СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ
по МАТЕМАТИКА ПРИ ВАК

Българска Академия на Науките

Институт по Математика и Информатика

Мая Митева Стоянова

ВЪРХУ СТРУКТУРАТА НА НЯКОИ СФЕРИЧНИ КОДОВЕ И ДИЗАЙНИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация

за присъждане на образователната и научна степен

"доктор"

по научната специалност

01.01.02 Алгебра и Теория на числата

Научен консултант:
ст.н.с. II ст. дмн Петър Георгиев Бойваленков

Рецензенти: проф. д-р Керопе Бартев Чакърян
ст.н.с. II ст. д-р Николай Лазаров Манев

София, 2009 г.

Дисертацията съдържа 119 страници, от които 114 страници основен текст и 5 страници библиография с 78 заглавия.

Номерацията на дефинициите, теоремите, лемите и следствията в автореферата съответства точно на номерацията им в дисертационния труд. С цел акцентиране върху разглежданите основни проблеми единствено за тях е въведена отделна номерация (в скоби е указана съответната им номерация в дисертационния труд). Библиографията на автореферата представлява част от посочената в дисертационния труд и съдържа само литературата, цитирана в автореферата.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на заседание на разширено звено към секция Математически Основи на Информатиката на Института по Математика и Информатика при Българска Академия на Науките на 03.12.2008 г.

Дисертантът работи като главен асистент към катедра Алгебра на Факултета по Математика и Информатика при СУ "Св. Климент Охридски".

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 12.04.2009 г. от 16.30 часа в аудитория 200 на Факултета по Математика и Информатика на СУ "Св. Климент Охридски", бул. "Дж. Баучер" 5, 1164 София, на открито заседание на СНС по Математика при ВАК.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски", бул. "Дж. Баучер" 5, 1164 София.

Дисертационният труд съдържа резултати, получени при изследване на някои класове сферични кодове и дизайни.

Дефиниция 1.1.1. Всяко крайно непразно подмножество C на Евклидовата сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *сферичен код*.

Най-важните характеристики на сферични кодове са: *размерността* n, *мощността* $M = |C|$ и *максималното скаларно произведение* (или *максимален косинус*)

$$s = s(C) = \max\{\langle x, y\rangle : x, y \in C, x \neq y\}.$$

Сферичен код с тези параметри означаваме като (n, M, s)-код. Кодът $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *антиподален*, ако $C = -C$. Друг параметър на сферичен код C е *минималното скаларно произведение* (или *минимален косинус*) $\ell(C) = \min\{\langle x, y\rangle : x, y \in C, x \neq y\}$.

Сферичните дизайни са разгледани за пръв път като аналог на класическите комбинаторни дизайни от Делсарт-Гьоталс-Зайдел [34] през 1977г.

Дефиниция 1.1.4. Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича *сферичен τ-дизайн* ($\tau \geq 0$ е цяло число), ако равенството

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x)d\mu(x) = \frac{1}{|C|}\sum_{x\in C} f(x)$$

е изпълнено за всеки полином $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от степен, ненадминаваща τ. Тук $\mu(.)$ е нормализираната Лебегова мярка, т.е. $\mu(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен код, максималното цяло неотрицателно число τ, за което C е сферичен τ-дизайн, се нарича *сила* на C.

Горната дефиниция дава връзка между численото пресмятане на интеграли върху $\mathbb{S}^{n-1}$ и сферичните дизайни и е една от мотивациите за изучаването на сферичните дизайни. В числените методи точките на сферичен дизайн със сила τ се разглеждат като върхове на квадратурна формула от Чебишев тип (т.е. с еднакви тегла) с алгебрична степен на точност τ (виж например [38, 39, 43, 44]). Този факт обяснява интереса на учени от други области [40, 52, 53, 50] (най-вече физици и астрономи) към сферичните дизайни.

Всеки сферичен код е 0-дизайн. Сферичните 1-дизайни са кодове, чийто център на тежестта съвпада с центъра на единичната сфера. В частност, оттук следва, че всеки антиподален код е поне 1-дизайн.

