следва, че $t_{|C|-1}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1 = L_{2k-1,|C|-1}(x)$.

Дотук за "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C имаме неравенствата

$$\begin{aligned} t_1(x) &\leq t_2(x) \leq \alpha_0 \leq t_3(x), & 2\alpha_0^2 - 1 &\leq t_{|C|-1}(x), \\ t_1(z) &\leq t_2(z) \leq \alpha_0 \leq t_3(z), & 2\alpha_0^2 - 1 &\leq t_{|C|-1}(z), \\ t_1(y) &\leq \alpha_0 \leq t_3(y), & 2\alpha_0^2 - 1 &\leq t_{|C|-1}(y), \\ t_1(u) &\leq \alpha_0 \leq t_3(u), & 2\alpha_0^2 - 1 &\leq t_{|C|-1}(u). \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

В частност, $t_i(z) \leq U_{2k-1,i}(z) = \alpha_0$, за $i = 1, 2$.

Съществуването на поне една "добра" специална четворка точки от C следва от съществуването на тройката $\{x, y, z\}$ (Лема 1.6.11) и отхвърлянето на възможността $t_2(z) > \alpha_0$ (Случай 1). Добавянето на нови геометрични съображения при изследването на структурата на разглежданите дизайни, а именно разглеждането на "добри" специални четворки точки дава възможност да се докаже следната важна теорема.

Теорема 3.5.10. *Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C|$, в който всички специални четворки са "добри". Тогава съществуват поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ и точка $v \in C \setminus \{x, y, z, u\}$, за които*

$$\langle v, w \rangle \leq \alpha_0, \quad \text{за някое } w \in \{y, u\}.$$

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 62

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. че за всяка "добра" специална четворка и всяка точка $v \in C \setminus \{x, y, z, u\}$ имаме $\langle v, w \rangle > \alpha_0$ за $w \in \{x, y, z, u\}$. Нека да разгледаме дефинирания в Лема 1.6.11 граф Γ и възможните пътища в него. Всеки път, който започва с ребро от тип $X \rightarrow Y$ трябва да завърши с ребро от тип $X \leftrightarrow Y$. Ако пътят е с дължина три или четири, получаваме добра специална четворка, а път с дължина пет противоречи на нашето допускане. Така във всички случаи получаваме свързан подграф от четири върха. Тогава Γ е обединение на непресичащи се двойки (цикли $X \leftrightarrow Y$) и специални четворки (подграфи $y \leftrightarrow x \leftrightarrow z \leftrightarrow u$; между u и y може да има или няма ребро). Това е противоречие, тъй като $|\Gamma| = |C|$ е нечетно число. Следователно съществува поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$, за която съществува точка $v \in C \setminus \{x, y, z, u\}$ такава, че $t_1(v) = \langle v, w \rangle \leq \alpha_0$ за някое $w \in \{x, y, z, u\}$. Тъй като $\langle v, x \rangle \leq \alpha_0$ и $\langle v, z \rangle \leq \alpha_0$ противоречат на условието $\rho_0|C| < 3$ (виж Лема 3.5.2), остава да имаме $\langle v, w \rangle \leq \alpha_0$ за някое $w \in \{y, u\}$. $\square$

Следствие 3.5.11. *Имаме $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ за поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C .*

Доказателство. От Теорема 3.5.10 следва, че съществува "добра" специална четворка $\{x, y, z, u\}$ от C , за която съществува точка $v \in C \setminus \{x, y, z, u\}$, такава че $\langle v, w \rangle \leq \alpha_0$ за някое $w \in \{y, u\}$. Тогава от $\langle v, y \rangle \leq \alpha_0$ имаме $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, а от $\langle v, u \rangle \leq \alpha_0$ получаваме, че $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ (и в двата случая прилагаме Лема 3.5.5 за $a = b = \alpha_0 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$). $\square$

Границата за $t_{|C|-2}(x)$ (или $t_{|C|-2}(z)$ съответно) от Следствие 3.5.11, в много случаи се оказва достатъчно добра, за да докаже несъществуването на дизайна C . Това се дължи на факта, че вече имаме добри граници за четири или пет скаларни произведения от $I(x)$ (съответно $I(z)$).

Ще разгледаме поотделно двете възможности от Следствие 3.5.11.

Дефиниция 3.5.12. "Добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C , за която $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ (съответно $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$) ще наричаме x - "добра" (съответно z - "добра").

И в двата случая започваме с подобряване на долната граница $t_3(z) \geq L_{2k-1,3}(z)$. С нейна помощ можем да получим търсената нова горна граница за $t_1(z)$.

Случай 2.1. Съществува x - "добра" специална четворка точки

Нека C е сферичен $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C|$, за който всички специални четворки $\{x, y, z, u\}$ от C са "добри", т.е. за всички тези специални четворки е в сила $t_2(z) \leq \alpha_0$ (Случай 2) и за поне една от тях имаме $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, т.е. в C съществува поне една x - "добра" специална четворка. В следващата лема получаваме по-добра долна граница за $t_3(z)$.

Лема 3.5.13. *Имаме $t_3(z) \geq L_{2k-1,3}(z)$, където $L_{2k-1,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{2k-1,1}(z)) - g(L_{2k-1,|C|-1}(z)).$$

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 63

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $g(t)$, точката $z \in C$ и дизайна C . За полинома $g(t)$ имаме $g(t_1(z)) \geq g(U_{2k-1,1}(z)) \geq g(\alpha_0)$, $g(t_2(z)) \geq g(\alpha_0)$ и $g(t_{|C|-1}(z)) \geq g(L_{2k-1,|C|-1}(z)) \geq g(2\alpha_0^2 - 1)$, тъй като $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$ и растяща в интервала $(\alpha_{k-1}, +\infty)$. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|g(\alpha_0) &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(z)) \\ &\geq g(t_1(z)) + g(t_2(z)) + g(t_3(z)) + g(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq g(U_{2k-1,1}(z)) + g(\alpha_0) + g(t_3(z)) + g(L_{2k-1,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

Сега твърдението следва от повторното използване на факта, че $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$. $\square$

От (3.5.1), Лема 3.5.7 и Лема 3.5.13 имаме

$$\begin{aligned} g(L_{2k-1,3}(z)) &= \rho_0|C|g(\alpha_0) - 2g(\alpha_0) - g(2\alpha_0^2 - 1) \\ &< 2g(L_{2k-1,3}^{(old)}(z)) - g(\alpha_0) < g(L_{2k-1,3}^{(old)}(z)), \end{aligned}$$

където с $L_{2k-1,3}^{(old)}(z)$ е означена границата от Лема 3.5.7. Тъй като $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$ имаме $\alpha_0 < L_{2k-1,3}^{(old)}(z) < L_{2k-1,3}(z)$, т.е. в Лема 3.5.13 подобряваме долната граница за $t_3(z)$.

С помощта на $L_{2k-1,3}(z)$ можем да получим по-добра горна граница за скаларното произведение $t_1(z)$.

Лема 3.5.14. *Имаме $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{2k-1,3}(z))g(t)$ и $U_{2k-1,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{2k-1,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $f(t)$, точката $z \in C$ и дизайна C . Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|f(\alpha_0) &= f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_2(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq 2f(t_1(z)) + f(L_{2k-1,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

Сега твърдението следва от използване на факта, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, L_{2k-1,3}(z))$. $\square$

От Теорема 1.6.10, (3.5.1), Лема 3.5.14 и факта, че $f(\alpha_0) < 0$ имаме

$$\begin{aligned} 2f(U_{2k-1,1}(z)) &= \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) \\ &< \rho_0|C|f(\alpha_0) \leq 2f(\alpha_0), \end{aligned}$$

като $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, L_{2k-1,3}(z))$. Следователно в Лема 3.5.14 получаваме търсената нова горна граница $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$.

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 64

С получената в Лема 3.5.14 граница $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$ прилагаме Лема 3.5.6, получаваме нова долна граница за $t_{|C|-1}(x)$ и извършваме следната проверка в точката $x \in C$ за съществуване на разглеждания дизайн C . Да напомним, че от $t_1(z) = t_2(x)$ следва, че $t_2(x) \leq U_{2k-1,2}(x) = U_{2k-1,1}(z)$.

Лема 3.5.15. (Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществува полином $h(t) = (t - a_1)^2(t - a_2)^2 \dots (t - a_{k-1})^2$, $a_i \in [\alpha_0, \alpha_{k-1}]$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$, тогава, че е изпълнено неравенството

$$C_x(h) := h_0 M - h(1) - 2h(U_{2k-1,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{2k-1, M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват $(2k-1)$ -дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, в които съществува x -”добра” специална четворка точки.

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. съществува $(2k-1)$ -дизайн C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за който съществува x -”добра” специална четворка $\{x, y, z, u\}$ от C , т.е. за нея имаме $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$. Прилагаме (1.6.3) с полинома $h(t)$, точката $x \in C$ и дизайна C . Като използваме получените граници за скалярните произведения от $I(x)$ и факта, че функцията $h(t)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, \alpha_0)$ и растяща в интервала $(\alpha_{k-1}, +\infty)$, последователно получаваме

$$\begin{aligned} h_0|C| - h(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} h(t_i(x)) \\ &\geq h(t_1(x)) + h(t_2(x)) + h(t_{|C|-2}(x)) + h(t_{|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(t_2(x)) + h(t_{|C|-2}(x)) + h(t_{|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(U_{2k-1,2}(x)) + h(2\alpha_0^2 - 1) + h(L_{2k-1, |C|-1}(x)), \end{aligned}$$

което противоречи на неравенството от условието на лемата. $\square$

След оптимизация на параметрите a_i за $i = 1, 2, \dots, k-1$ е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответна рекурсивна процедура: Лема 3.5.13, Лема 3.5.14, Лема 3.5.6 и отново извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 3.5.15 и т.н. Ако след няколко стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн при наличието на всички наложени дотук ограничения върху неговата структура. В противен случай тази процедура изглежда е сходяща и дава най-добрите за Случай 2.1 съответни граници.

Случай 2.2. Съществува z -”добра” специална четворка точки

Нека C е сферичен $(2k-1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C|$, за който всички специални четворки $\{x, y, z, u\}$ от C са ”добри”, т.е. за всички тези специални четворки е в сила $t_2(z) \leq \alpha_0$ (Случай 2) и за поне една от тях имаме $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, т.е. в C съществува поне една z -”добра” специална четворка.

Лема 3.5.16. Имаме $t_3(z) \geq L_{2k-1,3}(z)$, където $L_{2k-1,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{2k-1,1}(z)) - g(2\alpha_0^2 - 1) - g(L_{2k-1, |C|-1}(z)).$$

3.5. Необходими условия за съществуване на някои $(2k-1)$ -дизайни с нечетна мощност 65

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $g(t)$, точката z и C . Последователно получаваме

$$\begin{aligned}\rho_0|C|g(\alpha_0) &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(z)) \\ &\geq g(t_1(z)) + g(t_2(z)) + g(t_3(z)) + g(t_{|C|-2}(z)) + g(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq g(U_{2k-1,1}(z)) + g(\alpha_0) + g(t_3(z)) + g(2\alpha_0^2 - 1) + g(L_{2k-1,|C|-1}(z)).\end{aligned}$$

Сега твърдението следва от повторното използване на факта, че $g(t)$ е намаляваща функция в интервала $(-\infty, \alpha_1)$. $\square$

По аналогия (със Случай 2.1) имаме $\alpha_0 < L_{2k-1,3}^{(old)}(z) < L_{2k-1,3}(z)$ и с помощта на $L_{2k-1,3}(z)$ получаваме по-добра горна граница за скаларното произведение $t_1(z)$.

Лема 3.5.17. *Имаме $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{2k-1,3}(z))g(t)$ и $U_{2k-1,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) - f(L_{2k-1,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Използваме (1.6.3) с $f(t)$, точката z и C . Последователно получаваме

$$\begin{aligned}\rho_0|C|f(\alpha_0) &= f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_2(z)) + f(t_{|C|-2}(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq 2f(t_1(z)) + f(2\alpha_0^2 - 1) + f(L_{2k-1,|C|-1}(z)).\end{aligned}$$

Сега твърдението следва от използване на факта, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, L_{2k-1,3}(z))$. $\square$

Както в Случай 2.1 можем да проверим, че $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$, т.е. в Лема 3.5.17 е подобрена общата горна граница за $t_1(z)$.

С получената в Лема 3.5.17 граница $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z)$ прилагаме Лема 3.5.6 и получаваме нова по-добра долна граница за $t_{|C|-1}(x)$ от досегашната $2\alpha_0^2 - 1$ и извършваме следната проверка по x за съществуване на разглеждания дизайн C .

Лема 3.5.18. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществува полином $h(t) = (t - a_1)^2(t - a_2)^2 \dots (t - a_{k-1})^2$, $a_i \in [\alpha_0, \alpha_{k-1}]$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$, такъв, че е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{2k-1,2}(x)) - h(L_{2k-1,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват $(2k-1)$ -дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, в които съществува z -”добра” специална четворка точки.

Доказателство. Аналогично на доказателствата на Лемите 3.5.9 и 3.5.15. $\square$

След оптимизация на параметрите a_i за $i = 1, 2, \dots, k-1$ е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответната рекурсивна процедура:

Лема 3.5.16, Лема 3.5.17, Лема 3.5.6 и извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 3.5.18 и т.н. Ако след няколко стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн при наличието на всички наложени за случая ограничения върху неговата структура. В противен случай тази процедура изглежда е сходяща и дава най-добрите за Случай 2.2 съответни граници.

Да отбележим, че можем да извършваме и съответни проверки в точката $z \in C$ за съществуване на разглежданите дизайни C , които (по аналогия) означаваме с $C_z(h)$. Например в Случай 2.2 за полинома $h(t)$ от Лема 3.5.18 може да проверяваме дали е изпълнено неравенството

$$C_z(h) := h_0|C| - h(1) - h(U_{2k-1,1}(z)) - h(\alpha_0) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{2k-1,|C|-1}(z)) < 0.$$

3.5.4 Обобщения на резултатите и някои коментари

Разглежданите случаи изчерпват всички възможности и можем да обобщим получените резултати в следната теорема.

Теорема 3.5.19. *Не съществува $(2k-1)$ -дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за който*

$$\rho_0|C| < 3, \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1, \quad \text{и} \quad C_x(h_i) < 0$$

за някои полиноми $h_i(t)$ за $i = 1, 2, 3$, съответно в Лемите 3.5.9, 3.5.15 и 3.5.18.

Доказателство. Да допуснем противното.

Ако съществува специална четворка, която не е "добра", от $t_2(z) > \alpha_0$ и съществуването на някой полином $h_1(t)$, за който $C_x(h_1) < 0$ достигаем до противоречие в проверката по x за съществуване на дизайна C (съгласно Лема 3.5.9).

Ако всички специални четворки са "добри", то съгласно Следствие 3.5.11 имаме или $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ в някоя "добра" специална четворка, т.е. в C съществува или x - "добра" специална четворка, или z - "добра" специална четворка точки.

В първия случай от съществуването на x - "добра" специална четворка и на някой полином $h_2(t)$, за който имаме $C_x(h_2) < 0$ достигаем до противоречие в проверката по x за съществуване на дизайна C (съгласно Лема 3.5.15).

Във втория случай от съществуването на z - "добра" специална четворка и на някой полином $h_3(t)$, за който имаме $C_x(h_3) < 0$ (или $C_z(h_3) < 0$) достигаем до противоречие в проверката по x за съществуване на дизайна C (съгласно Лема 3.5.18).

Следователно за всички възможни случаи получихме, че не съществува $(2k-1)$ -дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност, за който са в сила условията (3.5.1), т.е. $\rho_0|C| < 3$ и $\alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1$. $\square$

В описания по-горе метод, възлов момент е получаването на горни граници за $t_1(z)$ от вида $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$. Следващата лема представя достатъчно условие за получаване на такива граници.

Лема 3.5.20. Нека $f(t) = (t - a)g(t)$, където $a \in [\alpha_0, \alpha_1)$ и $M \geq D(n, 2k - 1)$ е нечетно естествено число, такива, че

$$\rho_0 M < 2 + \frac{f(2\alpha_0^2 - 1)}{f(\alpha_0)}. \quad (3.5.4)$$

Тогава за всеки сферичен $(2k - 1)$ -дизайн с нечетна мощност $|C| = M$ и точка z от специална тройка е в сила граница $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$. В случая, когато в C съществува z -”добра” специална четворка точки, изискването (3.5.4) може да се замени с по-слабото:

$$\rho_0 M < 2 + \frac{2f(2\alpha_0^2 - 1)}{f(\alpha_0)}.$$

Доказателство. От Теорема 1.6.1 и $f(\alpha_i) = 0$ за $i = 1, 2, \dots, k - 1$ следва, че

$$f_0|C| - f(1) = \rho_0|C|f(\alpha_0).$$

Като използваме (1.6.3) с полинома $f(t)$, дизайна C и точката $z \in C$, последователно получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0|C|f(\alpha_0) &= f_0|C| - f(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_2(z)) + f(t_{C-1}(z)) \\ &> 2f(t_1(z)) + f(2\alpha_0^2 - 1). \end{aligned}$$

Нека $U_{2k-1,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$\rho_0|C|f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) = 2f(t_1(z)).$$

От неравенството в условието на лемата следва, че този най-малък корен е по-малък от α_0 . Тъй като функцията $f(t)$ е растяща в интервала $[-1, a]$, имаме неравенствата $t_1(z) \leq U_{2k-1,1}(z) < \alpha_0$. $\square$

В конкретни случаи (при фиксирани τ , n и $|C|$) могат да се прилагат аргументи, които подобряват горния подход. В следващата глава ще разгледаме такива приложения и описаните (по-горе) техники за $\tau = 3, 5$ и 7 , с помощта, на които ще получим нови резултати за несъществуване.

Тази глава е написана въз основа на [34], [21] и [23].

Глава 4

Нови резултати за несъществуване на някои сферични 3-, 5- и 7-дизайни

В тази глава са получени нови необходими условия за съществуването на 3-, 5- и 7-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 50$, $5 \leq n \leq 25$ и $5 \leq n \leq 20$ съответно, а оттам и резултати за несъществуване на някои от тези дизайни. Получени са и асимптотични подобрения на долната граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни.

Нашата техника използва съществено фактите от §1.6 и прилага метода от §3.5, в който получихме нови необходими условия за съществуване на клас от сферични $(2k - 1)$ -дизайни с нечетна мощност. Да отбележим, че при необходимост подхода от §3.5 е усилен с по-прецизен анализ на разположението на изследваните скаларни произведения.