Сферичните 2-дизайни също са обекти, известни на геометрите още от 19-ти век - те съвпадат с конфигурациите, разглеждани от Шлефли и наричани от него *eutactic star* (виж [34, 51, 57, 32]).

Всеки сферичен дизайн води до съществуването на тъждества от вида

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^r = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^{2r},$$

което (за рационални λ_i и цели a_{ij}) играе важна роля при решаването на проблема на Варинг. Връзката между сферичните дизайни и тъждествата от горния вид е изследвана от Резник [54, 55].

Посочените факти подчертават важността на въпросите за съществуване и несъществуване на сферични дизайни с относително малки мощности. Класически подход в такива задачи е изследването на структурата на разглежданите обекти. Получаването на различни ограничения води до резултати за несъществуване или класификационни резултати.

В първа глава на дисертацията са въведени всички основни понятия, дефиниции и известни резултати, необходими за по-нататъшното изложение. Въведени са полиномите на Гегенбауер, използвани съществено в прилаганите в дисертацията полиномиални техники. Описани са универсалните граници на Левенщейн за сферични кодове [45, 48] и границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел за сферични дизайни [34]. В последния параграф на главата са описани известни ограничения върху структурата и необходими условия за съществуването на изследваните в дисертационния труд сферични дизайни.

Дефиниция 1.3.3. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ-дизайн, $\tau \geq 1$, с мощност $M = |C|$ и множеството $A(C) = \{\langle x, y\rangle : x, y \in C,\ x \neq y\}$ има ℓ елемента, то C се нарича *(n, M, ℓ, τ)-конфигурация*.

Множествата в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ с фиксиран брой ℓ различни разстояния са разглеждани от редица автори (Е. Банай-Р. Дамерел [7, 8], Е. Банай-Ет. Банай-Стентън [5, 6], А. Блокхаус [9], Делсарт-Гьоталс-Зайдел [34, 35, 56], Камерън-Гьоталс-Зайдел [30], Лисонек [49]). Броят на различните ненулеви разстояния (еквивалентно различните нееднинични скаларни произведения) между точки от даден код е важен параметър при изучаване на свойствата му.

Във втора глава са изследвани (n, M, ℓ, τ)-конфигурации за относително малки сила τ и брой различни нееденични скаларни произведения ℓ.

Проблем 1. (2.0.1) За фиксирани размерност $n \geq 3$, брой различни разстояния ℓ и сила $\tau \geq 2$, да се намерят всички мощности M, за които съществуват сферични (n, M, ℓ, τ)-конфигурации. В частност, да се намери максималното M, за което съществува сферична (n, M, ℓ, τ)-конфигурация.

Разгледани са (n, M, ℓ, τ)-конфигурации за параметри $(\ell, \tau) = (2, 3)$, $(2, 2)$ и $(3, 5)$. За $(n, M, 2, 3)$-конфигурации е доказана така наречената Лойд тип теорема (виж Банай - Дамерел [7, 8]).

Теорема 2.1.4. (Лойд тип теорема) Ако C е $(n, M, 2, 3)$-конфигурация, то скаларните произведения на C са рационални.

В случая $(\ell, \tau) = (2, 2)$ също е доказана Лойд тип теорема, в която имаме възможност за ирационални произведения в един специален случай.

Теорема 2.2.3. Ако C е $(n, M, 2, 2)$-конфигурация със скаларни произведения t_1 и t_2, то е изпълнено точно едно от двете:

1) двете скаларни произведения са рационални;

2) размерността n е четна, $M = 2n + 1$ и $t_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{2n+1}}{2n}$, като $2n + 1$ не е точен квадрат.

Представени са съответни класификационни резултати за $(n, M, 2, 2)$-конфигурации в относително малки размерности. В §2.3 е конструиран сферичен код $C \subset \mathbb{S}^5$ с 13 точки, който е 2-дизайн и има две различни ирационални скаларни произведения. Това е единственият известен ни пример за (n, M, ℓ, τ)-конфигурация за $\tau \geq 3$, $n \geq 3$ и $\tau \geq 2l - 2$ освен икосаедъра, който има ирационални скаларни произведения. Нещо повече, споменатата конфигурация е единствена с точност до ортогонална трансформация (Теорема 2.3.1). Доказани са следните теореми за $(n, M, 2, 3)$- и

$(n, M, 3, 5)$-конфигурациите.