4.1 Нови резултати за несъществуване на сферични 3-дизайни

В целия параграф имаме $\tau = 3$. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн с нечетна мощност $|C| > 2n + 1 = D(n, 3) + 1$. Тогава α_0 и α_1 са корени на уравнението $L_3(n, \alpha_1) = |C|$, т.е.

$$n(|C| - (n + 1))\alpha^2 + n(n - 1)\alpha + 2n - |C| = 0.$$

При $\tau = 3$ полиномът $g(t)$ от §1.6 и §3.5 има вида

$$g(t) = (t - \alpha_1)^2.$$

Байнок [5, 6] дава конструкции на сферични 3-дизайни за всички размерности $n \geq 7$ и всички нечетни мощности $|C| = M \geq \frac{5n}{2}$. В по-ниските размерности, той конструира 3-дизайни за всички нечетни мощности, започвайки с $|C| = M \geq 11$ за

$n = 3$ и $n = 4$ и с $|C| = M \geq 15$ за $n = 5$ и $n = 6$. От друга страна Бойваленков-Данев-Никова [28] и Бойваленков-Бумова-Данев [16] доказват, че не съществуват 3-дизайни C с нечетна мощност $|C| = M$, за които $\rho_0|C| < 2$. По-късно Бойваленков-Бумова-Данев [17] доказват несъществуването на 3-дизайни C с нечетна мощност в още 50 (за тях $\rho_0|C| \geq 2$) от всички 144 отворени дотогава случая за $3 \leq n \leq 50$. Следователно, за размерности $3 \leq n \leq 50$ са останали 94 отворени случая. За 47 от тези 94 случая са изпълнени условията от §3.5, т.е. мощността $|C|$ е нечетна и са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$ и $\alpha_1 < 2\alpha_0^2 - 1$.

Нека $x, y, z \in C$ са специалната тройка точки от C определени в Лема 1.6.11. От условията по-горе следва

$$t_{|C|-1}(z) \geq L_{3,|C|-1}(z) = 2\alpha_0^2 - 1. \quad (4.1.1)$$

Ще фокусираме нашите изследвания върху скаларните произведения от $I(x)$ и $I(z)$ (съгласно описания в §3.5 подход). Главната ни цел е да получим нова горна граница за $t_1(z)$, т.е. съгласно (1.6.9) да имаме оценка от вида

$$t_1(z) \leq U_{3,1}(z) < \alpha_0. \quad (4.1.2)$$

В началото (както в §3.5.1) ще получим някои общи граници за скаларни произведения от $I(x)$ и $I(z)$. Следващата лема дава долна граница за $t_1(z) = t_2(x)$.

Лема 4.1.1. *Имаме*

$$t_1(z) \geq L_{3,1}(z) = \alpha_1 - \sqrt{\frac{(1 + n\alpha_1^2)|C| - n(1 - \alpha_1)^2}{2n}},$$

т.е. $L_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението $2g(t) = \rho_0|C|g(\alpha_0)$.

Доказателство. Това е Лема 3.5.3 при $\tau = 3$ след решаване на съответното уравнение. $\square$

Долната граница за $t_1(z)$ от Лема 4.1.1 може да бъде използвана за получаване на горна граница за скаларното произведение $t_2(z)$. Това е аналог на Лема 3.5.4, като тук получаваме по-добра горна граница за $t_2(z)$ чрез оптимален за подхода полином.

Лема 4.1.2. *Имаме $t_2(z) \leq U_{3,2}(z)$, където границата $U_{3,2}(z)$ е дефинирана в доказателството.*

Доказателство. Използваме (1.6.3) с полинома $f(t) = (t - t_2(z))(t - a)^2$, точката z и дизайна C . Ще определим параметъра $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ по-късно. Ясно е, че $f(t_i(z)) \geq 0$ за $i \geq 2$, а $f(t_1(z)) \geq f(L_{3,1}(z))$ и $f(t_{|C|-1}(z)) \geq f(L_{3,|C|-1}(z))$, тъй като $f(t)$ е растяща функция в интервалите $(-\infty, t_2(z))$ и $(\alpha_1, +\infty)$. Следователно

$$\begin{aligned} f_0|C| - f(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq f(L_{3,1}(z)) + f(L_{3,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

Получаваме следното линейно неравенство относно t_2

$$B(a)t_2(z) \geq A(a),$$

където

$$A(a) = \frac{2a|C|}{n} + (1-a)^2 + L_{3,1}(z)(L_{3,1}(z) - a)^2 + L_{3,|C|-1}(z)(L_{3,|C|-1}(z) - a)^2$$

и

$$B(a) = -\frac{|C|}{n} - a^2|C| + (1-a)^2 + (L_{3,1}(z) - a)^2 + (L_{3,|C|-1}(z) - a)^2.$$

При $B(a) < 0$ получаваме

$$t_2(z) \leq F(a) = \frac{A(a)}{B(a)}.$$

Оказва се, че във всички случаи имаме оптимална стойност $a = a_0$, за която са изпълнени условията $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ и $B(a) < 0$. За тази стойност на a получаваме търсената граница $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) = F(a_0)$. $\square$

Лема 4.1.3. *Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$, където*

$$L_{3,3}(z) = \alpha_1 - \sqrt{\frac{(1 + n\alpha_1^2)|C| - n[(1 - \alpha_1)^2 - (\alpha_0 - \alpha_1)^2 - (2\alpha_0^2 - 1 - \alpha_1)^2]}{2n}}$$

е най-малкият корен на уравнението $2g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(L_{3,|C|-1}(z))$.

Доказателство. Това е Лема 3.5.7 при $\tau = 3$ след решаване на съответното уравнение. $\square$

Ще илюстрираме метода с два примера, за които ще пресмятаме последователно след всяко твърдение съответно получените граници. Пресмятанията са извършени с Maple, като числовите резултати са описани приблизително както следва: долните граници са закръглени надолу, горните граници – нагоре, а останалите параметри са закръглени до шести знак след десетичната запетая. Всички числови пресмятания за разглежданите в Глава 4 дизайни са описани при тези условия. В действителност Maple дава възможност за пресмятания с голяма точност и ние използваме точност до 15 знака.

Навсякъде по-долу под Пример 1 (съответно Пример 2) ще разбираме случая ($n = 7, |C| = 17$) (съответно случая ($n = 8, |C| = 19$)). За Пример 2 като краен резултат ще получим доказателство, че дизайни със съответните параметри не съществуват.

Да пресметнем параметрите и границите от Лема 4.1.1 - 4.1.3 за тези примери.

Пример 1. За ($n = 7, |C| = 17$), получаваме приблизително $\alpha_0 \approx -0.731743$, $\alpha_1 \approx 0.065076$ и от Лема 4.1.1 - 4.1.3 имаме границите $t_1(z) \geq L_{3,1}(z) = -0.836723$, $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) = -0.626854$ и $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.639029$. $\diamond$

Пример 2. Аналогично за $(n = 8, |C| = 19)$ получаваме $\alpha_0 = -0.75$ и $\alpha_1 = 0.05$, а след това границите $t_1(z) \geq L_{3,1}(z) = -0.821780$, $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) = -0.684601$ и $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.611200$. $\diamond$

Виждаме, че в Пример 2 имаме $U_{3,2}(z) < L_{3,3}(z)$, докато в Пример 1 е изпълнено неравенството $L_{3,3}(z) < U_{3,2}(z)$. Всъщност за всички 47 отворени случая имаме следната наредба за вече определените параметри и за пресметнатите дотук граници от Лема 4.1.1 - 4.1.3

$$-1 < L_{3,1}(z) < \alpha_0 < \alpha_1 < 2\alpha_0^2 - 1 = L_{3,|C|-1}(z) \text{ и } U_{3,2}(z), L_{3,3}(z) \in [\alpha_0, \alpha_1]. \quad (4.1.3)$$

Тази наредба показва, че е необходим по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . Всъщност този анализ е в съответствие и с описаният в §3.5 подход. Затова продължаваме с изследването на специалните четворки $\{x, y, z, u\}$ от C , получени по описания в началото на §3.5 начин и разглеждане на двата основни случая.

Случай 1. Съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. $t_2(z) > \alpha_0$ (§3.5.2 за $\tau = 3$).

Следващата лема намира по-добра горна граница за $t_1(z)$ съгласно (4.1.2).

Лема 4.1.4. *Имаме границата $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ и $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.8 при $\tau = 3$. $\square$

С помощта на по-добрата горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$ прилагаме Лема 3.5.6, получаваме долната граница $L_{3,|C|-1}(x) \leq t_{|C|-1}(x)$ и сме готови да получим необходимо условие за съществуване на разглежданите 3-дизайни в този случай. Както в §3.5, проверката в точката $x \in C$ за съществуване на разглежданите дизайни C ще означаваме като $C_x(h)$.

Лема 4.1.5. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществува параметър $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ такъв, че за полинома $h(t) = (t - a)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(L_{3,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 3-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. $t_2(z) > \alpha_0$.

Доказателство. Това е Лема 3.5.9 при $\tau = 3$. $\square$

След оптимизация на параметъра a е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме с рекурсивна процедура, в която заместваме параметъра α_0 с новата граница $U_{3,1}(z)$ навсякъде, където е възможно и коректно в Лема 4.1.4 (виж §3.5.2). Така получаваме по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, а от там по

Лема 3.5.6 нова, по-добра граница $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x)$. С тях отново извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 4.1.5 и т.н. Ако след определен брой стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн в този случай.

Пример 1. ($n = 7, |C| = 17$)(Продължение) На първа стъпка имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.770678$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = -0.013381$ и $C_x(h) = 0.216828 \geq 0$. На шеста стъпка с рекурсивната процедура последователно получаваме $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(5)}(z) = -0.848151$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(5)}(x) = 0.118917$ и $C_x(h) = -0.049935 < 0$. Следователно, от Лема 4.1.5 имаме, че не съществуват 3-дизайни върху $\mathbb{S}^6$ с 17 точки, за които съществува специална четворка, която не е "добра". $\diamond$

Пример 2. ($n = 8, |C| = 19$)(Продължение) На първа стъпка имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.790121$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.094129$ и $C_x(h) = 0.101801 \geq 0$. На втора стъпка с рекурсивната процедура последователно получаваме $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(1)}(z) = -0.818216$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(1)}(x) = 0.141090$ и $C_x(h) = -0.000218 < 0$ за $h(t) = (t - 0.033)^2$. Следователно, не съществуват 3-дизайни върху $\mathbb{S}^7$ с 19 точки, за които поне една специална четворка не е "добра". $\diamond$

За всички 47 отворени случая процедурата доказва, че не съществуват 3-дизайни с такива параметри, при условие, че в тях съществува поне една специална четворка, която не е "добра". Следователно Случай 1 може да се счита за приключен.

Случай 2. Всички специални четворки са "добри", т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки (§3.5.3 за $\tau = 3$).

В този случай всички получени извън Случай 1. граници са валидни. За разглежданите 47 случая са налице условията на Теорема 3.5.10 при $\tau = 3$. Съгласно Следствие 3.5.11 остава да разгледаме задачата за несъществуване при предположение, че в C съществува или x -"добра" специална четворка, т.е. $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, или z -"добра" специална четворка точки, т.е. $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Случай 2.1. В C съществува x -"добра" специална четворка $\{x, y, z, u\}$, т.е. за тази специална четворка имаме $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Новата горна граница $t_2(z) \leq \alpha_0 := U_{3,2}(z)$ използваме, за да получим по-добра долна граница $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$.

Лема 4.1.6. *Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$, където $L_{3,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{3,1}(z)) - g(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.13 при $\tau = 3$. $\square$

С помощта на границата от Лема 4.1.6 получаваме по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$.

Лема 4.1.7. *Имаме границата $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ и $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.14 при $\tau = 3$. $\square$

Лема 4.1.8. (Проверка по x за съществуване на дизайн C) Ако съществува параметър $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ такъв, че за полинома $h(t) = (t - a)^2$ е изпълнено неравенството

$$C_x(h) := h_0 M - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{3,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 3-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува x ”добра” специална четворка точки, т.е. $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Доказателство. Това е Лема 3.5.15 при $\tau = 3$. $\square$

Ако $C_x(h) \geq 0$, прилагаме съответна рекурсивна процедура (виж §3.5.3, Случай 2.1): прилагане на Лема 4.1.6, 4.1.7, след което следва нова проверка по x за съществуване на дизайна с новите по-добри граници, т.е. $C_x(h)$ по Лема 4.1.8 и т.н.

Пример 1. ($n = 7, |C| = 17$) (Продължение) Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.532090$, $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.766756$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.123535$ и $C_x(h) = 0.222872 \geq 0$. Числените резултати показват, че най-вероятно имаме сходимост в процедурата, т.е. в този случай тя не дава резултат за несъществуване, а само нови граници. Например след двадесет стъпки имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}^{(19)}(z) = -0.431619$, $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(19)}(z) = -0.782877$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(19)}(x) = 0.148802$. $\diamond$

Пример 2. ($n = 8, |C| = 19$) (Продължение) Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.434114$, $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.782653$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.175276$ и $C_x(h) = 0.098542 \geq 0$. Числените резултати показват, че най-вероятно имаме сходимост в процедурата, т.е. в този случай тя не дава резултат за несъществуване, а само нови граници. Както в Пример 1 след двадесет итерации получаваме $t_3(z) \geq L_{3,3}^{(19)}(z) = -0.289738$, $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(19)}(z) = -0.796564$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(19)}(x) = 0.197515$. $\diamond$

Въпреки получаването на по-добрите граници $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$ и $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, процесът в последната процедура изглежда сходящ във всичките 47 разглеждани случая. Затова продължаваме с по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 .

Случай 2.1.1 Нека за x ”добрата” специална четворка $\{x, y, z, u\}$ от C имаме $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$, където $\varepsilon \in (0, \alpha_0 - U_{3,1}(z)]$ е положително число (в частност $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) \leq \alpha_0 - \varepsilon$). Подходяща стойност на параметъра ε намираме с проби и грешки. Тогава е в сила следната лема.

Лема 4.1.9. Имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ и $U_{3,1}(z)$ е единственият корен на уравнението

$$f(t) = f_0|C| - f(1) - f(\alpha_0 - \varepsilon) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Прилагаме (1.6.3) за полинома $f(t)$, точката z и дизайна C .

Имаме

$$\begin{aligned}
 f_0|C| - f(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\
 &\geq f(t_1(z)) + f(t_2(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\
 &\geq f(t_1(z)) + f(\alpha_0 - \varepsilon) + f(L_{3,|C|-1}(z)),
 \end{aligned}$$

откъдето получаваме търсената граница, като отчетем, че функцията $f(t)$ е строго растяща в интервала $(-\infty, L_{3,3}(z))$. $\square$

Лема 4.1.10. (Проверка по x за съществуване на дизайн C) Ако съществува параметър $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ такъв, че за полинома $h(t) = (t - a)^2$ е изпълнено неравенството

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{3,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 3-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$ и x -”добра” специална четворка, за която $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$.

Доказателство. Допускаме обратното и прилагаме (1.6.3) с $h(t)$, x и C . Като използваме неравенствата $t_1(x) \leq t_2(x) = t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x)$ и факта, че функцията $h(t)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, \alpha_0)$ и растяща в интервала $(\alpha_1, +\infty)$, последователно получаваме

$$\begin{aligned}
 h_0|C| - h(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} h(t_i(x)) \\
 &\geq h(t_1(x)) + h(t_2(x)) + h(t_{|C|-2}(x)) + h(t_{|C|-1}(x)) \\
 &\geq 2h(t_2(x)) + h(2\alpha_0^2 - 1) + h(L_{3,|C|-1}(x)) \\
 &\geq 2h(U_{3,2}(x)) + h(2\alpha_0^2 - 1) + h(L_{3,|C|-1}(x)),
 \end{aligned}$$

което противоречи на неравенството от условието на лемата. $\square$

Ако $C_x(h) \geq 0$, прилагаме съответна рекурсивна процедура: прилагане на Лема 4.1.9 и Лема 3.5.6, след което следва нова проверка по x за съществуването на дизайн с новите по-добри граници, т.е. $C_x(h)$ по Лема 4.1.10 и т.н.

Пример 1. ($n = 7, |C| = 17$) (Продължение) Нека $\varepsilon = 0.042$. От Лема 4.1.9 имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.791759$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.163031$ и $C_x(h) = 0.133016 \geq 0$. На тринадесета стъпка получаваме $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(12)}(z) = -0.826200$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(12)}(x) = 0.220579$ и $C_x(h) = -0.001177 < 0$. Съгласно Лема 4.1.10 имаме, че не съществуват 3-дизайни върху $\mathbb{S}^6$ с 17 точки, с x -”добра” специална четворка, за която $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$. $\diamond$

Пример 2. ($n = 8, |C| = 19$) (Продължение) Нека $\varepsilon = 0.04$. От Лема 4.1.9 имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.802962$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.207989$ и $C_x(h) = 0.021295 \geq 0$. На трета стъпка получаваме $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(2)}(z) = -0.809713$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(2)}(x) = 0.219141$ и $C_x(h) = -0.005335 < 0$. Съгласно Лема 4.1.10 имаме, че не съществуват

3-дизайни върху $\mathbb{S}^7$ с 19 точки, с x -”добра” специална четворка, за която $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$. $\diamond$

За всички 47 разглеждани случая с описаната по-горе процедура съществува такова $\varepsilon > 0$, при което се доказва, че не съществуват 3-дизайни с такива параметри, при условие, че $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Случай 2.1.2 Нека за x -”добрата” специална четворка $\{x, y, z, u\}$ от C имаме $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$, където $\varepsilon > 0$ е определено съгласно Случай 2.1.1. Тогава имаме $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) := \alpha_0 - \varepsilon$ и са в сила следните лема.

Лема 4.1.11. *Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$, където $L_{3,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = \rho_0|C|g(\alpha_0) - g(U_{3,1}(z)) - g(\alpha_0 - \varepsilon) - g(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Използваме неравенството $t_2(z) \leq \alpha_0 - \varepsilon$ и получаваме

$$\begin{aligned} \rho_0 g(\alpha_0)|C| &= g_0|C| - g(1) = \sum_{i=1}^{|C|-1} g(t_i(z)) \\ &\geq g(t_1(z)) + g(t_2(z)) + g(t_3(z)) + g(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq g(U_{3,1}(z)) + g(\alpha_0 - \varepsilon) + g(t_3(z)) + g(L_{3,|C|-1}(z)). \end{aligned}$$

Остава да отчетем отново факта, че функцията $g(t)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, \alpha_1)$. $\square$

Лема 4.1.12. *Имаме $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ и $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = f_0|C| - f(1) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 4.1.7 с по-добрата граница $L_{3,3}(z)$. $\square$

Лема 4.1.13. *(Проверка по x за съществуване на дизайн C) Ако съществува параметър $a \in [\alpha_0, \alpha_1]$ такъв, че за полинома $h(t) = (t - a)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2(\alpha_0 - \varepsilon)^2 - 1) - h(L_{3,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 3-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$ и x -”добра” специална четворка, за която $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$.

Доказателство. Допускаме противното и прилагаме (1.6.3) с $h(t)$, x и C и последователно получаваме

$$\begin{aligned} h_0|C| - h(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} h(t_i(x)) \\ &\geq h(t_1(x)) + h(t_2(x)) + h(\langle x, v \rangle) + h(t_{|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(t_2(x)) + h(2(\alpha_0 - \varepsilon)^2 - 1) + h(L_{3,|C|-1}(x)) \\ &\geq 2h(U_{3,2}(x)) + h(2(\alpha_0 - \varepsilon)^2 - 1) + h(L_{3,|C|-1}(x)), \end{aligned}$$

което противоречи на неравенството от условието на лемата. $\square$

Ако $C_x(h) \geq 0$, прилагаме съответна рекурсивна процедура: Лема 4.1.11, Лема 4.1.12, Лема 3.5.6 и проверка по x за съществуването на дизайна по Лема 4.1.13 и т.н.

Пример 1. ($n = 7, |C| = 17$)(Продължение) Отново $\varepsilon = 0.042$. Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.356836$, $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.787069$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.218205$ и $C_x(h) = 0.100957 \geq 0$. Числените резултати показват, че най-вероятно имаме сходимост в процедурата, т.е. в този случай тя не дава резултат за несъществуване, а само следните нови граници $t_3(z) \geq L_{3,3}^{(19)}(z) = -0.333022$, $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(19)}(z) = -0.789893$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(19)}(x) = 0.222684$. $\diamond$

Пример 2. ($n = 8, |C| = 19$)(Продължение) Отново $\varepsilon = 0.04$. Имаме $t_3(z) \geq L_{3,3}(z) = -0.173207$, $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) = -0.797814$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x) = 0.260634$ и $C_x(h) = -0.028092 < 0$. Следователно, от Лема 4.1.13 имаме, че не съществуват 3-дизайни върху S^7 с 19 точки, с x -”добра” специална четворка, за която $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$. С това е завършено доказателството за несъществуване на 3-дизайни върху S^7 с 19 точки в Случай 2.1. $\diamond$

С описаната по-горе процедура се доказва, че не съществуват 3-дизайни в 24 от разглежданите 47 случая при условие, че в тях съществува x -”добра” специална четворка. За останалите 23 случая процесът в последната процедура изглежда сходящ. До този момент за тях имаме само текущи най-добри граници $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$, $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}(x)$. Затова в тези 23 случая продължаваме с по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно $\alpha_0 - \varepsilon$, т.е. връщаме се в началото на Случай 2.1.1 и откриваме ново $\varepsilon_1 > 0$ с помощта на което имаме нови (аналогични на Случаи 2.1.1 и 2.1.2) два подслучая и т.н. Ако за някое $\varepsilon_i > 0$ получим и в двата случая отрицателни стойности за съответните $C_x(h) < 0$, то дизайн с разглежданите параметри и с x -”добра” специална четворка не съществува. Конкретните пресмятания дават резултати за несъществуване на дизайни в 11 от останалите 23 случая. За последните 12 случая процесът е изглежда сходящ.

Пример 1. ($n = 7, |C| = 17$)(Продължение) Може да подобрим тези граници с подходящо избрани $\varepsilon_i > 0$. По-точно последователно избираме $\varepsilon_1 = 0.05$, $\varepsilon_2 = 0.052$ и $\varepsilon_3 = 0.0527$. Получаваме несъществуване за съответните подслучаи (аналогични на Случаи 2.1) и подобряваме границите за подслучаите, аналогични на Случаи 2.2. При последния избор на $\varepsilon_3 = 0.0527$ за случая $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon_3]$ числените резултати показват, че най-вероятно имаме сходимост в процедурата и получаваме само следните най-добри за текущата ситуация граници $t_3(z) \geq L_{3,3}^{(14)}(z) = -0.303271$, $t_1(z) \leq U_{3,1}^{(14)}(z) = -0.791535$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{3,|C|-1}^{(14)}(x) = 0.241895$. $\diamond$

В другия възможен случай (Случай 2.2), когато в C съществува z -”добра” специална четворка, т.е. имаме $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, за всички 47 разглеждани случая правим аналогични разсъждения, като прилагаме лемите, съответни на описаните в Случай 2.2 на §3.5.3, а след това извършваме аналогичен на

описания по-горе по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . Получаваме съответните най-добри за текущата ситуация граници или $C_x(h) < 0$ и следователно резултат за несъществуване на дизайна. Получените резултати за несъществуване са в тези 35 случая от всички 47, в които и по-горе имаме съответен резултат за несъществуване, а в останалите 12 случая и тук имаме сходимост на съответните процедури.

Да обобщим: в размерности $3 \leq n \leq 50$ изследвахме въпроса за съществуването на 3-дизайни с параметри в 47 отворени случая, отговарящи на условията: C е 3-дизайн с нечетна мощност, за който са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$ и $\alpha_1 < 2\alpha_0^2 - 1$. Несъществуване е доказано в 35 от тези 47 случая. В Таблица 4.1 по-долу тези резултати са указани с $^\circ$. Да отбележим, че този резултат дава окончателен отговор на Проблем 1.1.6 за размерности $n = 8, 13, 14$ и 18 . Освен това за размерности $3 \leq n \leq 20$ остават само 10 отворени случая, означени с $?$ в Таблица 4.1.

n	$ C $							
	$2n+1$	$2n+3$	$2n+5$	$2n+7$	$2n+9$	$2n+11$	$2n+13$	$2n+15$
3	7*	9 ?	<u> 11</u>					
4	9*	<u> 11</u>						
5	11*	13 ?	<u> 15</u>					
6	13*	<u> 15</u>						
7	15*	17 ?	<u> 19</u>					
8	17*	19 $^\circ$	<u> 21</u>					
9	19*	21 $^\bullet$	<u> 23</u>					
10	21*	23 $^\bullet$	<u> 25</u>					
11	23*	25*	27 ?	<u> 29</u>				
12	25*	27*	29 ?	<u> 31</u>				
13	27*	29*	31 $^\circ$	<u> 33</u>				
14	29*	31*	33 $^\circ$	<u> 35</u>				
15	31*	33*	35 $^\bullet$	37 ?	<u> 39</u>			
16	33*	35*	37 $^\bullet$	39 ?	<u> 41</u>			
17	35*	37*	39 $^\bullet$	41 ?	<u> 43</u>			
18	37*	39*	41 $^\bullet$	43 $^\circ$	<u> 45</u>			
19	39*	41*	43*	45 $^\circ$	47 ?	<u> 49</u>		
20	41*	43*	45*	47 $^\circ$	49 ?	<u> 51</u>		
21	43*	45*	47*	49 $^\bullet$	51 ?	<u> 53</u>		
22	45*	47*	49*	51 $^\bullet$	53 ?	<u> 55</u>		
23	47*	49*	51*	53 $^\bullet$	55 $^\circ$	57 ?	<u> 59</u>	
24	49*	51*	53*	55 $^\bullet$	57 $^\circ$	59 ?	<u> 61</u>	
25	51*	53*	55*	57 $^\bullet$	59 $^\circ$	61 ?	<u> 63</u>	

n	$ C $							
	$2n+1$	$2n+3$	$2n+5$	$2n+7$	$2n+9$	$2n+11$	$2n+13$	$2n+15$
26	53*	55*	57*	59•	61 [◊]	63 ?	<u> 65</u>	
27	55*	57*	59*	61*	63•	65 ?	<u> 67 ?</u>	<u> 69</u>
28	57*	59*	61*	63*	65•	67 [◊]	69 ?	<u> 71</u>
29	59*	61*	63*	65*	67•	69 [◊]	71 ?	<u> 73</u>
30	61*	63*	65*	67*	69•	71 [◊]	73 ?	<u> 75</u>

n	$ C $							
	$2n+9$	$2n+11$	$2n+13$	$2n+15$	$2n+17$	$2n+19$	$2n+21$	$2n+23$
31	71•	73 [◊]	75 ?	77 ?	<u> 79</u>			
32	73•	75•	77 ?	79 ?	<u> 81</u>			
33	75•	77•	79 [◊]	81 ?	<u> 83</u>			
34	77•	79•	81 [◊]	83 ?	<u> 85</u>			
35	79*	81•	83 [◊]	85 ?	87 ?	<u> 89</u>		
36	81*	83•	85 [◊]	87 ?	89 ?	<u> 91</u>		
37	83*	85•	87 [◊]	89 ?	91 ?	<u> 93</u>		
38	85*	87•	89•	91 [◊]	93 ?	<u> 95</u>		
39	87*	89•	91•	93 [◊]	95 ?	97 ?	<u> 99</u>	
40	89*	91•	93•	95 [◊]	97 ?	99 ?	<u> 101</u>	
41	91*	93•	95•	97 [◊]	99 ?	101 ?	<u> 103</u>	
42	93*	95*	97•	99 [◊]	101 ?	103 ?	<u> 105</u>	
43	95*	97*	99•	101 [◊]	103 [◊]	105 ?	107 ?	<u> 109</u>
44	97*	99*	101•	103•	105 [◊]	107 ?	109 ?	<u> 111</u>
45	99*	101*	103•	105•	107 [◊]	109 ?	111 ?	<u> 113</u>
46	101*	103*	105•	107•	109 [◊]	111 ?	113 ?	<u> 115</u>

n	$ C $							
	$2n+11$	$2n+13$	$2n+15$	$2n+17$	$2n+19$	$2n+21$	$2n+23$	$2n+25$
47	105*	107•	109•	111 [◊]	113 ?	115 ?	117 ?	<u> 119</u>
48	107*	109•	111•	113 [◊]	115 [◊]	117 ?	119 ?	<u> 121</u>
49	109*	111•	113•	115 [◊]	117 [◊]	119 ?	121 ?	<u> 123</u>
50	111*	113*	115•	117•	119 [◊]	121 ?	123 ?	<u> 125</u>

Таблица 4.1. Проблем 1.1.6 за $\tau = 3$ в размерности $3 \leq n \leq 50$.**Легенда:**| m - съществуват дизайни с всички мощности $|C| \geq m$ (Байнок [5, 6]),

* - не съществуват от [28, 16],

• - не съществуват от [17],

[◊] - нови резултати за несъществуване от тази част,

? - не е известно дали съществуват.

В следващия параграф ще използваме аналогичен подход за изследване на 5-дизайни, за да получим нови резултати за несъществуване на такива дизайни в някои открити случаи. В последния параграф на настоящата глава въз основа на описания тук подход ще получим асимптотични подобрения на долната граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни.

4.2 Нови резултати за несъществуване на сферични 5-дизайни

В целия параграф имаме $\tau = 5$. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 5-дизайн с нечетна мощност $|C| \geq n^2 + n + 1 = D(n, 5) + 1$. Тогава α_0 , α_1 и α_2 са корени на уравнението

$$n(1 - \alpha)((n + 2)(n + 3)\alpha^2 + 4(n + 2)\alpha - n + 1) = 2\alpha|C|(3 - (n + 2)\alpha^2).$$

В този случай

$$g(t) = (t - \alpha_1)^2(t - \alpha_2)^2.$$

Резник [69, 70] описва конструкции на 5-дизайни в размерност $n = 3$ за мощности $|C| = M = 12, 16, 18, 20$ и ≥ 22 . Освен това, той предполага, че за всички останали възможни мощности съответните 5-дизайни не съществуват. След [17], са останали 42 отворени случая в размерности $5 \leq n \leq 25$, в които мощността $|C|$ е нечетна и са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$. Нека $x, y, z \in C$ са специална тройка точки от C , определена в Лема 1.6.11. Във всички тези 42 случая имаме $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_2$ и по Лема 1.6.11 следва

$$t_{|C|-1}(z) \geq L_{5,|C|-1}(z) = 2\alpha_0^2 - 1. \quad (4.2.1)$$

Съгласно описания в §3.5 подход, ще получим някои общи граници за скаларни произведения от $I(x)$ и $I(z)$. Целта е да получим нова горна граница за $t_1(z)$, т.е. съгласно (1.6.9) да имаме оценка от вида

$$t_1(z) \leq U_{5,1}(z) < \alpha_0. \quad (4.2.2)$$

Отново ще илюстрираме техниката с примери, за които последователно ще пресмятаме съответните граници. Пресмятанията са извършени с Maple, като числовите резултати са апроксимирани, както в предходния параграф. Навсякъде по-долу под Пример 3 (съответно Пример 4) ще разбираме случая ($n = 11, |C| = 147$) (съответно случая ($n = 17, |C| = 343$)). И в двата примера като краен резултат ще получим доказателство, че дизайни с тези параметри не съществуват.

Следващата лема дава долна граница за $t_1(z) = t_2(x)$.

Лема 4.2.1. *Имаме $t_1(z) \geq L_{5,1}(z)$, където $L_{5,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2g(t) = \rho_0|C|g(\alpha_0).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.3 при $\tau = 5$. $\square$

Пример 3. За $(n = 11, |C| = 147)$ имаме $\alpha_0 \approx -0.830399$, $\alpha_1 \approx -0.248366$ и $\alpha_2 \approx 0.293051$. Тогава от Лема 4.2.1 имаме границата $t_1(z) \geq L_{5,1}(z) = -0.892289$. $\diamond$

Пример 4. Аналогично, за $(n = 17, |C| = 343)$ получаваме $\alpha_0 \approx -0.816081$, $\alpha_1 \approx -0.210687$, $\alpha_2 \approx 0.240641$ и $t_1(z) \geq L_{5,1}(z) = -0.892618$. $\diamond$

Долната граница за $t_1(z)$ от Лема 4.2.1 може да бъде използвана за получаване на горна граница за $t_2(z)$. Както в предходната част, следващата лема е аналог на Лема 3.5.4. Ще получим по-добра горна граница за $t_2(z)$ посредством използването на оптимален за подхода полином.

Лема 4.2.2. *Имаме $t_2(z) \leq U_{5,2}(z)$, където границата $U_{5,2}(z)$ е дефинирана в доказателството.*

Доказателство. Означаваме за краткост $q(t) = t^2 + at + b$ и използваме (1.6.3) с полинома $f(t) = (t - t_2(z))q^2(t)$, точката z и дизайна C . Параметрите a и b ще определим по-късно. Ще предполагаме, че полиномът $q(t)$ има два реални корена в интервала $[\alpha_0, \alpha_2]$. Ясно е, че $f(t_i(z)) \geq 0$ за $i \geq 2$ и $f(t_1(z)) \geq f(L_{5,1}(z))$, понеже $f(t)$ е растяща функция в интервала $(-\infty, t_2(z))$. Следователно

$$\begin{aligned} f_0|C| - f(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} f(t_i(z)) \\ &\geq f(t_1(z)) + f(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq f(L_{5,1}(z)) + f(L_{5,|C|-1}(z)) \end{aligned}$$

Както в Лема 4.1.2 получаваме линейно неравенство за $t_2(z)$. Ако коефициента пред $t_2(z)$ е отрицателен, имаме

$$t_2(z) \leq F(a, b) = \frac{A(a, b)}{B(a, b)},$$

където

$$A(a, b) = -\frac{6a|C|}{n(n+2)} - \frac{2ab|C|}{n} + q^2(1) + L_{5,1}(z)q^2(L_{5,1}(z)) + L_{5,|C|-1}(z)q^2(L_{5,|C|-1}(z))$$

и

$$B(a, b) = \frac{3|C|}{n(n+2)} + \frac{(a^2 + b)|C|}{n} + b^2|C| - q^2(1) - q^2(L_{5,1}(z)) - q^2(L_{5,|C|-1}(z)).$$

След оптимизация на параметрите a и b получаваме границата $t_2(z) \leq U_{5,2}(z)$. Оказва се, че изискването $q(t)$ да има два реални корена в интервала $[\alpha_0, \alpha_2]$ е изпълнено за оптималните стойности на a и b , като при това $B(a, b) < 0$. $\square$

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.2 получаваме горната граница $t_2(z) \leq U_{5,2}(z) = -0.774411$. $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.2 получаваме горната граница $t_2(z) \leq U_{5,2}(z) = -0.744010$. $\diamond$

Лема 4.2.3. *Имаме $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = \min\{\theta_z, \alpha_1\}$, където θ_z е най-малкият корен на уравнението*

$$2g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.7 при $\tau = 5$. $\square$

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.3 получаваме долната граница $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.801894$. $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.3 получаваме долната граница $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.807530$. $\diamond$

Във всичките разглеждани 42 случая имаме следната наредба за вече определените параметри и пресметнатите дотук граници по Лема 4.2.1 - 4.2.3

$$-1 < L_{5,1}(z) < \alpha_0 < L_{5,3}(z) < U_{5,2}(z) < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\alpha_0^2 - 1 = L_{5,|C|-1}(z). \quad (4.2.3)$$

Продължаваме с разглеждане на двата основни случая, съгласно описания в §3.5 подход.

Случай 1. Съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. за тази специална четворка имаме $t_2(z) > \alpha_0$ (§3.5.2 за $\tau = 5$).

В този случай сме готови да намерим по-добра горна граница за $t_1(z)$.

Лема 4.2.4. *Имаме границата $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{5,3}(z))g(t)$ и $U_{5,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.8 при $\tau = 5$. $\square$

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.4 получаваме горната граница $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.852885$. $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$)(Продължение) Съгласно Лема 4.2.4 получаваме горната граница $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.829251$. $\diamond$

Както в предния параграф с помощта на по-добрата горна граница $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$ сме готови да получим необходимо условие за съществуване на дизайни C , за които съществува поне една специална четворка, която не е "добра". Използваме информацията за получените досега граници за скаларните произведения от $I(x)$.

Лема 4.2.5. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b \in [\alpha_0, \alpha_2]$ такива, че за полинома $h(t) = (t - a)^2(t - b)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{5,2}(x)) - h(L_{5,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 5-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува поне една специална четворка, която не е "добра".

Доказателство. Това е Лема 3.5.9 при $\tau = 5$. $\square$

След оптимизация на параметрите a и b е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава (виж §3.5.2) продължаваме с рекурсивна процедура, в която заместваме параметъра α_0 с новата граница $U_{5,1}(z)$ навсякъде, където е възможно и коректно в Лема 4.2.4. Така получаваме по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{5,1}^{(1)}(z)$, а от там по Лема 3.5.6 нова, по-добра граница $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}^{(1)}(x)$. С тях извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 4.2.5 и т.н. Ако след няколко стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн.

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$)(Продължение) На първа стъпка имаме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.852885$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x) = 0.330162$ и $C_x(h) = 0.195254 \geq 0$. Втората стъпка на рекурсивната процедура дава $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)^{(1)} = -0.872394$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x)^{(1)} = 0.366334$ и отново $C_x(h) = 0.099870 \geq 0$, а при третата стъпка получаваме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)^{(2)} = -0.903326$. Тогава $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x)^{(2)} = 0.428155$ и $C_x(h) = -0.072318 < 0$. Следователно от Лема 4.2.5 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{10}$ с 147 точки, за който поне една специална четворка не е "добра". $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$)(Продължение) Аналогично, след шест стъпки на процедурата получаваме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)^{(5)} = -0.926518$. Тогава имаме $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x)^{(5)} = 0.437940$ и $C_x(h) = -0.218084 < 0$. Следователно, от Лема 4.2.5 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{16}$ с 343 точки, за който поне една специална четворка не е "добра". $\diamond$

С така описаната по-горе процедура за 40 от разглежданите 42 случая се доказва, че не съществуват съответните дизайни, за които съществува поне една специална четворка, която не е "добра". За последните два случая ($n = 7, |C| = 63$ и $n = 8, |C| = 81$) е необходимо да прецизираме доколко е близко $t_3(z)$ до $L_{5,3}(z)$.