Теорема 2.1.2. Кодът C е $(n, M, 2, 3)$-конфигурация тогава и само тогава, когато е $(n, L_3(n, s), s)$-код.

Теорема 2.4.1. Кодът C е $(n, M, 3, 5)$-конфигурация тогава и само тогава, когато е $(n, L_5(n, s), s)$-код.

Тези резултати може да бъдат извлечени от работите на Левенщейн [47], но не са експлицитно указани там. За максималните сферични кодове, достигащи границите на Левенщейн $L_3(n, s)$ и $L_5(n, s)$ са известни класификационни резултати, получени от Бойваленков-Данев-Ланджев в [22] (виж също [7, 8]). Глава 2 е написана въз основа на [25] и [26].

Една от основните техники за изследване на структурата на сферични кодове и дизайни е т. нар. полиномиален подход. Полиномиалните техники се основават на следната еквивалентна дефиниция (виж например Фазекаш-Левенщейн [37]) за сферични дизайни.

Дефиниция 1.3.5. Сферичният код $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ се нарича сферичен τ-дизайн, ако за всяка точка $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ и всеки полином $f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i P_i^{(n)}(t)$ от степен $k \leq \tau$ е в сила равенството

$$\sum_{x \in C} f(\langle x, y \rangle) = f_0 |C|,$$

(f_0 е нулевия коефициент в развитието на $f(x)$ по полиномите на Гегенбауер).

Използваме горната дефиниция както за случаите, когато $y \in C$, така и за $y \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus C$. В Глави 3 и 4 са разгледани следните два проблема:

Проблем 2. (1.1.5) За фиксирани размерност n и сила τ да се оцени величината

$$B(n, \tau) = \min\{M = |C| : \text{ съществува } \tau\text{-дизайн } C \subset \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Проблем 3. (1.1.6) За фиксирани размерност $n \geq 3$, сила $\tau \geq 2$ и мощност M да се определи дали съществува сферичен τ-дизайн с M точки върху $\mathbb{S}^{n-1}$.

В трета глава са получени граници за скаларните произведения на някои класове сферични дизайни. Идеята за изследване структурата на сферичните дизайни с помощта на подходящи полиноми в Дефиниция 1.3.5 е използвана за пръв път от Фазекаш-Левенщейн [37]. Някои граници на Фазекаш-Левенщейн са подобрени и обобщени от Бойваленков-Данев-Никова [23], Юдин [59] и Бойваленков-Бумова-Данев [11, 12]. Изследванията в тази глава са продължение на получените в [11, 12] резултати (виж също [10]). Получени са нови граници за най-важните скаларните произведения на сферичните дизайни. Изследването на разпределението на скаларните произведения на сферични дизайни с относително малки мощности надхвърля възможностите на апарата на чистото линейно програмиране и дава по-добър резултат както при малки размерности, така и в асимптотичния процес, при който силата е фиксирана, а размерността расте неограничено.

Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ-дизайн. За произволна точка $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, разглеждаме множеството (или мултимножество, ако има повтарящи се скаларни произведения)

$$I(x) = \{\langle u, x \rangle : u \in C\}.$$

Съществува наредба на точките в $C = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|C|}\}$ такава, че $-1 \leq \langle u_1, x \rangle \leq \langle u_2, x \rangle \leq \cdots \leq \langle u_{|C|}, x \rangle \leq 1$. Да означим $t_i(x) = \langle u_i, x \rangle$ за $i = 1, 2, \ldots, |C|$. Тогава можем да считаме, че

$$I(x) = \{t_1(x), t_2(x), \dots, t_{|C|}(x)\},$$

където $-1 \le t_1(x) \le t_2(x) \le \cdots \le t_{|C|}(x) \le 1$, като $t_{|C|}(x) = 1 \iff x \in C$.

За сферичен τ-дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ и за дадена точка $x \in C$, е удобно да използваме означенията $L_{\tau,i}(x)$ и $U_{\tau,i}(x)$ съответно за долна и горна граници за скаларното произведение $t_i(x)$. Когато получените ограничения са налице за всяка точка $x \in C$, пропускаме x в означенията, т.е. бележим тези граници съответно с $L_{\tau,i}$ и $U_{\tau,i}$.

Да означим с

$$\begin{aligned} P_{\tau,s}^{+} = \{f(t) \in \mathbb{R}[t] : f(t) &= A^2(t), \text{ ако } \tau \text{ е четно, или} \\ f(t) &= (t+1)A^2(t), \text{ ако } \tau \text{ е нечетно}\}, \end{aligned}$$

където полиномът $A(t) \in \mathbb{R}[t]$ има $\deg(A)$ реални нули в $[-1, s]$. Нека μ_f е най-големият корен на уравнението $2f(t) = f_0|C|$. Получена е следната горна граница за максималното скаларно произведение на сферичен τ-дизайн.

Теорема 3.1.2. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ-дизайн. Тогава

$$s(C) \le U_{\tau,|C|-1} = \inf\{\mu_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+}\},$$

където $\mu_\tau(f) = 2\mu_f^2 - 1$. В частност, за всяка точка $x \in C$ имаме $t_{|C|-1}(x) \le \inf\{\mu_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+}\}$.

Направени са както конкретни изчисления в малките размерности и за относително малки мощности, така и асимптотичен анализ (при сила на дизайна $\tau = 3$, 4 и 5). При $\tau = 4$ е получен явен вид на границата $U_{4,|C|-1}$.

Теорема 3.1.3. Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, то за всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_{|C|-1}(x) \le U_{4,|C|-1} = \frac{2(3 + \sqrt{(n-1)[(n+2)|C| - 3(n+3)]})}{n(n+2)} - 1.$$

Да означим с

$$P_{\tau,s}^{+,even} = \{f(t) \in P_{\tau,s}^{+} : f(t) \text{ е четна функция}\}.$$

Нека θ_f е най-големият корен на уравнението $2f(t) = f_0|C|$, където $f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}$.

Получена е долна граница за минималното скаларно произведение на сферичен τ-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Дизайните с четна сила τ и мощност, която не надминава границата на Делсарт-Гьоталс-Зайдел [34] за $(\tau+1)$-дизайни имат горното свойство.

Теорема 3.2.2. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен τ-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Тогава

$$\ell(C) \ge L_{\tau,1} = \sup\{\theta_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}\},$$

където $\theta_\tau(f) = 1 - 2\theta_f^2$. В частност, за всяка точка $x \in C$ имаме $t_1(x) \ge \sup\{\theta_\tau(f) : f(t) \in P_{\tau,s}^{+,even}\}$.

Направени са конкретни изчисления в малките размерности за относително малки мощности и асимптотичен анализ (при сила $\tau = 4$ и 6). За 4-дизайни имаме следния явен вид на границата $L_{4,1}$.

Теорема 3.2.3. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен 4-дизайн, който не притежава двойка противоположни точки. Тогава за всяка точка $x \in C$ имаме

$$t_1(x) \geq L_{4,1} = 1 - \frac{2}{n}(1 + \sqrt{\frac{(n-1)(|C|-2)}{n+2}}).$$

В §3.4 е получена горна граница $U_{2k-1,2}$ за скаларното произведение $t_2(x)$ на сферичен $(2k-1)$-дизайн C за всяка точка $x \in C$.

Теорема 3.4.1. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е сферичен $(2k-1)$-дизайн, $k \geq 3$ и $j = 2k-4$. За всяка точка $x \in C$, имаме

$$t_2(x) \leq U_{2k-1,2} = -\sqrt{\frac{(j+1)!!|C| - 2n(n+2)\cdots(n+j)}{(n+j)[(j-1)!!|C| - 2n(n+2)\cdots(n+j-2)]}}.$$

Ако $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е 3-дизайн, то $t_2(x) \leq U_{3,2} = -\sqrt{\frac{|C|-2n}{n(|C|-2)}}$, за всяка точка $x \in C$.