Да напомним, че имаме $t_2(z) > \alpha_0$ и да прецизираме разположението на $t_3(z)$ относно границата $L_{5,3}(z)$ като разгледаме следните два случая за $t_3(z)$.

Случай 1.1. Нека $t_3(z) \in [L_{5,3}(z), L_{5,3}(z) + \varepsilon]$, където $\varepsilon > 0$ е положително число, такова че $L_{5,3}(z) + \varepsilon < \alpha_1$. Тогава е в сила следната лема, аналог на Лема 4.2.5 (проверка по z за съществуване на дизайна, която използва информацията за границите, получени за скаларните произведения от множеството $I(z)$).

Лема 4.2.6. (Проверка по z за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b \in [\alpha_0, \alpha_2]$ такива, че за полинома $h(t) = (t - a)^2(t - b)^2$ е изпълнено неравенството

$$C_z(h) := h_0 M - h(1) - h(U_{5,2}(x)) - 2h(L_{5,3}(z) + \varepsilon) - h(L_{5,M-1}(z)) < 0,$$

то не съществуват 5-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува поне една специална четворка, която не е "добра" и $t_3(z) \in [L_{5,3}(z), L_{5,3}(z) + \varepsilon]$.

Доказателство. Да допуснем, че съществува 5-дизайн C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с $|C| = M$ точки, за който съществува поне една специална четворка, която не е "добра" и $t_3(z) \in [L_{5,3}(z), L_{5,3}(z) + \varepsilon]$. Прилагаме (1.6.3) за полинома $h(t)$, точката z и дизайна C . Като използваме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$, $t_2(z) \leq t_3(z) \leq L_{5,3}(z) + \varepsilon$, $t_{|C|-1}(z) \geq L_{5,|C|-1}(z)$ и факта, че функцията $h(t)$ е намаляваща в интервала $(-\infty, \alpha_1)$ и растяща в интервала $(\alpha_2, +\infty)$, последователно получаваме

$$\begin{aligned} h_0|C| - h(1) &= \sum_{i=1}^{|C|-1} h(t_i(z)) \geq h(t_1(z)) + h(t_2(z)) + h(t_3(z)) + h(t_{|C|-1}(z)) \\ &\geq h(t_1(z)) + 2h(t_3(z)) + h(L_{5,|C|-1}(z)) \\ &\geq h(U_{5,1}(z)) + 2h(L_{5,3}(z) + \varepsilon) + h(L_{5,|C|-1}(z)), \end{aligned}$$

което противоречи на неравенството от условието на лемата. $\square$

Отново след оптимизация на a и b , може да се окаже, че все още имаме $C_z(h) \geq 0$ (обратното на условието от Лема 4.2.6). Тогава продължаваме със съответна рекурсивна процедура, при която заменяме параметъра α_0 с границата $U_{5,1}(z)$, където е възможно в Лема 4.2.4 и отново правим проверка по z за съществуване, прилагайки Лема 4.2.6 с новите по-добри граници $U_{5,1}^{(1)}(z)$ и $L_{5,|C|-1}^{(1)}(z)$.

Подходяща стойност на параметъра ε може да се намери с метода на пробите и грешките. За избраната стойност на ε , трябва да се доказва несъществуването на разглежданите дизайни и в двата подслучая. Оказва се, че при $\varepsilon = 0.008$ получаваме несъществуване и в двата останали за разглеждане случаи $n = 7$, $|C| = 63$ и $n = 8$, $|C| = 81$, при предположенията $t_2(z) \in [\alpha_0, U_{5,2}(z)]$ и $t_3(z) \in [L_{5,3}(z), L_{5,3}(z) + \varepsilon]$.

Случай 1.2. Нека имаме $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) + \varepsilon$, където $\varepsilon = 0.008$ е определеното по-горе. Това всъщност е подобрение на долната граница за $t_3(z)$ от Лема 4.2.3, което ще даде подобрения във всички леми, където се използва. В сила е следната лема, аналог на Лема 4.2.4 за получаване на по-добра горна граница за $t_1(z)$.

Лема 4.2.7. *Имаме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$, където $f(t) = (t - (L_{5,3}(z) + \varepsilon))g(t)$ и $U_{5,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 4.2.4 с по-добрата граница $L_{5,3}(z) + \varepsilon$. $\square$

С така получената нова горна граница за $t_1(z)$ правим проверка за съществуване на дизайна по точката x , т.е. прилагаме Лема 4.2.5. След намиране на оптималните стойности на a и b отново е възможно да се окаже, че все още имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответната рекурсивна процедура, в която замества α_0 с $U_{5,1}(z)$ навсякъде, където е възможно при прилагането на Лема 4.2.4, след което правим проверка по x за съществуване по Лема 4.2.5 с новите по-добри граници $U_{5,1}(z)$ и $L_{5,|C|-1}(x)$. Така и за давата останали за разглеждане случая (при $n = 7$, $|C| = 63$ и $n = 8$, $|C| = 81$) получаваме несъществуването им при определените по-горе условия.

Окончателно за всички 42 (отворени) случая е доказано несъществуването на дизайни със съответните параметри, за които съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. Случай 1 е приключен.

Случай 2. Всички специални четворки са "добри", т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки от разглеждания вид (§3.5.3 за $\tau = 5$).

Както за 3-дизайни за "добрите" специални четворки точки са валидни всички получени извън Случай 1 граници. Освен това съгласно Следствие 3.5.11 имаме, че в C съществува или x - "добра" специална четворка, или z - "добра" специална четворка точки.

Случай 2.1. В C съществува x - "добра" специална четворка точки, т.е. $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Имаме $t_2(z) \leq \alpha_0 := U_{5,2}(z)$. Тази горна граница за t_2 използваме, за да получим по-добра долна граница $t_3(z) \geq L_{5,3}(z)$.

Лема 4.2.8. *Имаме $t_3(z) \geq L_{5,3}(z)$, където $L_{5,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{5,1}(z)) - g(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.13 при $\tau = 5$. □

С помощта на границата от Лема 4.2.8 получаваме по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$.

Лема 4.2.9. *Имаме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{5,3}(z))g(t)$ и $U_{5,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.14 при $\tau = 5$. □

Лема 4.2.10. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b \in [\alpha_0, \alpha_2]$ такива, че за полинома $h(t) = (t - a)^2(t - b)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{5,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{5,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 5-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които съществува x - "добра" специална четворка точки.

Доказателство. Това е Лема 3.5.15 при $\tau = 5$. □

Ако $C_x(h) \geq 0$, прилагаме съответна рекурсивна процедура (виж §3.5.3 Случай 2.1). След първата проверка, (ако не е доказано несъществуването на дизайна) се връщаме в последователното прилагане на Лемите 4.2.8, 4.2.9, след което следва нова проверка по x за съществуването на дизайна с новите по-добри граници, т.е. $C_x(h)$ по Лема 4.2.10 и т.н.

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$) (Продължение) На първа стъпка имаме границите $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.769776$, $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.848569$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x) = 0.409862$ и $C_x(h) = 0.203959 \geq 0$. На осма стъпка получаваме $t_3(z) \geq L_{5,3}^{(7)}(z) = -0.628108$, $t_1(z) \leq U_{5,1}^{(7)}(z) = -0.887968$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}^{(7)}(x) = 0.481126$ и $C_x(h) = -0.002685 < 0$. Следователно от Лема 4.2.10 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{10}$ с 147 точки и x -”добра” специална четворка точки. $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$) (Продължение) На първа стъпка имаме границите $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.798687$, $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.826023$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x) = 0.34835$ и $C_x(h) = 0.313238 \geq 0$. На двадесет и четвърта стъпка получаваме $t_3(z) \geq L_{5,3}^{(23)}(z) = -0.633021$, $t_1(z) \leq U_{5,1}^{(23)}(z) = -0.888956$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}^{(23)}(x) = 0.460769$ и $C_x(h) = -0.007452 < 0$. Следователно от Лема 4.2.10 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{16}$ с 343 точки и x -”добра” специална четворка точки. $\diamond$

С така описаната по-горе процедура за 34 от разглежданите 42 случая се доказва, че не съществуват съответните дизайни с x -”добра” специална четворка точки. За останалите 8 случая е необходимо да прецизираме разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . Използваме аналогичен на описания в §4.1 подход с намирането на подходяща стойност на параметъра ε и разглеждането на съответните за x -”добрата” специална четворка два подслучая: $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$ и $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$. По-този начин за всички 8 случая също се доказва, че не съществуват дизайни с такива параметри, ако за тях съществува x -”добра” специална четворка точки. С това Случай 2.1 е приключен.

Случай 2.2. В C съществува z -”добра” специална четворка точки, т.е. $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Съгласно Случай 2.2 в §3.5.3 имаме следните граници.

Лема 4.2.11. *Имаме $t_3(z) \geq L_{5,3}(z)$, където $L_{5,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{5,1}(z)) - g(2\alpha_0^2 - 1) - g(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.16 при $\tau = 5$. $\square$

Лема 4.2.12. *Имаме $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{5,3}(z))g(t)$ и $U_{5,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) - f(L_{5,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.17 при $\tau = 5$. $\square$

С получената в Лема 4.2.12 граница $t_1(z) \leq U_{5,1}(z)$ прилагаме Лема 3.5.6 и получаваме по-добра долна граница за $t_{|C|-1}(x)$ и извършваме съответната проверка по x за съществуване на разглеждания дизайн C .

Лема 4.2.13. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b \in [\alpha_0, \alpha_2]$ такива, че за полинома $h(t) = (t - a)^2(t - b)^2$ е изпълнено*

неравенството

$$C_x(h) := h_0 M - h(1) - 2h(U_{5,2}(x)) - h(L_{5,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 5-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, в които съществува z -”добра” специална четворка точки.

Доказателство. Това е Лема 3.5.18 при $\tau = 5$. $\square$

След оптимизация на параметрите a и b е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответната рекурсивна процедура: Лема 4.2.11, Лема 4.2.12, Лема 3.5.6 и извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 4.2.13 и т.н.

Пример 3. ($n = 11, |C| = 147$) (Продължение) На първа стъпка имаме границите $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.768109$, $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.851347$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x) = 0.414667$ и $C_x(h) = 0.194902 \geq 0$. На шеста стъпка получаваме $t_3(z) \geq L_{5,3}^{(5)}(z) = -0.623091$, $t_1(z) \leq U_{5,1}^{(5)}(z) = -0.889346$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}^{(5)}(x) = 0.483757$ и $C_x(h) = -0.007026 < 0$. Следователно от Лема 4.2.13 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{10}$ с 147 точки и z -”добра” специална четворка точки. $\diamond$

Пример 4. ($n = 17, |C| = 343$) (Продължение) На първа стъпка имаме границите $t_3(z) \geq L_{5,3}(z) = -0.797449$, $t_1(z) \leq U_{5,1}(z) = -0.829199$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}(x) = 0.353654$ и $C_x(h) = 0.302561 \geq 0$. На четиринадесета стъпка получаваме $t_3(z) \geq L_{5,3}^{(13)}(z) = -0.638638$, $t_1(z) \leq U_{5,1}^{(13)}(z) = -0.888253$ и $t_{|C|-1}(x) \geq L_{5,|C|-1}^{(13)}(x) = 0.459409$ и $C_x(h) = -0.000402 < 0$. Следователно от Лема 4.2.13 имаме, че не съществува 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{16}$ с 343 точки и z -”добра” специална четворка точки. $\diamond$

С така описаната по-горе процедура за 34 от разглежданите 42 случая се доказва, че не съществуват съответните дизайни, за които съществува z -”добра” специална четворка точки. За останалите 8 случая, които са същите като в Случай 2.1, е необходимо да прецизираме разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . Отново се използва съответен на описания в §4.1 подход и за тези 8 случая се доказва, че не съществуват дизайни с такива параметри, ако за тях съществува z -”добра” специална четворка точки. По-този начин са изчерпани всички възможности и са получени резултати за несъществуване във всички 42 случая.

Получените резултати доказват следната теорема.

Теорема 4.2.14. *За да съществуват 5-дизайни $C \in \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 25$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.*

Новите граници за величината $B_{odd}(n, 5)$ за размерности $5 \leq n \leq 25$ са посочени в Таблица 4.2.

n	[16]	нови долни граници $B_{\text{odd}}(n, 5)$	n	[16]	нови долни граници $B_{\text{odd}}(n, 5)$
3	15		15	267	271
4	23		16	303	307
5	35		17	341	345
6	47	49	18	381	385
7	63	65	19	423	429
8	81	83	20	467	473
9	101	103	21	515	521
10	123	125	22	563	569
11	147	149	23	615	621
12	173	177	24	667	675
13	203	205	25	723	731
14	233	237			

Таблица 4.2. Долни граници за мощността в Проблем 1.1.5 за $\tau = 5$, нечетна мощност и размерности $3 \leq n \leq 25$.

4.3 Нови резултати за несъществуване на сферични 7-дизайни

В целия параграф имаме $\tau = 7$. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 7-дизайн с нечетна мощност $|C|$. Тогава α_i за $i = 0, 1, 2, 3$ са корени на уравнението $L_7(n, \alpha_1) = |C|$, т.е.

$$\begin{aligned}
(n+4)(2+n)(n^3+6n^2+5n-6|C|)x^4 &- n(n^2-1)(n+2)(n+2)x^3 - \\
-9(n+2)(n^3+4n^2+3n-4|C|)x^2 &+ 3n(n^2-1)(n+2)x + \\
+6n^3+18n^2+12n-18|C| &= 0.
\end{aligned}$$

Да напомним, че $g(t) = (t - \alpha_1)^2(t - \alpha_2)^2(t - \alpha_3)^2$.

Бойваленков-Бумова-Данев [16] доказват, че не съществуват 7-дизайни C с нечетна мощност $|C| = M$, за които $\rho_0|C| < 2$. По-нататък, за размерности $3 \leq n \leq 20$ има 291 отворени случая, за които мощността $|C|$ е нечетна и са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$. Във всички тези случаи имаме $\alpha_3 < 2\alpha_0^2 - 1$. Нека $x, y, z \in C$ са специална тройка точки от C както в Лема 1.6.11. Тогава

$$t_{|C|-1}(z) \geq L_{7,|C|-1}(z) = 2\alpha_0^2 - 1. \quad (4.3.1)$$

Да напомним, че за описания в §3.5 и в предните параграфи метод възлов момент е получаването на добра горна граница за $t_1(z)$, т.е. съгласно (1.6.9) да имаме оценка от вида $t_1(z) \leq U_{7,1}(z) < \alpha_0$.

Както по-горе, в началото ще получим някои общи граници за скаларни произведения от $I(x)$ и $I(z)$ (съгласно описания в §3.5 подход).

Лема 4.3.1. *Имаме $t_1(z) \geq L_{7,1}(z)$, където $L_{7,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението $2g(t) = \rho_0|C|g(\alpha_0)$.*

Доказателство. Това е Лема 3.5.3 при $\tau = 7$. $\square$

Долната граница за $t_1(z)$ от Лема 4.3.1 може да бъде използвана за получаване на горна граница за скаларното произведение $t_2(z)$.

Лема 4.3.2. *Имаме $t_2(z) \leq U_{7,2}(z)$, където границата $U_{7,2}(z)$ е дефинирана в доказателството.*

Доказателство. Използваме (1.6.3) с полинома $f(t) = (t - t_2(z))(t - a)^2(t - b)^2(t - c)^2$, точката z и дизайна C . Аналогично на Лема 4.1.2 и Лема 4.2.2. $\square$

Лема 4.3.3. *Имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = \min\{\theta_z, \alpha_1\}$, където θ_z е най-малкият корен на уравнението $2g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(L_{7,|C|-1}(z))$.*

Доказателство. Това е Лема 3.5.7 при $\tau = 7$. $\square$

Отново ще илюстрираме метода с два примера, за които ще пресмятаме последователно получените граници.

Навсякъде по-долу под Пример 5 (респективно Пример 6) ще разбираме случая ($n = 7, |C| = 177$) (съответно случая ($n = 7, |C| = 179$)). Като краен резултат ще получим доказателство, че дизайни със съответните параметри не съществуват.

Да пресметнем параметрите и границите от Лема 4.3.1 - 4.3.3 за посочените по-горе примери.

Пример 5. За ($n = 7, |C| = 177$), получаваме $\alpha_0 \approx -0.914657$, $\alpha_1 \approx -0.494861$, $\alpha_2 \approx 0.017474$, $\alpha_3 \approx 0.530506$ и границите $t_1(z) \geq L_{7,1}(z) = -0.923941$, $t_2(z) \leq U_{7,2}(z) = -0.954317$ и $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = -0.849070$. $\diamond$

Пример 6. Аналогично, за ($n = 7, |C| = 179$), получаваме $\alpha_0 \approx -0.900479$, $\alpha_1 \approx -0.488849$, $\alpha_2 \approx 0.0212335$, $\alpha_3 \approx 0.532275$, а след това и границите $t_1(z) \geq L_{7,1}(z) = -0.926413$, $t_2(z) \leq U_{7,2}(z) = -0.876347$ и $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = -0.864671$. $\diamond$

Виждаме, че в Пример 5 имаме $\alpha_0 = U_{7,1}(z) < L_{7,1}(z)$, което е невъзможно, докато в Пример 6 е изпълнено неравенството $L_{7,1}(z) \leq t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$. Всъщност за 58 отворени случая (включително Пример 5) имаме противоречие, тъй като получаваме или $\alpha_0 = U_{7,1}(z) < L_{7,1}(z)$, или $U_{7,2}(z) < L_{7,1}(z)$. Така за тези 58 случая имаме резултат за несъществуване на 7-дизайни със съответните нечетни мощности.

В останалите 233 случая имаме $L_{7,1}(z) \leq t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$ и е необходим по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . Затова продължаваме с разглеждане на основните два случая, съгласно описания в §3.5 метод.

Случай 1. Съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. за тази специална четворка имаме $t_2(z) > \alpha_0$ (§3.5.2 за $\tau = 7$).

Следващата лема намира по-добра горна граница за $t_1(z)$.

Лема 4.3.4. *Имаме $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{7,3}(z))g(t)$ и $U_{7,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{7,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.8 при $\tau = 7$. □

С помощта на по-добрата горна граница $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$ получаваме съответното необходимо условие за съществуване на разглежданите 7-дизайни в този случай.

Лема 4.3.5. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b, c \in [\alpha_0, \alpha_3]$ такива, че за полинома $h(t) = (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{7,2}(x)) - h(L_{7,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 7-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, за които поне една специална четворка не е "добра".

Доказателство. Това е Лема 3.5.9 при $\tau = 7$. □

След оптимизация на параметрите $\{a, b, c\}$ е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме с рекурсивна процедура Лема 4.3.4, Лема 3.5.6 и проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 4.3.5 и т.н. Ако след определен брой стъпки получим $C_x(h) < 0$, това доказва несъществуването на разглеждания дизайн.

Пример 6. ($n = 7, |C| = 179$) (Продължение) На първа стъпка имаме $t_1(z) \leq U_{7,1}(z) = -0.923285$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{7,|C|-1}(x) = 0.624098$ и $C_x(h) = -0.252859 < 0$. Следователно, от Лема 4.3.5 имаме, че не съществуват 7-дизайни върху $\mathbb{S}^6$ с 179 точки, за които поне една специална четворка не е "добра". ◇

За всички 233 отворени случая процедурата доказва, че не съществуват 7-дизайни с такива параметри, за които поне една специална четворка не е "добра".

Случай 2. Всички специални четворки са "добри", т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки от разглеждания вид (§3.5.3 за $\tau = 7$).

Сега всички специални четворки $\{x, y, z, u\}$ от C са "добри", като границите, получени извън Случай 1., са валидни. Тогава за разглежданите 233 случая са налице условията на Теорема 3.5.10 при $\tau = 7$. Съгласно тази теорема и Следствие 3.5.11 остава да разгледаме 7-дизайни, за които имаме, че съществува или x - "добра" специална четворка, т.е. $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, или z - "добра" специална четворка точки, т.е. $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Случай 2.1. В C съществува x - "добра" специална четворка точки, т.е. $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Имаме $t_2(z) \leq \alpha_0 := U_{7,2}(z)$. Тази горна граница за t_2 използваме, за да получим по-добра долна граница $t_3(z) \geq L_{7,3}(z)$.

Лема 4.3.6. *Имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z)$, където $L_{7,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{7,1}(z)) - g(L_{7,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.13 при $\tau = 7$. □

С помощта на границата от Лема 4.3.6, получаваме нова по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$.

Лема 4.3.7. *Имаме $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{7,3}(z))g(t)$ и $U_{7,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.14 при $\tau = 7$. □

Лема 4.3.8. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b, c \in [\alpha_0, \alpha_3]$ такива, че за полинома $h(t) = (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{7,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{7,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 7-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, в които съществува x -”добра” специална четворка точки.

Доказателство. Това е Лема 3.5.15 при $\tau = 7$. □

Ако $C_x(h) \geq 0$, прилагаме съответна рекурсивна процедура Лема 4.3.6, 4.3.7, след което следва нова проверка по x за съществуването на дизайна с новите по-добри граници, т.е. $C_x(h)$ по Лема 4.3.8 и т.н.

Пример 6. ($n = 7, |C| = 179$) (Продължение) Имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = -0.816562$, $t_1(z) \leq U_{7,1}(z) = -0.915723$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{7,|C|-1}(x) = 0.64984$ и $C_x(h) = -0.011107 < 0$. Следователно не съществуват 7-дизайни върху $\mathbb{S}^6$ с 179 точки и x -”добра” специална четворка точки. ◇

Случай 2.2. В C съществува z -”добра” специална четворка точки, т.е. $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0]$ и $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$.

Съгласно описания в §3.5.3 Случай 2.2 имаме следните лема.

Лема 4.3.9. *Имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z)$, където $L_{7,3}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$g(t) = (\rho_0|C| - 1)g(\alpha_0) - g(U_{7,1}(z)) - g(2\alpha_0^2 - 1) - g(L_{7,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.16 при $\tau = 7$. □

Лема 4.3.10. *Имаме $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$, където $f(t) = (t - L_{7,3}(z))g(t)$ и $U_{7,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението*

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(2\alpha_0^2 - 1) - f(L_{7,|C|-1}(z)).$$

Доказателство. Това е Лема 3.5.17 при $\tau = 7$. $\square$

С получената в Лема 4.3.10 граница $t_1(z) \leq U_{7,1}(z)$ прилагаме Лема 3.5.6 и получаваме по-добра долна граница за $t_{|C|-1}(x)$ и извършваме съответната проверка по x за съществуване на разглеждания дизайн C .

Лема 4.3.11. *(Проверка по x за съществуване на дизайна C) Ако съществуват параметри $a, b, c \in [\alpha_0, \alpha_3]$ такива, че за полинома $h(t) = (t - a)^2(t - b)^2(t - c)^2$ е изпълнено неравенството*

$$C_x(h) := h_0M - h(1) - 2h(U_{7,2}(x)) - h(L_{7,M-1}(x)) < 0,$$

то не съществуват 7-дизайни C върху $\mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = M$, в които съществува z -”добра” специална четворка точки.

Доказателство. Това е Лема 3.5.18 при $\tau = 7$. $\square$

След оптимизация на параметрите $\{a, b, c\}$ е възможно все още да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответната рекурсивна процедура: Лема 4.3.9, Лема 4.3.10, Лема 3.5.6 и извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C , прилагайки Лема 4.3.11 и т.н.

Пример 6. ($n = 7, |C| = 179$) (Продължение) Имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = -0.816562$, $t_1(z) \leq U_{7,1}(z) = -0.919829$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{7,|C|-1}(x) = 0.657669$ и $C_x(h) = 0.029432 > 0$. На следващата стъпка имаме $t_3(z) \geq L_{7,3}(z) = -0.758067$, $t_1(z) \leq U_{7,1}(z) = -0.931616$, $t_{|C|-1}(x) \geq L_{7,|C|-1}(x) = 0.680839$ и $C_x(h) = -0.042528 < 0$. Следователно не съществуват 7-дизайни върху $\mathbb{S}^6$ с 179 точки и z -”добра” специална четворка точки. $\diamond$

Процесът в последните две процедури изглежда сходящ само в следните три случая ($n = 4, |C| = 43$), ($n = 6, |C| = 121$) и ($n = 9, |C| = 357$). За тях извършваме, както в §4.1, по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 . По този начин в Случай 2 с изключение на случая ($n = 4, |C| = 43$) получаваме, че 7-дизайни със съответните параметри несъществуват.

Получените резултати доказват следната теорема.

Теорема 4.3.12. *За да съществуват 7-дизайни $C \in \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 20$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.*

Нещо повече, методът дава резултати за несъществуване в 18 случая, когато $\alpha_3 < 2\alpha_0^2 - 1$, но $\rho_0|C| \geq 3$.

В Таблица 4.2 по-долу са указани получените подобрения на границата $B_{odd}(n, 7)$ за размерности $5 \leq n \leq 20$.

Границите от [28] (втората колона в Таблица 4.2) са получени с чисто линейно програмиране и са по-добри от границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел само в размерности 5, 6 и 7. Най-добрите известни досега граници за $B_{odd}(n, 7)$ бяха, получените чрез метода от [16] (третата колона в Таблица 4.2). В четвъртата колона са дадени новите граници, получени като резултат от описания по-горе метод и Теорема 4.3.12,

т.е. в случая, когато $\rho_0|C| \in [2, 3)$, а в петата колона са включени и резултатите от метода при $\rho_0|C| > 3$. Така най-добрите (за момента) граници за $B_{odd}(n, 7)$ са последните в съответните редове на Таблица 4.2.

n	[28]	[16]	нови долни граници $\rho_0 C \in [2, 3)$	нови долни граници $\rho_0 C \geq 3$
3		23		
4		43		
5	73	75	77	
6	117	119	123	
7	173	177	183	
8		253	261	
9		347	359	
10		463	477	
11		601	619	621
12		765	789	
13		957	985	987
14		1175	1213	1215
15		1427	1471	1475
16		1713	1767	1769
17		2031	2097	2101
18		2393	2467	2473
19		2791	2879	2885
20		3233	3333	3341

Таблица 4.2. Долни граници за мощността в Проблем 1.1.5 за $\tau = 7$, нечетна мощност и размерности $3 \leq n \leq 20$.

Да отбележим, че за 7-дизайни методът с използване на съществуването на x -”добра” или z -”добра” специална четворка (съгласно Теорема 3.5.10 и Следствие 3.5.11) дава резултат по-бързо и лесно в сравнение със случаите $\tau = 3$ и $\tau = 5$. Изглежда това е общ феномен - дизайни с по-голяма сила и относително малки мощности съществуват по-рядко и съответно е по-лесно да се доказват резултати за несъществуване.

4.4 Асимптотични подобрения на долната граница за мощността на сферични 3-дизайни

В тази част ще получим асимптотични подобрения на долната граница $B_{\text{odd}}(n, 3)$ за мощността на 3-дизайни (виж Проблем 1.1.5, Глава 1).

Ще приложим вече описания в първи параграф на тази глава метод за 3-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = (2 + \gamma)n$ при $n \rightarrow \infty$. Ще използваме означението $B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim An$, където A е константа, когато имаме границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{\text{odd}}(n, 3)}{n} \geq A$. От [5, 6] за числото γ имаме $\gamma \in (0, 0.5)$.

В [28, 17, 18] Бойваленков-Данев-Никова и Бойваленков-Бумова-Данев последователно получават

$$B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim (1 + \sqrt[3]{2})n \approx 2.2599n, [28]$$

$$B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim 2.3227n, [17]$$

$$B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim 2.3412n. [18]$$

Следователно можем да предполагаме, че $\gamma \in [0.3412, 0.5)$. Параметрите за разглежданите дизайни имат следното асимптотично поведение [17]

$$\alpha_0 \approx -\frac{1}{1 + \gamma}, \quad \alpha_1 \approx 0 \quad \text{и} \quad \rho_0|C| \approx (1 + \gamma)^3.$$

Условията (3.5.1) дават съответно

$$\rho_0|C| < 3 \iff \gamma < \sqrt[3]{3} - 1 \approx 0.44225,$$

$$\alpha_1 < 2\alpha_0^2 - 1 \iff \gamma < \sqrt{2} - 1 \approx 0.41421.$$

Да разгледаме въпроса за съществуването на 3-дизайни C с нечетна мощност $|C| = (2 + \gamma)n$, при $n \rightarrow \infty$ и $\gamma \in [0.3412, \sqrt{2} - 1)$.

Съгласно (4.1.1) получаваме

$$t_{|C|-1}(z) \geq L_{3,|C|-1}(z) = 2\alpha_0^2 - 1 \approx \frac{2}{(1 + \gamma)^2} - 1.$$

.

Ще следваме подход, подобен на този от §4.1 и ще работим с полиномите $g(t) = (t - \alpha_1)^2$ и $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ като проверките $C_x(h)$ и $C_z(h)$ ще извършваме с полином $h(t) = g(t) = (t - \alpha_1)^2$.

От асимптотичните аналози на Лема 4.1.1 - 4.1.3 имаме съответно

$$t_1(z) \geq L_{3,1}(z) \approx -\sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}},$$

$$t_2(z) \leq U_{3,2}(z) \approx -\frac{\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{(1+\gamma)^2} - 1\right)^3 - 1}{\left(\frac{2}{(1+\gamma)^2} - 1\right)^2 - \frac{1+\gamma}{2}},$$

$$t_3(z) \geq L_{3,3}(z) \approx -\frac{\sqrt{2\gamma^5 + 8\gamma^4 + 12\gamma^3 + 14\gamma^2 + 14\gamma - 2}}{2(1+\gamma)^2}.$$

По аналогия с §4.1 разглеждаме съответните два основни случая.

Забележка 4.4.1. Всички получени (в лемите-аналози на съответните в §4.1 леми) граници са монотонни, като долните граници са монотонно растящи, а горните са монотонно намаляващи. От своя страна функционалите $C_x(h)$ и $C_z(h)$ също са намаляващи при подобрени граници. Следователно, доказателство за несъществуване за някое $\gamma_0 \in [0.3412, \sqrt{2} - 1)$ води до доказателството за несъществуване за всяко $\gamma \in [0.3412, \gamma_0]$.

Случай 1. Съществува поне една специална четворка, която не е ”добра”.

Лема 4.4.2. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн с нечетна мощност $M = (2 + \gamma)n$, за който съществува специална четворка, която не е ”добра”, то $\gamma \geq \sqrt{2} - 1$ за всички достатъчно големи n .

Доказателство. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн с нечетна мощност $M = (2 + \gamma)n$, за който съществува поне една специална четворка, която не е ”добра”, т.е. $t_2(z) > \alpha_0$. Съгласно асимптотичния аналог на Лема 4.1.4 намираме по-добра горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$f(t) = (\rho_0|C| - 1)f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

След това извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C

$$C_x(h) := h_0|C| - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(L_{3,|C|-1}(x)) < 0.$$

Възможно е да имаме $C_x(h) \geq 0$. Тогава продължаваме със съответната рекурсивна процедура. За $\gamma = \sqrt{2} - 1$ след пет стъпки получаваме $C_x(h) < 0$, а съгласно Забележка 4.4.1 и за всяка стойност на γ от интервала $[0.3412, \sqrt{2} - 1)$ след най-много пет стъпки получаваме $C_x(h) < 0$, което доказва твърдението. $\square$

Случай 2. Всички специални четворки са ”добри”, т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки от разглеждания вид.

Лема 4.4.3. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн с нечетна мощност $M = (2 + \gamma)n$, за който всички специални четворки са ”добри”, то $\gamma \geq 0.3925$ за всички достатъчно големи n .

Доказателство. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн с нечетна мощност $M = (2 + \gamma)n$, за който всички специални четворки са ”добри”. Сега сме в ситуацията от (3.5.1) и условията на Теорема 3.5.10 и Следствие 3.5.11 при $\tau = 3$. Съгласно тези твърдения,

съществува или x -”добра” специална четворка, или z -”добра” специална четворка точки.

Ще разгледаме само Случай 2.1, т.е. за C съществува x -”добра” специална четворка. В Случай 2.2 (когато съществува z -”добра” специална четворка) се работи по аналогичен начин на описания в §4.1 метод.

Нека $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ и $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) := \alpha_0 \approx -\frac{1}{1+\gamma}$. Горната граница за $t_2(z)$ използваме, за да получим нова долна граница $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$, като приложим съответния асимптотичен аналог на Лема 4.1.6. Имаме границата

$$t_3(z) \geq L_{3,3}(z) \approx -\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2[\gamma + 3U_{3,1}^2(z) - 4U_{3,1}^4(z)] - 1}}{1+\gamma}.$$

С нейна помощ и полинома $f(t) = (t - L_{3,3}(z))g(t)$ получаваме нова горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$ (асимптотичен аналог на Лема 4.1.7), където $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z)).$$

Извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C

$$C_x(h) := h_0|C| - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{3,|C|-1}(x)) < 0.$$

Ако $C_x(h) \geq 0$, продължаваме със съответната рекурсивна процедура. Този подход дава резултат за несъществуване за $\gamma = 0.3549$ (следователно и за всички стойности на $\gamma \in [0.3412, 0.3549]$), а за $\gamma \in (0.3549, \sqrt{2} - 1)$ процедурата изглежда е сходяща и дава граници за съответните скалярни произведения. Затова продължаваме с по-прецизен анализ на разположението на скаларното произведение $t_2(z)$ относно параметъра α_0 .

Случай 2.1.1. Нека за x -”добрата” специална четворка от C имаме $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$, където ε е положително число, такова че $t_1(z) \leq U_{3,1}(z) \leq \alpha_0 - \varepsilon$. Тогава прилагаме съответните асимптотични аналози на Лемите 4.1.9-4.1.10 като за разглежданите стойности $\gamma \in [0.3549, \sqrt{2} - 1)$ намираме подходящото $\varepsilon > 0$, с помощта на което намираме нова по-добра граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$, където $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(\alpha_0 - \varepsilon) - f(L_{3,|C|-1}(z))$$

и извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C

$$C_x(h) := h_0|C| - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2\alpha_0^2 - 1) - h(L_{3,|C|-1}(x)) < 0.$$

Ако $C_x(h) \geq 0$, продължаваме със съответната рекурсивна процедура, с която след определен брой стъпки получаваме $C_x(h) < 0$, което доказва несъществуването на 3-дизайни с тези параметри при условие, че за x -”добрата” специална четворка от C имаме $t_2(z) \in [\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$.

Случай 2.1.2. Нека за x -”добрата” специална четворка от C имаме $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$, където $\varepsilon > 0$ е същото, както в Случай 2.1.1. Тогава имаме $t_2(z) \leq U_{3,2}(z) = \alpha_0 - \varepsilon \approx -\frac{1}{1+\gamma} - \varepsilon$. Тази горна граница за t_2 използваме, за да получим по-добра долна граница $t_3(z) \geq L_{3,3}(z)$ като приложим съответния асимптотичен аналог на Лема 4.1.11. С нейна помощ и полинома $f(t)$ получаваме нова горна граница $t_1(z) \leq U_{3,1}(z)$ (асимптотичен аналог на Лема 4.1.12), където $U_{3,1}(z)$ е най-малкият корен на уравнението

$$2f(t) = \rho_0|C|f(\alpha_0) - f(L_{3,|C|-1}(z))$$

и извършваме проверка по x за съществуване на дизайна C

$$C_x(h) := h_0|C| - h(1) - 2h(U_{3,2}(x)) - h(2(\alpha_0 - \varepsilon)^2 - 1) - h(L_{3,|C|-1}(x)) < 0.$$

Ако $C_x(h) \geq 0$, продължаваме със съответната рекурсивна процедура, с помощта на която за всяко $\gamma \in [0.3412, 0.3925]$ след определен брой стъпки получаваме $C_x(h) < 0$, което доказва несъществуването на 3-дизайни с тези параметри при условие, че за x -”добрата” специална четворка от C имаме $t_2(z) \in [t_1(z), \alpha_0 - \varepsilon]$. Най-голямата стойност на γ , за която горният подход работи, е $\gamma = 0.3925$, като тогава $\varepsilon = 0.0743$. Да отбележим, че при тази стойност на ε се доказва несъществуване и за всички стойности на $\gamma \in [0.3412, 0.3925]$ (виж Забележка 4.4.1).

С аналогични разсъждения, в другия възможен случай (Случай 2.2), когато съществува z -”добра” специална четворка, т.е. $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$, прилагаме аналогичен на описания в §4.1 метод и получаваме резултати за несъществуване отново за $\gamma \in [0.3412, 0.3925]$. С това доказателството на Лемата е завършено. $\square$

Теорема 4.4.4. *Имаме*

$$B_{\text{odd}}(n, 3) \gtrsim 2.3925n,$$

т.е. $\gamma \geq 0.3925$.

Доказателство. Твърдението следва от Лема 4.4.2 и Лема 4.4.3 и доказателствата им. Наистина, (както отбелязахме в Забележка 4.4.1) всички получени в тези леми граници са монотонни, като долните граници са монотонно растящи, а горните са монотонно намаляващи. От своя страна функционалите $C_x(h)$ и $C_z(h)$ също са намаляващи. Следователно, доказателство за несъществуване за някое $\gamma_0 \in [0.3412, \sqrt{2} - 1]$ води до доказателството за несъществуване за всяко $\gamma \in [0.3412, \gamma_0]$.