Границата $U_{3,2} = -\sqrt{\frac{|C|-2n}{n(|C|-2)}}$ се достига за някои класове от 3-дизайни – например за биортогоналните кодове и за кодовете с $2(n+1)$ точки $(-C_1) \cup C_1$, където C_1 е правилен n-мерен симплекс.

Намирането на граници за $t_1(x)$, $t_2(x)$ и $t_{|C|-1}(x)$ (т.е. за точките от C, които са най-отдалечени от x или най-близки до x) дава възможност за получаване на необходими условия за съществуване на клас от сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Това е основата на метода, предложен в [12] от Бойваленков-Бумова-Данев. В последния параграф на Глава 3 ние продължаваме този подход, като получаваме нови граници за споменатите скаларни произведения и добавяме при изследването на въпроса за съществуване на даден дизайн и граници за $t_3(x)$ и $t_{|C|-2}(x)$ за някои специални точки $x \in C$. Основна роля за усилването на метода играе съществуването на "добра" специална четворка точки от дизайна с определени свойства. По-точно в §3.5 са разгледани $(2k-1)$-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за параметрите и скаларните произведения на които са изпълнени следните условия:

$$2 \leq \rho_0|C| < 3, \quad \text{и} \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1,$$

(ρ_0, α_0, α_{k-1} са параметри въведени от Левенщейн [47, 48]). В такива дизайни съществуват специални тройки точки $\{x, y, z\} \subset C$, такива, че $\langle x, y\rangle = t_1(x) = t_1(y) \leq \alpha_0$ и $\langle x, z\rangle = t_2(x) = t_1(z) \leq \alpha_0$. Към всяка такава тройка може да се добави точката $u \in C$, за която $\langle u, z\rangle = t_2(z)$ и ние разглеждаме получените специални четворки $\{x, y, z, u\}$.

Специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C се нарича "добра", ако $t_2(z) \leq \alpha_0$.

Разработен е подход, който разграничава следните два основни случая: съществува специална четворка, която не е "добра", т.е. $t_2(z) > \alpha_0$ в тази специална четворка и всички специални четворки са "добри", т.е. $t_2(z) \leq \alpha_0$ във всички специални четворки.

Във втория случай можем да отделим "добра" специална четворка с интересни свойства.

Теорема 3.5.10. Нека $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ е $(2k-1)$-дизайн с нечетна мощност $|C|$, в който всички специални четворки са "добри". Тогава съществува поне една "добра" специална четворка, за която съществува точка $v \in C \backslash \{x, y, z, u\}$, такава, че

$$\langle v, w \rangle \leq \alpha_0, \quad \text{за някое} \quad w \in \{y, u\}.$$

Следствие 3.5.11. Имаме $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ за поне една "добра" специална четворка точки $\{x, y, z, u\}$ от C.

Теорема 3.5.10 и Следствие 3.5.11 показват, че съществува поне една "добра" специална четворка точки, за която $t_{|C|-2}(x) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ (такава специална четворка наричаме x-"добра" специална четворка) или $t_{|C|-2}(z) \geq 2\alpha_0^2 - 1$ (съответно z-"добра" специална четворка точки).

За всеки от двата основни случая е получено необходимо условие за съществуването на разглежданите дизайни при съответно наложените ограничения върху структурата им (Леми 3.5.9, 3.5.15 и 3.5.18). Резултатите са обобщени в следната теорема, която дава възможност за получаване на нови резултати за несъществуване.

Теорема 3.5.19. Не съществува $(2k-1)$-дизайн $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C|$, за който

$$\rho_0|C| < 3, \quad \alpha_{k-1} < 2\alpha_0^2 - 1, \quad \text{и} \quad C_x(h_i) < 0$$

за някои полиноми $h_i(t)$ за $i = 1, 2, 3$, съответно в Леми 3.5.9, 3.5.15 и 3.5.18.

Глава 3 е написана въз основа на [27], [17] и [19].