Друго доказателство на Леми 4.4.2 и 4.4.3 може да се извърши и по следния начин. Ако имаме експлицитна формула за проверките $C_x(h)$ и $C_z(h)$, то за да докажем, че $C_x(h) = F(\gamma) < 0$ за $\gamma \in [a, b]$, пресмятаме $F(\gamma)$ в точките $\gamma_j = a + j\xi$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\xi = (b - a)/N$. Да допуснем, че $F(\gamma_j) < \varepsilon < 0$ за всяко j . Тогава за всяко $\gamma \in [a, b]$, имаме някое γ_j такова, че $|\gamma_j - \gamma| < \xi/2$. Тъй като производната $F'(\gamma)$ е непрекъснатата функция в $[a, b]$, то съществува положителна константа A , такава, че $|F'(\gamma)| \leq A$ за всяко $\gamma \in [a, b]$. Избираме достатъчно голямо N такова, че $\xi \leq \frac{|\varepsilon|}{A}$. Тогава имаме $|F(\gamma) - F(\gamma_j)| = |F'(\eta)||\gamma - \gamma_j| \leq \frac{|\varepsilon|}{2}$ откъдето получаваме

$F(\gamma) < \varepsilon/2 < 0$, което е достатъчно за нашето доказателство. Ние имаме направени такива доказателства с всички необходими пресмятания за $a = 0.3412$, $b = 0.3925$ и $\xi = 0.01$. $\square$

Получената нова долна граница за $\gamma \geq 0.3925$ съответства на $\rho_0|C| \gtrsim 2.7$, което се съгласува добре на получените резултати за малките размерности в §4.1.

Да отбележим, че ако $\gamma \in (0.3925, \sqrt{2} - 1)$ имаме получени някои нови граници. Например, за да съществува 3-дизайн с нечетна мощност, всички специални четворки в него трябва да са ”добри”, т.е. трябва да е изпълнено неравенството $t_2(z) \leq \alpha_0$ за всички специални четворки.

Тази глава е написана въз основа на [19], [20], [21], [22] и [23].

Глава 5

Радиус на покритие за сферични дизайни

В тази глава с полиномиални техники са получени горни граници (в терминологията на скаларни произведения) за радиуса на покритие на сферични дизайни при фиксирани размерност n , сила на дизайна τ и мощност $M = |C|$. Не ни е известно да са получавани други горни граници за радиуса на покритие, но Фазекаш-Левенщейн [45] получават долни граници, които зависят само от размерността и силата.

5.1 Нови граници за радиуса на покритие на сферични дизайни

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код.

Дефиниция 5.1.1. Радиус на покритие на сферичен код C наричаме числото

$$r(C) = \max_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \min_{x \in C} \{d(x, y)\}.$$

Изследването на величината $r(C)$ е еквивалентно на изследване на

$$t_c = 1 - \frac{r^2(C)}{2} = \min_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \max_{x \in C} \{\langle x, y \rangle\}.$$

Получаването на общи граници, зависещи от размерността n и мощността $|C|$, предполага налагане и на други ограничения. В специалния случай, когато C е τ -дизайн, се оказва възможно получаването на добри долни и горни граници за t_c (разбира се, за нас е по-удобно да работим с t_c вместо с $r(C)$). По-нататък за удобство ще наричаме t_c също радиус на покритие. Ще изследваме следния проблем.

Проблем 5.1.2. При фиксирани n , M и τ , да се намерят граници за t_c , които да са в сила за всички τ -дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с мощност $|C| = M$.

Когато кодът C е зададен (например чрез координатите на точките му), са разработени доста добри програмни средства за намиране на радиусът на покритие. В повечето случаи тези методи използват клетките на Вороной за съответния код или триангулация на Делоне.

Фазекаш и Левенщейн [45, Теорема 2] получиха следните долни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни.

Теорема 5.1.3. [45, Теорема 2] Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k - \varepsilon)$ -дизайн, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, то

$$t_c \geq t_\tau^{(FL)} = t_k^{0,1-\varepsilon}, \quad (5.1.1)$$

където $t_k^{0,1-\varepsilon}$ е най-големият корен на полинома на Якоби $P^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\beta = \frac{n-3}{2}$, $\alpha = \frac{n-3}{2} + 1 - \varepsilon$.

Например, имаме $t_c \geq t_4^{(FL)} = \frac{1+\sqrt{n+3}}{n+2}$ за всеки 4-дизайн върху $\mathbb{S}^{n-1}$ и $t_c \geq t_5^{(FL)} = \sqrt{\frac{3}{n+2}}$ за всеки 5-дизайн върху $\mathbb{S}^{n-1}$. Границата (5.1.1) се достига тогава и само тогава, когато C е плътен $(2k)$ -дизайн. Такива дизайни могат да съществуват само за $k = 1$ и $k = 2$, като плътни 2-дизайни съществуват за всяка размерност n , а при $n \geq 3$ са известни само два плътни 4-дизайна. По-точно, $n = (2m + 1)^2 - 3$ е необходимо условие за съществуване на плътни 4-дизайни и примери са известни само за $m = 1$ и $m = 2$ (виж [9]).

Границите на Фазекаш-Левенщейн са в сила, разбира се, и за антиподални дизайни. Нещо повече, тези граници могат да се получат като следствие от съответните граници за реалното проективно пространство $\mathbb{PR}^{n-1}$ (получени също от Фазекаш-Левенщейн в [45, Теорема 2]), тъй като e -дизайните в $\mathbb{PR}^{n-1}$ са антиподални $(2e + 1)$ -дизайни върху $\mathbb{S}^{n-1}$.

Да отбележим, че границите на Фазекаш-Левенщейн зависят само от размерността n и силата на дизайна τ . Получените в тази глава горни граници зависят и от мощността на разглеждания дизайн $|C|$.

Оттук нататък ще предполагаме, че $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ е точката (една от точките), за която радиуса на покритие се реализира, т.е. съществува точка $x \in C$ такава, че

$$\langle x, y \rangle = \min_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \max_{x \in C} \{\langle x, y \rangle\}.$$

Да напомним означението

$$I(y) = \{\langle x, y \rangle : x \in C\} = \{t_1(y), t_2(y), \dots, t_{|C|}(y)\},$$

където $-1 \leq t_1(y) \leq t_2(y) \leq \dots \leq t_{|C|}(y) < 1$, за съответното за точката y мултимножество (съгласно Дефиниция 1.6.6) от скалярни произведения. За антиподални дизайни имаме $I(y) = I(-y) = -I(y)$. За краткост ще бележим $t_i(y) = t_i$.

Лема 5.1.4. *Ако y е точка от $\mathbb{S}^{n-1}$, където радиуса на покритие се достига, то*

$$t_{|C|} = t_{|C|-1} = \cdots = t_{|C|-n+1} = t_c.$$

Ако C е антиподаден дизайн, тогава освен горните равенства имаме още и равенствата

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = -t_c.$$

Доказателство. Ясно е, че точката y е център на сферична шапка, съответна на една от $(n-1)$ -мерните стени от изпъкналата обвивка на C . Тъй като тази шапка има поне n върха, то първите равенства в лемата са изпълнени. Вторите следват от $I(y) = -I(y)$ за антиподаден дизайн C . $\square$

Като приложим Лема 5.1.4 в равенството (1.6.3) за y , дизайн C и полином $f(t)$ от степен $\deg(f) \leq \tau(C)$, имаме

$$nf(t_c) + \sum_{i=1}^{|C|-n} f(t_i) = f_0|C|. \quad (5.1.2)$$

Ако C е антиподаден дизайн и $f(t)$ е четна функция, тогава (5.1.2) приема вида

$$2nf(t_c) + \sum_{i=n+1}^{|C|-n} f(t_i) = f_0|C|. \quad (5.1.3)$$

Ще прилагаме равенствата (5.1.2) и (5.1.3) с подходящо избрани полиноми с цел получаването на граници за t_c . Считаме за уместно тези граници също да се наричат граници на линейното програмиране.

Да означим

$$\begin{aligned} P_\tau^+ &= \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(f) \leq \tau, f(t) \geq 0 \text{ за всяко } t \in [-1, 1], \\ &\quad f(t) \text{ е растяща функция в } (t_\tau^{(FL)}, 1) \text{ и } f'(t) \neq 0\}, \\ P_\tau^{+,even} &= \{f(t) \in P_\tau^+ : f(t) \text{ е четна функция}\}. \end{aligned}$$

Теорема 5.1.5. *(Горни граници на линейното програмиране за радиуса на покритие на сферични дизайни) За всеки сферичен τ -дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ имаме*

$$t_c \leq t_\tau^{(up)} = \inf\{m_f : f(t) \in P_\tau^+\}.$$

където m_f е най-големият корен на уравнението $nf(t) = f_0|C|$.

Доказателство. От условието на теоремата за всеки полином $f(t) \in P_\tau^+$ имаме $f(t_i) \geq 0$ за $1 \leq i \leq |C| - n$. От Лема 5.1.4 следва, че $f(t_i) = f(t_c)$ за $|C| - n + 1 \leq i \leq |C|$. Тогава посредством равенството (5.1.2) получаваме

$$f_0|C| = \sum_{i=1}^{|C|} f(t_i) = \sum_{i=1}^{|C|-n} f(t_i) + nf(t_c) \geq nf(t_c).$$

Сега твърдението следва от факта, че $f(t)$ е растяща функция в интервала $(t_\tau^{(FL)}, 1)$.
□

Теорема 5.1.6. (Горни граници на линейното програмиране за радиуса на покритие на антиподални сферични дизайни) За всеки антиподален сферичен τ -дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ имаме

$$t_c \leq t_\tau^{(up)} = \inf\{m_f : f(t) \in P_\tau^{+, even}\}.$$

където m_f е най-големият корен на уравнението $2nf(t) = f_0|C|$.

Доказателство. Аналогично на Теорема 5.1.6. □

Следващата теорема дава ограничения и информация за вида на полиномите, с чиято помощ могат да се получават горните граници от Теорема 5.1.5.

Теорема 5.1.7. Инфимумът в Теорема 5.1.5 се достига от полиноми $f(t) = (t + 1)^\varepsilon A^2(t)$, където $\tau = 2k - \varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\deg(A) = k - \varepsilon$ и полиномът $A(t)$ има $k - \varepsilon$ корена в интервала $[-1, t_\tau^{(FL)}]$.

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. нека инфимумът се достига за полином $f(t) = C(t)D(t)$, където $C(t) = A^2(t)$ или $A^2(t)(t + 1)$ и $D(t)$ няма корени в интервала $[-1, 1]$ ($\deg(A) \geq 0$, $\deg(D) > 0$). Тогава съществува достатъчно малко положително число ξ , такова, че $g(t) = C(t)(D(t) - \xi) \geq 0$ за $t \in [-1, 1]$.

Да означим с $t_1^{(u)}$ и $t_2^{(u)}$ най-големите корени съответно на уравненията $nf(t) = f_0|C|$ и $ng(t) = g_0|C|$. Ще покажем, че съществува ξ , за което $t_2^{(u)} < t_1^{(u)}$, т.е. използването на полинома $g(t)$ дава по-добра горна граница за t_c . Последното е в противоречие с нашето допускане и с това теоремата ще е доказана.

Тъй като производната на $g(t)$ е $g'(t) = f'(t) - \xi(C(t))' > 0$ за всяко $t \in [t_\tau^{(FL)}, 1]$, то за достатъчно малко фиксирано ξ имаме, че $g(t)$ е строго растяща в същия интервал. Следователно имаме $g(t) \in P_\tau^+$. Тогава неравенството $t_2^{(u)} < t_1^{(u)}$ следва от $g(t_2^{(u)}) < g(t_1^{(u)})$ и е достатъчно да докажем последното неравенство.

$$\text{Тъй като } g(t_2^{(u)}) = \frac{g_0|C|}{n} \text{ и}$$

$$g(t_1^{(u)}) = f(t_1^{(u)}) - \xi C(t_1^{(u)}) = \frac{f_0|C|}{n} - \xi C(t_1^{(u)}),$$

неравенството $g(t_2^{(u)}) < g(t_1^{(u)})$ е еквивалентно на

$$\xi C(t_1^{(u)}) < \frac{|C|}{n}(f_0 - g_0) = \xi \frac{c_0|C|}{n},$$

където $c_0 = c_n \int_{-1}^1 C(t)(1 - t^2)^{(n-3)/2} dt > 0$ е първият коефициент в разлагането на полинома $C(t)$ по полиномите на Гегенбауер. Следователно трябва да докажем, че

$$C(t_1^{(u)}) < \frac{c_0|C|}{n}.$$

Нека $t_3^{(u)}$ е най-големият корен на уравнението $nC(t) = c_0|C|$. Тъй като $C(t) \in P_\tau^+$ имаме $t_3^{(u)} \geq t_1^{(u)}$. Тогава

$$C(t_1^{(u)}) \leq C(t_3^{(u)}) = \frac{c_0|C|}{n},$$

като случаят на равенство също доказва твърдението на теоремата. $\square$

В следващата част на настоящата глава за някои конкретни малки стойности на τ ще бъдат намерени оптималните полиноми $A(t)$ и съответните горни граници получени с помощта на тези полиноми при прилагането на Теорема 5.1.5.

Горните граници за t_c могат да бъдат използвани за намиране на горни граници за t_1 при $\tau = 2k$.

Теорема 5.1.8. *Нека C е $(2k)$ -дизайн, а $f(t) = (t-t_1)A^2(t)(t-t_{2k}^{(up)})$, където $\deg(A) = k-1$ и полинома $A(t)$ има $k-1$ корена в интервала $[t_1, t_{2k}^{(up)}]$. Тогава*

$$t_1 \leq t_1^{(up)},$$

където $t_1^{(up)}$ е най-малкият корен на уравнението $f_0 = 0$.

Доказателство. За полинома $f(t)$ имаме $f(t_i) \leq 0$ за $1 \leq i \leq |C|$. От равенството (5.1.2), приложено за точката y , дизайн C и полинома $f(t)$ получаваме

$$f_0|C| = \sum_{i=1}^{|C|} f(t_i) \leq 0.$$

Откъдето $f_0 \leq 0$. Това е линейно неравенство относно t_1 и след решаването му получаваме неравенство от вида $t_1 \leq F$, където F е функция на корените на полинома $A^2(t)$. След оптимизиране по параметрите на дясната страна F получаваме търсената горна граница. $\square$

По-долу ще приложим Теорема 5.1.8 за 4-дизайни и при конкретни параметри ще бъдат намерени съответните граници $t_1 \leq t_1^{(up)}$.

5.2 Приложения

В тази част са намерени оптималните за Теорема 5.1.5 полиноми $A(t)$ и с тях са получени съответните горни граници $t_c \leq t_\tau^{(up)}$ за 3-, 4- и 5-дизайни и за антиподални 3- и 5-дизайни. Освен това за 4-дизайни са намерени съответните граници $t_1 \leq t_1^{(up)}$ съгласно Теорема 5.1.8. Накрая за $n = 3$, $\tau = 4$ и $|C| = 10$ (първия отворен случай) са намерени и други граници, в частност е подобрена границата на Фазекаш-Левенщейн.

5.2.1 Границите $t_\tau^{(up)}$ за $\tau = 3, 4, 5$.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 3-дизайн. Съгласно Теорема 5.1.7 трябва да разгледаме полинома $f(t) = (t+1)(t-a)^2$ от трета степен с един двукратен корен $a \in [-1, t_3^{(FL)}]$, като търсим оптималната стойност на параметъра a . За целта решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$f(t) - \frac{f_0|C|}{n} = 0 \iff t^3 + (1-2a)t^2 + a(a-2)t + a^2 - \frac{(na^2 - 2a + 1)|C|}{n^2} = 0$$

да е възможно най-малък.

С помощта на формулите на Кардано намираме реалния корен $m(a)$ на горното уравнение, който е функция на a . Оптималната стойност a_0 на параметъра a избираме измежду реалните решения на уравнението $\frac{d}{da}m(a) = 0$ така, че $a_0 \leq t_3^{(FL)}$. Тогава след заместване на a_0 в $m(a)$ получаваме търсената граница $t_3^{(up)} = m(a_0)$ и численото ѝ пресмятане при фиксирани n и $|C|$ не е проблем.

В Таблица 5.1 са дадени някои стойности на $t_3^{(FL)}$ и $t_3^{(up)}$ при фиксирани размерност n и мощност $|C|$. Пресмятанията в тази глава са извършени с Maple, като числовите резултати са апроксимирани, като долните граници са ”отрязани”, а горните граници са закръглени нагоре и числата са записани до шестата цифра след десетичната запетая.

Размерност n	Мощност $M = C $	Граница $t_3^{(FL)}$	Граница $t_3^{(up)}$
3	9	0.577350	0.735671
5	13	0.447213	0.533563
7	17	0.37796	0.434223
11	27	0.301511	0.350778
12	29	0.288675	0.332614
15	37	0.258198	0.302494
16	39	0.250000	0.290674
17	41	0.242535	0.280063
19	47	0.229415	0.270017
20	49	0.223606	0.261538

Таблица 5.1. Стойности на $t_3^{(FL)}$ и $t_3^{(up)}$ за всички отворени (след резултатите в Глава 4) случаи на 3-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 20$.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн. Съгласно Теорема 5.1.7, оптималният полином е от вида $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ с два двукратни корена в интервала $[-1, t_4^{(FL)}]$,

т.е $f(t) = (t^2 + at + b)^2 = (t - a_1)^2(t - a_2)^2$ и $-1 \leq a_1 \leq a_2 \leq t_4^{(FL)}$. За да намерим оптималните стойности на параметрите a и b , решаваме следната задача: най-големият корен на уравнението

$$f(t) - \frac{f_0|C|}{n} = 0 \iff (t^2 + at + b)^2 - \frac{|C|}{n} \left(b^2 + \frac{a^2 + 2b}{n} + \frac{3}{n(n+2)} \right) = 0$$

да е възможно най-малък.

След решаването на последното уравнение получаваме

$$t_c \leq m(a, b) = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4b + \frac{4}{n} \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{n+2}}},$$

и трябва да минимизираме функцията $m(a, b)$.

Оптималните стойности на a и b са измежду реалните решения на системата

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} m(a, b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} m(a, b) = 0 \end{cases},$$

която е еквивалентна на

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - 4b + \frac{4}{n} \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{n+2}}} = a \left(1 + \frac{2|C|}{n \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{n+2}}} \right) \\ \sqrt{\frac{|C|[3 + (a^2 + 2b)(n+2) + b^2n(n+2)]}{(n+2)}} = \frac{|C|(nb+1)}{n} \end{cases}.$$

Заместваме лявата страна на второто уравнение в първото и след преобразувания получаваме

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - 4b + \frac{4|C|(nb+1)}{n^2}} = \frac{a(nb+3)}{nb+1} \\ a^2 = \frac{|C|(nb+1)^2}{n^2} - \frac{3}{n+2} - b(nb+2) \end{cases}.$$

Сега заместваме a^2 в първото уравнение и след алгебрични преобразувания получаваме, че оптималната стойност на b е

$$b_0 = \frac{3n(n+1) - (n+2)|C| + \sqrt{n(n-1)[2(n+2)|C| - 3n(n+3)]}}{n(n+2)(|C| - 2n)},$$

(взет е коренът с $+$ тъй като параметрите a и b трябва да бъдат избрани така, че полиномът $f(t) = (t^2 + at + b)^2$ да има два двукратни корена в интервала $[-1, t_4^{(FL)}]$). Тогава за оптималната стойност на параметъра a получаваме

$$a_0 = \frac{1}{(n+2)(|C| - 2n)} \sqrt{\frac{2(n-1)[n(2n+1)|C| - 3n^2(n+1) + (|C| - n)\sqrt{A}]}{n}},$$

където $A = n(n-1)[2(n+2)|C| - 3n(n+3)]$.