В Глава 4 е предложен метод за доказване на несъществуване на сферични дизайни (с нечетна сила и нечетна мощност), който се основава на описания в §3.5 подход. При необходимост подходът от §3.5 е усилен с по-прецизен анализ на разположението на изследваните скаларни произведения относно параметрите на разглежданите дизайни. Получени са нови необходими условия за съществуването на 3-, 5- и 7-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 50$, $5 \leq n \leq 25$ и $5 \leq n \leq 20$ съответно. Получени са и асимптотични подобрения на долната граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни (виж Проблем 2).

В §4.1 са получени резултати за несъществуване на 3-дизайни. Байнок [3, 4] дава конструкция на сферични 3-дизайни за всички размерности $n \geq 7$ и всички нечетни мощности $|C| = M \geq \frac{5n}{2}$. В по-ниските размерности, той конструира 3-дизайни за всички нечетни мощности, започвайки с $|C| = M \geq 11$ за $n = 3$ и $n = 4$ и с $|C| = M \geq 15$ за $n = 5$ и $n = 6$. От друга страна, Бойваленков-Данев-Никова [23] и Бойваленков-Бумова-Данев [12] доказват, че не съществуват 3-дизайни C с нечетна мощност $|C| = M$, за които $\rho_0|C| < 2$. В [13] Бойваленков-Бумова-Данев доказват още несъществуването на 3-дизайни C с нечетна мощност в 50 от всички 144 отворени дотогава случая (при тях $\rho_0|C| \geq 2$) на възможни нечетни мощности на 3-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 50$. Следователно, в тези размерности са останали 94 отворени случая. В §4.1 изследваме въпроса за съществуването на 3-дизайни в 47 случая, за които са в сила условията от §3.5. Несъществуване е доказано в 35 от тях. Получените резултати дават окончателен отговор на Проблем 3 за размерности $n = 8, 13, 14$ и 18. В Таблица 4.1 новите резултати са указани с $^\diamond$. Таблица 4.1 може да се види и на http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/publications/stoyanova/table.html.

В §4.2 са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни. Конструкции на 5-дизайни са описани от Резник [54, 55] (виж също Байнок [2], Хардин-Слоен [41], Банай-Дамерел [8]), който например показва, че 5-дизайни в размерност $n = 3$

съществуват за мощности $|C| = M = 12, 16, 18, 20$ и ≥ 22. Освен това той предполага, че за всички останали възможни мощности съответните 5-дизайни не съществуват. От друга страна, "разстоянието" между мощностите на известните 5-дизайни и получените резултати за несъществуване е все още доста голямо. Например, резултати за несъществуване на 5-дизайни са получени от Бойваленков-Данев-Никова [23] и Бойваленков-Бумова-Данев [12] за всички възможни нечетни мощности $|C|$ на 5-дизайни, за които е в сила условието $\rho_0|C| < 2$. След това, Бойваленков-Бумова-Данев [13] получават резултати за несъществуване на 5-дизайни за още 53 възможни мощности, за които $\rho_0|C| \geq 2$ в размерности $3 \leq n \leq 20$. По-този начин са останали 42 подлежащи на изследване случая в размерности $5 \leq n \leq 25$, в които мощността $|C|$ е нечетна и са изпълнени неравенствата $2 \leq \rho_0|C| < 3$ и $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_2$. В §4.2, прилагайки нашия метод, са получени резултати за несъществуване на 5-дизайни с параметри във всички 42 отворени случая. Получените резултати са обобщени в следната теорема.

Теорема 4.2.14. За да съществуват 5-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 25$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.

В §4.3 са получени резултати за несъществуване на 7-дизайни. По-точно, след [23, 12] са останали 291 възможни нечетни стойности за мощността на 7-дизайни в размерности $3 \leq n \leq 20$, за които $2 \leq \rho_0|C| < 3$. За всички тях е налице условието $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_3$ и нашият метод доказва несъществуване във всички отворени случаи с изключение на един: $n = 4, |C| = 43$. Получените резултати са обобщени в следната теорема.

Теорема 4.3.12. За да съществуват 7-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност в размерности $5 \leq n \leq 20$ е необходимо да е изпълнено неравенството $\rho_0|C| \geq 3$.