След заместване на a_0 и b_0 в $m(a, b)$ получаваме аналитичен вид $t_4^{(up)} = m(a_0, b_0)$ на границата.

Теорема 5.2.1. *За всеки сферичен 4-дизайн C имаме*

$$t_c \leq t_4^{(up)} = \frac{B\sqrt{2(n|C|(2n+1) - 3n^2(n+1) + (|C| - n)\sqrt{A})}}{2n(n+2)(|C| - 2n)},$$

където

$$B = \sqrt{2(n+2)|C| - 3n(n+3)} - \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{\frac{A}{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)},$$

$$A = n(n-1)[2(n+2)|C| - 3n(n+3)].$$

Нека a_1 и a_2 са корени на уравнението $t^2 + a_0t + b_0 = 0$. Съгласно Теорема 5.1.8 приложена за дизайна C , точката y и полинома $f(t) = (t - t_1)(t - a_2)^2(t - t_4^{(up)})$, (тук a_2 се оказва оптимална за подхода стойност) получаваме съответните горни граници $t_1 \leq t_1^{(up)}$. Да отбележим, че $t_1^{(up)} = a_1$.

В Таблица 5.2 по-долу са дадени някои стойности на $t_1^{(up)}$, $t_4^{(FL)}$ и $t_4^{(up)}$ при фиксирани размерност n и мощност $|C|$.

Да отбележим, че в размерност $n = 3$ съществуват безброй много 4-дизайни с 12 точки [49]. За тях имаме $t_4^{(FL)} = \frac{1+\sqrt{6}}{5} \approx 0.689897 \leq t_c \leq t_4^{(up)} = \frac{\sqrt{8+3\sqrt{11}(\sqrt{66}-\sqrt{6})}}{30} \approx 0.801385$. Всички те са получени от икосаедъра, който е антиподаден 5-дизайн и радиусът му на покритие е 0.794654.

Размерност n	Мощност $ C $	Горна граница $t_1 \leq t_1^{(up)}$	Долна граница $t_4^{(FL)}$	Горна граница $t_4^{(up)}$
3	10	-0.798473	0.689897	0.754443
3	11	-0.770040	0.689897	0.779321
4	15	-0.724301	0.607625	0.691776
4	16	-0.707107	0.607625	0.707107
5	21	-0.659209	0.546918	0.650237
5	22	-0.649141	0.546918	0.660385
6	28	-0.605324	0.500000	0.619779
6	29	-0.599163	0.500000	0.626897
7	36	-0.560861	0.462475	0.595965
7	37	-0.556886	0.462475	0.601191
8	45	-0.523771	0.431662	0.576523
8	46	-0.521081	0.431662	0.580499
9	55	-0.492407	0.405827	0.560154
9	56	-0.490511	0.405827	0.563267
10	66	-0.465531	0.383795	0.546055
10	67	-0.464147	0.383795	0.548551

Таблица 5.2. Стойности на $t_1^{(up)}$, $t_4^{(FL)}$ и $t_4^{(up)}$ за размерности $3 \leq n \leq 10$ и първите две възможни стойности на $|C|$ във всяка размерност

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 5-дизайн. Съгласно Теорема 5.1.7 разглеждаме полинома $f(t) = (t+1)(t-a)^2(t-b)^2$ с два двукратни корена a и $b \in [-1, t_5^{(FL)}]$, като търсим оптималните стойности на параметрите a и b . С помощта на Maple намираме оптималните стойности на a и b такива, че най-големият корен на уравнението $f(t) = \frac{f_0|C|}{n} \iff$

$$\begin{aligned} t^5 &+ (1-2a-2b)t^4 + (a(a-2) - 2(1-2a)b + b^2)t^3 + \\ &+ (a^2 - 2a(a-2)b + (1-2a)b^2)t^2 - 2ab(a - (a-2)b)t + a^2b^2 - \\ &- \frac{|C|[3(1-2a-2b) + (a^2 - 2a(a-2)b + (1-2a)b^2)(n+2) + a^2b^2n(n+2)]}{n^2(n+2)} = 0. \end{aligned}$$

да е възможно най-малък.

Аналитичният вид на получената граница $t_5^{(up)}$ е твърде сложен, но численото ѝ пресмятане не е проблем.

В Таблица 5.3 са дадени някои стойности на $t_5^{(FL)}$ и $t_5^{(up)}$ при фиксирани размерност n и мощност $|C|$.

Размерност n	Мощност $ C $	Долна граница $t_5^{(FL)}$	Горна граница $t_5^{(up)}$
3	15	0.774596	0.849828
3	16	0.774596	0.863706
4	23	0.707106	0.785215
4	24	0.707106	0.793867
5	34	0.654653	0.747746
5	36	0.654653	0.758778
6	46	0.612372	0.714121
6	48	0.612372	0.721970
7	60	0.577350	0.687940
7	62	0.577350	0.693752
8	76	0.547722	0.666619
8	78	0.547722	0.671067
9	94	0.522232	0.648694
9	96	0.522232	0.652192
10	114	0.500000	0.633267
10	116	0.500000	0.636078

Таблица 5.3. Стойности на $t_5^{(FL)}$ и $t_5^{(up)}$ за размерности $3 \leq n \leq 10$ и първите две стойности на $|C|$ във всяка размерност

5.2.2 Границите $t_3^{(up)}$ и $t_5^{(up)}$ за антиподални дизайни

Структурата на антиподалните 5-дизайни е изучавана по-рано и от други автори. Резник [70] доказва несъществуването на антиподални 5-дизайни с $n^2 + n + 2$ точки. Бойваленов-Данев-Никова [28] получиха ограничения върху структурата на антиподални 5-дизайни с $n^2 + n + 4$ точки.

В тази част ще разгледаме задачата за получаване на горни граници за t_c за антиподални 3- и 5-дизайни.

Да напомним, че за антиподални дизайни от Лема 5.1.4 имаме

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = -t_c.$$

Следващата теорема намира точния порядък на t_c за антиподални 3-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с $|C| = n(2 + \gamma)$ точки, където $\gamma = \text{const}$.

Теорема 5.2.2. *Ако C е антиподален 3-дизайн, то*

$$t_3^{(FL)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq t_c \leq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{|C|}{2}}.$$

Доказателство. Използваме $f(t) = t^2 \in P_{\tau}^{+, \text{even}}$ в Теорема 5.1.6 в случая на антиподални 3-дизайни. Тогава $f_0 = \frac{1}{n}$ и от равенство (5.1.3) получаваме горна граница, равна на най-големия корен на уравнението $t^2 = \frac{|C|}{2n^2}$. $\square$

Да отбележим, че при $|C| = n(2 + \gamma)$, където $\gamma > 0$ е константа, границата от Теорема 5.2.2 се записва във вида

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq t_c \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2 + \gamma}{2}}.$$

Тези граници съвпадат (и се достигат едновременно) при $\gamma = 0$, т.е. за биортогоналните кодове.

Теорема 5.2.3. *Ако C е антиподален 5-дизайн, тогава*

$$t_5^{(FL)} = \left(\frac{3}{n+2} \right)^{1/2} \leq t_c \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)(|C| - 2n)}{n(n+2)}} \right)^{1/2}.$$

Доказателство. Нека C е антиподален 5-дизайн. Разглеждаме полинома $f(t) = (t^2 - a)^2 \in P_{\tau}^{+, \text{even}}$, където оптималната стойност на $a \in [-t_5^{(FL)}, t_5^{(FL)}]$ ще бъде определена по-долу. Имаме $f(t_i) \geq 0$ за $n+1 \leq i \leq |C| - n$. Прилагаме равенството (5.1.3) за C , y и полинома $f(t)$ и получаваме

$$2nf(t_c) = n[f(t_c) + f(-t_c)] \leq f_0|C| = \left(a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{3}{n(n+2)} \right) |C|.$$

Тъй като $f(t)$ е неотрицателна и растяща функция в интервала $[t_5^{(FL)}, +\infty)$, това води до

$$t_c^2 \leq a + \sqrt{\left(a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{3}{n(n+2)}\right) \frac{|C|}{2n}}.$$

Дясната страна е функция на a и след оптимизация по a намираме, че тя има най-малка стойност при $a = \frac{1}{n} - 2\sqrt{\frac{n-1}{n(n+2)(|C|-2n)}}$, с която получаваме и търсената граница. $\square$

Да отбележим, че за разлика от Теорема 5.2.2, за антиподални 5-дизайни не получаваме точния порядък на t_c – той е между $n^{-1/2}$ и $n^{-1/4}$.

За антиподалните 5-дизайни с $n^2 + n + 4$ точки (изследвани от Бойваленков-Данев-Никова), от Теорема 5.2.3 получаваме

$$t_c \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sqrt{\frac{(n-1)(n^2-n+4)}{n(n+2)}} \right)^{1/2}.$$

5.2.3 Върху 4-дизайна с 10 точки в размерност $n = 3$

Фактът, че повечето от известните сферични дизайни имат нетривиална група от симетрии ни дава основание да предполагаме, че в някои случаи може да е в сила равенството $t_{|C|-n} = t_c$. От друга страна е ясно, че това равенство трудно ще бъде изпълнено за дизайни в малки размерности и с малки мощности. Използвайки лека модификация на Теорема 5.1.5 можем да получим горни граници $t_{|C|-n} \leq m'$ такива, че $m' < t_\tau^{(FL)} \leq t_c$.

Теорема 5.2.4. Нека $\tau = 2k - \varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ и $f(t) = (t+1)^\varepsilon A^2(t)$, където $\deg(A) = k - \varepsilon$ и полинома $A(t)$ има $k - \varepsilon$ корена в интервала $[-1, t_{|C|-n}]$. Тогава

$$t_{|C|-n} \leq m',$$

където m' е най-големият корен на уравнението $f(t) = f_0|C| - nf(t_{FL})$.

Доказателство. Както в доказателството на Теорема 5.1.5, за полинома $f(t)$ имаме $f(t_i) \geq 0$ за $1 \leq i \leq |C| - n - 1$ и $f(t_c) \geq f(t_\tau^{(FL)})$. Тогава от равенството (5.1.2), приложено за точката y , дизайн C и полинома $f(t)$ получаваме

$$f(t_{|C|-n}) \leq f_0|C| - nf(t_c) \leq f_0|C| - nf(t_\tau^{(FL)}).$$

Сега твърдението следва от факта, че функцията $f(t)$ расте в $[t_{|C|-n}, +\infty)$. $\square$

Ако за намерените в Теорема 5.2.4 граници $t_{|C|-n} \leq m'$ получим, че $m' < t_\tau^{(FL)}$ е възможно да подобрим долните граници на Фазекаш-Левенщайн в тези случаи.

Теорема 5.2.5. Нека $\tau = 2k - \varepsilon$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ и $f(t) = (t + 1)^{1-\varepsilon} A^2(t)(t - m')$, където $\deg(A) = k - 1$ и полинома $A(t)$ има $k - 1$ корена в интервала $[-1, m']$. Тогава

$$t_c \geq m_1,$$

където m_1 е най-големият корен на уравнението $nf(t) = f_0|C|$.

Доказателство. От Теорема 5.2.4 имаме, че $f(t_i) \leq 0$ за $1 \leq i \leq |C| - n$. Тогава равенството (5.1.2) дава $nf(t_c) \geq f_0|C|$, с което твърдението е доказано. $\square$

За 4-дизайна с 10 точки в размерност $n = 3$ от Теорема 5.2.4 и Теорема 5.2.5 получаваме $t_{|C|-n} \leq m' = 0.606255$ и тъй като $m' = 0.606255 < t_4^{(FL)} = 0.689897$ получаваме нова (по-добра от границата на Фазекаш-Левенщейн) долна граница $m_1 = 0.706697 \leq t_c$.

Тази глава е написана въз основа на [35].

Глава 6

Граници за мощността на сферични кодове със скаларни произведения в даден интервал

В тази глава прилагаме полиномиални техники за получаване на горни граници за мощността на сферични кодове със скаларни произведения принадлежащи на фиксиран подинтервал на интервала $[-1, 1)$. Следвайки логиката от ситуацията за интервал $[-1, s]$, са намерени Левенщайн-тип граници и техни подобрения (ако такива са възможни). Освен това са получени общи необходими условия за достигането на тези граници.

6.1 Граници на линейното програмиране за сферични кодове със скаларни произведения в даден интервал

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код, такъв че

$$\langle x, y \rangle \in [a, b] : x, y \in C, x \neq y,$$

където $-1 \leq a < b < 1$. Еквивалентно, всички ненулеви разстояния между точките на кода C принадлежат на $[\sqrt{2(1-b)}, \sqrt{2(1-a)}]$.

Да напомним, че в §1.2 за дадени фиксирани размерност n и интервал $[a, b]$, $-1 \leq a < b < 1$, с $S_n(a, b)$ означихме множеството

$$S_n(a, b) = \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : \langle x, y \rangle \in [a, b], \text{ за } x, y \in C, x \neq y\}.$$

Разглеждаме функцията

$$A(n; a, b) = \max\{|C| : C \subset S_n(a, b)\}.$$

Класическият случай, когато $a = -1$, е дискутиран от редица автори (виж например [57, 58, 38, 44] и цитировките там). В [57] Левенщейн получи универсални граници за такива кодове. Това е една от нашите мотивации да изследваме същия въпрос, но за зададен интервал $[a, b]$, $-1 \leq a < b < 1$.

В сила са следните граници на линейното програмиране за разглежданите кодове $C \in S_n(a, b)$.

Теорема 6.1.1. (*Граници на линейното програмиране за кодове $C \in S_n(a, b)$*) Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти, такъв че:

(A1) $f(t) \leq 0$ за всяко $t \in [a, b]$;

(A2) $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ за $i = 1, 2, \dots, k$, в развитието на f по полиномите на Гегенбауер $f(t) = \sum_{i=0}^k f_i P_i^{(n)}(t)$.

Тогав за мощността на всеки код $C \subset S_n(a, b)$ е налице границата $|C| \leq f(1)/f_0$, т.е. в сила е

$$A(n; a, b) \leq \frac{f(1)}{f_0}.$$

Доказателство. Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$, $C \in S_n(a, b)$ и $f(t)$ удовлетворява условията (A1) и (A2). Тогав лявата страна на (1.4.1) не надминава $|C|f(1)$ поради (A1), а дясната страна е по-голяма или равна от $|C|^2 f_0$ поради (A2). Следователно

$$|C|f(1) \geq |C|^2 f_0,$$

откъдето следва твърдението на теоремата. $\square$

Следвайки логиката в случая на $a = -1$, използваме два типа (добри) полиноми в Теорема 6.1.1. За да получим Левенщейн-тип граници, трябва да открием оптимален полином в на класа полиноми от следния вид

$$F(t) = (t - a)(t - b)A_k^2(t),$$

където $A_k(t)$ е от степен $k \geq 0$ и има k реални корена в $[a, b]$. Коефициентите на $A_k(t)$ се определят при оптимизацията на частното $F(1)/f_0$, съблюдавайки верността на условията от (A2) на Теорема 6.1.1. Това е направено в следващия параграф на тази глава за случаите $k = 0, 1$ и 2 .

В някои случаи можем да подобрим вече намерените граници като използваме полиноми от по-висока степен. Тези подобрения се получават по аналогия на ситуацията при $a = -1$, където Бойваленков-Бумова-Данев доказаха необходими и достатъчни условия за съществуването на такива подобрения на границите на Левенщейн [16].

За тези подобрения се използват полиноми от вида

$$G(t) = (t - a)(t - b)B_\ell^2(t)Q(t),$$

където $\ell = k + 1$, k е същото както за полинома $F(t)$, $B_\ell(t)$ има степен ℓ и ℓ реални корена в $[a, b]$, а $Q(t) = (t - p)^2 + q(a - t)(t - b)$, $0 < q < 1$. Коефициентите на $B_\ell(t)$ и параметрите p и q се определят при оптимизацията на частното $G(1)/f_0$

при изпълнени всички условия от (A2) на Теорема 6.1.1. Това е направено в трети параграф на тази глава за някои конкретни параметри a и b .

6.2 Левенщейн-тип граници за мощността на сферични кодове $C \subset S_n(a, b)$

За $k = 0$ разглеждаме съответно полином $F(t) = (t - a)(t - b)$. В този случай нямаме параметри за оптимизация, но трябва да са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Така получаваме следната горна граница за функцията $A(n; a, b)$.

Теорема 6.2.1. *Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a, b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a, b]$. Нека за полинома $F(t) = (t - a)(t - b)$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата*

$$A(n; a, b) \leq U_2(n; a, b) = \frac{n(1-a)(1-b)}{abn + 1},$$

за всички a, b и n , които удовлетворяват условията $-1 \leq a < b < -\frac{1}{na} < 1$.

Доказателство. За полинома $F(t)$ имаме следното развитие по полиномите на Гегенбауер

$$F(t) = f_0 + f_1 P_1^{(n)}(t) + f_2 P_2^{(n)}(t), \text{ където}$$

$$f_0 = ab + \frac{1}{n}, f_1 = -(a + b) \text{ и } f_2 = \frac{n-1}{n}.$$

За да са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1, трябва $f_0 > 0$, $f_1 \geq 0$ и $f_2 \geq 0$, което е еквивалентно на $-1 \leq a < b < -\frac{1}{na} < 1$.

Тогава прилагайки Теорема 6.1.1 получаваме границата

$$A(n; a, b) \leq U_2(n; a, b) = \frac{F(1)}{f_0} = \frac{n(1-a)(1-b)}{abn + 1}.$$

При това за a и b , такива че $-1 \leq a < b < -\frac{1}{na} < 1$ е налице $U_2(n; a, b) \leq L_2(n, b)$. В частност, при $a = -1$ имаме $U_2(n; a, b) = L_2(n, b)$. $\square$

Аналогично за $k = 1$, използваме полином от вида $F(t) = (t - a)(t - b)(t - \alpha)^2$, като тук трябва да открием оптималната стойност на параметъра α .

Теорема 6.2.2. *Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a, b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a, b]$. Нека за полинома $F(t) = (t - a)(t - b)(t - \alpha)^2$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата*

$$A(n; a, b) \leq U_4(n; a, b) = \frac{n(1-a)(1-b)[3 + (n+2)(abn + ab + 2a + 2b + 1)]}{(n+2)[a^2b^2n - (a-b)^2] - 6ab + 3},$$

където $\alpha = -\frac{3+(n+2)(ab+a+b)}{(n+2)(abn+a+b+1)}$, а за параметрите a, b и n , са изпълнени условията

$$a+b+2\alpha \leq 0, \alpha^2 + 2(a+b)\alpha + ab + \frac{6}{n+4} \geq 0, (a+b)\alpha^2 + 2\alpha(ab + \frac{3}{n+2}) + \frac{3(a+b)}{n+2} \leq 0.$$

Доказателство. За полинома $F(t)$ имаме следното развитие по полиномите на Гегенбауер

$$\begin{aligned} F(t) &= f_0 P_0^{(n)}(t) + f_1 P_1^{(n)}(t) + \dots + f_4 P_4^{(n)}(t), \\ f_4 &= \frac{n^2 - 1}{(n+2)(n+4)}, f_3 = -\frac{(a+b+2\alpha)(n-1)}{n+2}, \\ f_2 &= \frac{(ab + 2(a+b)\alpha + \alpha^2 + \frac{6}{n+4})(n-1)}{n}, \\ f_1 &= -2ab\alpha - (a+b)\alpha^2 - \frac{3(a+b+2\alpha)}{n+2}, \\ f_0 &= ab\alpha^2 + \frac{ab + 2(a+b)\alpha + \alpha^2 + \frac{6}{n+4}}{n} - \frac{3}{(n+4)(n+2)}. \end{aligned}$$

За да са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1, трябва $f_0 > 0$, $f_1 \geq 0$, ... и $f_4 \geq 0$, което е еквивалентно на

$$a+b+2\alpha \leq 0, \alpha^2 + 2(a+b)\alpha + ab + \frac{6}{n+4} \geq 0, (a+b)\alpha^2 + 2\alpha(ab + \frac{3}{n+2}) + \frac{3(a+b)}{n+2} \leq 0.$$

Прилагаме Теорема 6.1.1 като оптимизираме по параметъра α частното $\frac{F(1)}{f_0}$. Оптималната стойност на параметъра α е $\alpha = -\frac{3+(n+2)(ab+a+b)}{(n+2)(abn+a+b+1)}$. Заместваме α в частното $\frac{F(1)}{f_0}$, извършваме някои алгебрични опростявания и получаваме исканата граница.

Да отбележим, че при $a = -1$ имаме $U_4(n; a, b) = L_4(n, b)$. □

Следвайки същия подход в случая $k = 2$ съгласно Теорема 6.1.1 използваме полином от вида $F(t) = (t-a)(t-b)(t^2 + \alpha t + \beta)^2$, където параметрите α и β ще бъдат определени по-долу и ще приемат оптималните за метода стойности.

Теорема 6.2.3. Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a, b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a, b]$. Нека за полинома $F(t) = (t-a)(t-b)(t^2 + \alpha t + \beta)^2$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата

$$A(n; a, b) \leq U_6(n; a, b) = \frac{n(n+2)(1-a)(1-b)A}{2B},$$

където $A = (n+4)[(n+2)(n+3)ab(a+b) + 4(a+b) + 2 - (n-1)(a^2 + b^2) + 8ab] + 3(n+3) + 12(a+b) + 2(2n-1)ab$, $B = 9 + (n+2)[(n+2)(n+4)a^3b^3 + 3(ab - a^2 - b^2)(ab(n+4) + 1)]$, при изпълнени условията (A2).

Доказателство. Извършва се по аналогия на доказателствата на Теорема 6.2.1 и Теорема 6.2.2, но изразите са дълги. С помоща на Maple са извършени нужните пресмятания и оптимизации, които водят до така формулирания резултат. □

Да отбележим, че така получените граници $U_{2k}(n; a, b)$, $k \geq 0$, не са възможно най-добрите в целия интервал, определен от условията (A2). Също в някои части на този интервал тези граници се припокриват и е необходимо да се уточни коя от тях е по-добрата. Например, твърдеството

$$U_4(n; a, b) - U_2(n; a, b) = \frac{n(1-a)(1-b)(n+2)(abn+b+a+1)^2}{[(a^2b^2n - (a-b)^2)(n+2) - 6ab + 3](abn+1)}$$

показва, че $U_4(n; a, b) > U_2(n; a, b)$ в целия интервал, където $U_2(n; a, b)$ е валидна.

Ние предполагаме, че ако е вярно условието $f_0 > 0$, то са изпълнени и останалите условия от (A2) за оптималните полиноми или близки до тях. По-точно, имаме хипотеза, че $f_0 < f_1 < \dots < f_{k+1}$ и $f_{2k+2} < f_{2k+1} < \dots < f_{k+1}$.

В Таблица по-долу са дадени границите $U_2(n; a, b)$, $U_4(n; a, b)$ и $U_6(n; a, b)$ за фиксирани параметри a и b в размерност $n = 3$.

n	a	b	U_2	U_4	U_6	$L_i(n, s)$
3	-0.95	-0.075	5.18			$L_2 = 5.27$
3	-0.95	0.15	8.69			$L_3 = 7.11$
3	-0.95	0.41		10.96		$L_4 = 11.03$
3	-0.95	0.5			13.51	$L_5 = 13.29$
3	-0.95	0.64			18.97	$L_6 = 19.05$
3	-0.685	-0.075	4.71			$L_2 = 5.27$
3	-0.685	0.15	6.22			$L_3 = 7.11$
3	-0.685	0.41		8.63		$L_4 = 11.03$
3	-0.685	0.5			13.84	$L_5 = 13.29$
3	-0.685	0.6			16.97	$L_6 = 17.00$
3	-0.36	-0.075	4.06			$L_2 = 5.27$
3	-0.36	0.15	4.14			$L_3 = 7.11$
3	-0.36	0.36		9.83		$L_4 = 10.03$
3	-0.36	0.5			13.51	$L_5 = 13.29$
3	-0.36	0.6			16.84	$L_6 = 17.00$

Таблица 6.1. Стойности на $U_2(n; a, b)$, $U_4(n; a, b)$ и $U_6(n; a, b)$ за фиксирани параметри a и b в размерност $n = 3$.

6.3 Някои подобрения на границите $U_{2k}(n; a, b)$ и условия за достигането им

Както в случая $a = -1$, границите от предният параграф могат да бъдат подобрявани в някои случаи. Имаме получени такива подобрения за $U_2(n; a, b)$, $U_4(n; a, b)$ и $U_6(n; a, b)$ за някои конкретни параметри a и b . Използваме полиноми от степен

$2k + 4$, за да подобрим границата $U_{2k}(n; a, b)$. По този начин трябва да определим $k + 2$ параметъра при оптимизацията на отношението $G(1)/f_0$ така, че да са изпълнени условията $f_i \geq 0$ за $i = 1, 2, \dots, 2k + 4$ и $f_0 > 0$.

По аналогия със случая $a = -1$, получените полиноми имат някои нулеви коефициенти в разлагането им по полиномите на Гегенбауер.

В таблицата по-долу са дадени примери за подобряване на U_2 , U_4 и U_6 за $n = 3$, $a = -0.95$ и някои стойности на b като новите граници са означени с $newU_i$ за $i = 2, 4, 6$.

n	a	b	U_2	$newU_2$	U_4	$newU_4$	U_6	$newU_6$	$L_i(n, s)$
3	-0.95	0.15	8.69	7.07					$L_3 = 7.11$
3	-0.95	0.41			10.96	10.74			$L_4 = 11.03$
3	-0.95	0.64					18.97	18.78	$L_6 = 19.05$

Таблица 6.2. Стойности на $U_i(n; a, b)$ и $newU_i(n; a, b)$ за $i = 2, 4, 6$ и фиксирани параметри a и b в размерност $n = 3$.

Да отбележим, че условията за достигане на получените в тази глава граници следват от някои общи съображения на методите на линейното програмиране. По-точно, в сила е следната теорема.

Теорема 6.3.1. Нека за някои фиксирани n , a и b , $C \in S_n(a, b)$ и полином $f(t)$ удовлетворяващ условията (A1) и (A2) имаме $|C| = f(1)/f_0$. Тогава от $\langle x, y \rangle = s$, $x, y \in C$, $x \neq y$ следва $f(s) = 0$. Освен това $f_i M_i = 0$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k = \deg(f)$. (Тук M_i са моментите за дизайна C (виж [2]).)

Доказателство. Следва от Теорема 1.4.1 и Теорема 6.2.1. □

Теорема 6.3.1 може да се прилага за пресмятане на спектрите на съответните кодове.

Да отбележим, че $U_{2k}(n; -1, b) = L_{2k}(n, b)$ за всяко k , където $L_{2k}(n, s = b)$ е границата на Левенщайн (1.5.2). Необходимо е да сравняваме границите $U_{2k}(n; a, b)$ със всички съответни за случая граници на Левенщайн. Например, имаме

$$\begin{aligned} L_1(n, b) &\leq U_2(n; a, b), \quad \text{за } -1 \leq a < b \leq -1/n, \quad \text{но} \\ U_2(n; a, b) &\leq L_2(n, b), \quad \text{за } b \in [-1/n, 0]. \end{aligned}$$

Тази глава е написана въз основа на [36].

Библиография

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [2] K. Andreev, S. Boumova, P. Boyvalenkov, Moments of spherical codes and designs, Proc. Sixth Intern. Workshop ACCT, Bansko, Bulgaria, June 2000, 29-32.
- [3] R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions*, Regional Conf. Lect. Appl. Math., SIAM 21, 1975.
- [4] B. Bajnok, Construction of spherical t -designs, *Geom. Dedicata* 43, 1992, 167-179.
- [5] B. Bajnok, Construction of spherical 3-designs, *Graphs Combin.* 14, 1998, 97-107.
- [6] B. Bajnok, Spherical Designs and Generalized Sum-Free Sets in Abelian Groups, *Des. Codes Crypt.* 21, 2000, 11-18.
- [7] Ei. Bannai, Et. Bannai, *Algebraic combinatorics on spheres*, Springer-Verlag, Tokyo, 1999
- [8] E. Bannai, E. Bannai, D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s -distance subset in real Euclidean space II, *Combin.* 3, 1983, 147-152.
- [9] E. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs I, *J. Math. Soc. Japan* 31, 1979, 199-207.
- [10] E. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs II, *J. London Math. Soc.* 21, 1980, 13-30.
- [11] E. Bannai, N. J. A. Sloane, Uniqueness of certain spherical codes, *Canad. J. Math.* 33, 1981, 437-449.
- [12] A. Blokhuis, *Few distance sets*, CWI Tracts No. 7, Math. Centrum, Amsterdam, 1984.
- [13] S. P. Boumova, *Applications of polynomials to spherical codes and designs*, PhD Thesis, 2002.
- [14] S. Boumova, D. Danev, On the asymptotic behaviour of a necessary condition for existence of spherical designs, Proc. Intern. Workshop ACCT, Sept. 8-14, 2002, 54-57.

- [15] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Upper bounds on the minimum distance of spherical codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 41, 1996, 1576-1581.
- [16] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Necessary conditions for existence of some designs in polynomial metric spaces, *Europ. J. Combin.* 20, 1999, 213-225.
- [17] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, New nonexistence results for spherical designs, in *Constructive Theory of Functions* (B. Bojanov, Ed.) Darba, Sofia 2003, 225-232.
- [18] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, The general method applied for 3-designs (contd.) Baltimore, 2003.
- [19] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, New nonexistence results for spherical 5-designs, *Scientific Research, a Journal of South-West University, Blagoevgrad, Bulgaria*, 2007 (14 pages).
- [20] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, New nonexistence results for spherical 5-designs, *Proc. Intern. Workshop OC'07*, June 2007, White Lagoon, Bulgaria, 30-35.
- [21] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, Polynomial techniques for investigation of spherical designs. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, (accepted).
- [22] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Nonexistence results for spherical 7-designs, *Proc. Intern. Workshop ACCT-11*, 16-22 June, 2008, Pamporovo, Bulgaria, 35-39.
- [23] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, A method for proving nonexistence of spherical designs of odd strength and odd cardinality, *Problems of Information Transmission*, 2008, (accepted).
- [24] P. G. Boyvalenkov, Computing distance distributions of spherical designs, *Lin. Alg. Appl.*, 226/228, 1995, 277-286.
- [25] P. G. Boyvalenkov, Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs, *Discr. Comp. Geom.* 14, 1995, 167-183.
- [26] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, On maximal codes in polynomial metric spaces, *Springer-Verlag Lect. Not. Comp. Sci.* 1255, 1997, 29-38.
- [27] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, I. N. Landjev, On maximal spherical codes II, *J. Combin. Des.* 7, 1999, 316-326.
- [28] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, S. I. Nikova, Nonexistence of certain spherical designs of odd strengths and cardinalities, *Discr. Comp. Geom.* 21, 1999, 143-156.
- [29] P. G. Boyvalenkov, I. N. Landjev, On maximal spherical codes I, *Springer-Verlag Lect. Not. Comp. Sci.* 948, 1995, 158-168.

- [30] P. G. Boyvalenkov, S. I. Nikova, Improvements of the lower bounds for some spherical designs, *Math. Balk.* 12, 1998, 151-160.
- [31] P. G. Boyvalenkov, S. I. Nikova, New lower bounds for some spherical designs, *Springer-Verlag Lect. Notes Comp. Science* 781, 1994, 207-216.
- [32] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Spherical 2-distance sets which are spherical 3-designs, *Annuaire L'Univ Sofia*, 95, 2004, 53 - 58.
- [33] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, On spherical (n, M, ℓ, τ) -sets, Proc. Intern. Workshop ACCT-8, 8-14 Sept. 2002, Tsarskoe Selo, Russia, 69-72.
- [34] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Some methods for investigation of spherical designs, Proc. Intern. Workshop ACCT-9, 19-25 June, 2004, Kranevo, Bulgaria, 86-89.
- [35] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Upper bounds on the covering radius of spherical designs, Proc. Intern. Workshop OC'05, 17-23 June, 2005, Pamporovo, Bulgaria, 53-58.
- [36] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Bounds on the cardinality of spherical codes with inner products in given range, Proc. Intern. Workshop ACCT-10, 3-9 September, 2006, Zvenigorod, Russia, 48-51.
- [37] P. J. Cameron, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents, *J. Algebra* 55, 1978, 257-280.
- [38] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [39] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, Third Ed., New York, 1973.
- [40] Д. Данев, Граници за кодове в полиномиални метрични пространства, Дипломна работа, ФМИ-СУ, 1996.
- [41] H. Davenport, G. Hajos, Aufgabe 35, *Math. Lapok* 58, 1951, No. 2.
- [42] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata* 6, 1977, 363-388.
- [43] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials, *Philips Res. Reports*, 1975, 30:91*-105*.
- [44] T. Ericson, V. Zinoviev, *Spherical codes*, Elsevier Science B. V., 2001.
- [45] G. Fazekas, V. I. Levenshtein, On upper bounds for code distance and covering radius of designs in polynomial metric spaces, *J. Comb. Theory A*, 70, 1995, 267-288.
- [46] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical designs, *Proc. Symp. Pure Math.* 34, 1979, 255-272.

- [47] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Cubature formulae, polytopes, and spherical designs, in *The Geometric Vein*, The Coxeter, Festschrift (C. Davis, B. Grünbaum, F. A. Sherk, Eds.), Springer, Berlin, 1982, 203-218.
- [48] P. J. Grabner, R. F. Tichy, Spherical designs, discrepancy and numerical integration, *Math. Comput.* 60, 1991, 327-360.
- [49] R. H. Hardin, N. J. A. Sloane, McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions, *Discr. Comp. Geom.* 15, 1996, 429-441.
- [50] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Acad. Press NY, 1978.
- [51] Y. Hong, On spherical t -designs in $\mathbf{R}^2$, *Europ. J. Combin.* 3, 1982, 255-258.
- [52] G. A. Kabatianskii, V. I. Levenshtein, Bounds for packings on a sphere and in space, *Probl. Inform. Transm.* 14, 1978, 1-17.
- [53] T. Koorwinder, The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics, *SIAM J. Appl. Math.* 25, 1973, 236-246.
- [54] J. Korevaar, J. L. H. Meyers, Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains, *J. Approx. Theory* 79, 1994, 144-164.
- [55] V. I. Lebedev, Quadratures on the sphere, *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* 16, No. 2, 1976, 10-24.
- [56] P. W. H. Lemmens, J. J. Seidel, Equiangular lines, *Journal of Algebra* 24, 1973, 494-512.
- [57] V. I. Levenshtein, On bounds for packings in n -dimensional Euclidean space, *Soviet Math. Doklady* 20, 1979, 417-421.
- [58] V. I. Levenshtein, Bounds for packings in metric spaces and certain applications, *Probl. Kibern.* 40, 1983, 44-110 (in Russian).
- [59] V. I. Levenshtein, Designs as maximum codes in polynomial metric spaces, *Acta Appl. Math.* 25, 1992, 1-82.
- [60] V. I. Levenshtein, Universal bounds for codes and designs, chapter 6 in *Handbook of Coding Theory*, V. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier Science B.V., 1998.
- [61] P. Lisonek, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory* A77, 1997, 318-338.
- [62] A. D. McLaren, Optimal numerical integration on the sphere, *Math. Comput.* 17, 1963, 361-383.
- [63] A. Neumaier, J. J. Seidel, Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices, *Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 91 (*Indag. Math.* 50), 1988, 321-344.

- [64] W. Neutch, Optimal spherical designs and numerical integrations on the sphere, *J. Comput. Phys.* 51, 1983, 313-325.
- [65] W. Neutch, E. Schröder, A. Jessner, Efficient integration on the hypersphere, *J. Comput. Phys.* 59, 1985, 167-175.
- [66] S. I. Nikova, Bounds for designs in polynomial metric spaces, PhD dissert., TU Eindhoven, 1998.
- [67] S. I. Nikova, V. Nikov, Extremal polynomials of degree $\tau+2$ and $\tau+3$, Proc. WCC'99, Jan. 11-14, 1999, Paris, France.
- [68] R. A. Rankin, The closest packing of spherical caps in n dimensions, *Proc. Glasgow Math. Assoc.* 2, 1955, 139-144.
- [69] B. Reznick, Sums of even powers of real linear forms, *Mem. AMS*, No. 463, 1992.
- [70] B. Reznick, Some constructions of spherical 5-designs, *Lin. Alg. Appl.* 226/228, 1995, 163-196.
- [71] C. A. Rogers, *Packing and covering*, Camb. Univ. Press, 1964.
- [72] I. Schoenberg, G. Szegő, An extremum problem for polynomials, *Compos. Math.* 14, 1960, 260-268.
- [73] J. J. Seidel, Quasiregular two-distance sets, *Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 72 (*Indag. Math.* 31), 1969, 64-70.
- [74] J. J. Seidel, Eutactic stars, *Collog. Math. Soc. János Bolyai* 18, 1976, 983-999.
- [75] P. Solé, The covering radius of spherical t -designs, *J. European de Combinatoire*, 12, 1991, 423-431.
- [76] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, AMS Col. Publ. Providence, RI, 1939.
- [77] N. Y. Vilenkin, *Special functions and theory of group representations*, Providence, RI, 1968.
- [78] V. Yudin, Lower bounds for spherical designs, *Izv.: Math.* 3, 61, 1997, 673-683.