Нещо повече, получени са резултати за несъществуване в още 18 случая на нечетни мощности за 7-дизайни в размерности $5 \leq n \leq 20$, в които са изпълнени неравенствата $2\alpha_0^2 - 1 > \alpha_3$ и $\rho_0|C| \geq 3$. Да отбележим, че за 7-дизайни методът с използване на съществуването на "добра" специална четворка с особени свойства (съгласно Теорема 3.5.7 и Лема 3.5.8) дава резултат по-бързо и лесно в сравнение със случаите $\tau = 3$ и $\tau = 5$. Изглежда това е общ феномен - дизайни с по-голяма сила и относително малка мощност съществуват по-рядко и съответно е по-лесно да се доказват резултати за несъществуване. Считаме, че това наблюдение хвърля допълнителна светлина върху стойността на резултатите за 3- и 5-дизайни.

В последната част на Глава 4 е направен асимптотичен анализ на въпроса за съществуване на 3-дизайни с нечетна мощност. По-точно, новият метод е приложен върху 3-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с нечетна мощност $|C| = (2+\gamma)n$ при $n \to \infty$. По-долу $B_{\text{odd}}(n,3) \gtrsim An$ ($A = const.$) означава, че $\lim_{n\to\infty} \frac{B_{\text{odd}}(n,3)}{n} \geq A$. От границите на Делсарт-Гьоталс-Зайдел и конструкциите на Байнок [3, 4] за числото γ следва, че $\gamma \in (0, 0.5)$. В [23, 13, 14] долната асимптотична граница за $B_{\text{odd}}(n,3)$ е подобрена съответно до $(1+\sqrt[3]{2})n \approx 2.2599n$, $2.3227n$ и $2.3412n$. Затова предполагаме, че $\gamma \in [0.3412, 0.5)$. Получена е следната нова асимптотична долна граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни.

Теорема 4.4.4. Имаме

$$B_{\text{odd}}(n,3) \gtrsim 2.3925n,$$

т.е. $\gamma \geq 0.3925$.

Тази глава е написана въз основа на [15], [16], [17], [18] и [19].

Друг важен параметър при изследване на структурата на сферичните кодове и дизайни е техния радиус на покритие.

Дефиниция 5.1.1. Радиус на покритие на сферичен код C наричаме числото

$$r(C) = \max_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \min_{x\in C}\{d(x,y)\}.$$

Изследването на величината $r(C)$ е еквивалентно на изследване на

$$t_c = 1 - \frac{r^2(C)}{2} = \min_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} \max_{x\in C}\{\langle x,y\rangle\}.$$

За нас е по-удобно да работим с t_c вместо с $r(C)$ и по-нататък наричаме t_c радиус на покритие.

В специалния случай, когато C е τ-дизайн, се оказва възможно получаването на добри долни и горни граници за t_c. Фазекаш и Левенщейн в [37, Теорема 2] получават долни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни.

В Глава 5 на дисертацията е разгледан следния проблем.

Проблем 4. (5.1.1) При фиксирани n, M и τ, да се намерят граници за t_c, които да са в сила за всички τ-дизайни $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ с мощност $|C| = M$.

Използваните полиномиални техники дават горни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни. Не ни е известно да са получавани други граници (освен долните граници на Фазекаш-Левенщейн [37] и по-слабите от тях граници на Solé [58]) за радиуса на покритие на сферични дизайни.

Да означим

$$\begin{aligned} P_\tau^+ = \{f(t)\in\mathbb{R}[t] : deg(f)\le\tau, f(t)\ge 0 \text{ за всяко } t\in[-1,1],\\ f(t) \text{ е растяща функция в } (t_\tau^{(FL)},1) \text{ и } f'(t)\neq 0\},\\ P_\tau^{+,even} = \{f(t)\in P_\tau^+ : f(t) \text{ е четна функция}\}. \end{aligned}$$

Теорема 5.1.5. (Горни граници на линейното програмиране за радиуса на покритие на сферични дизайни) За всеки сферичен τ-дизайн C имаме

$$t_c \le t_\tau^{(up)} = \inf\{m_f : f(t)\in P_\tau^+\}.$$

където m_f е най-големият корен на уравнението $nf(t) = f_0|C|$ (съответно $2nf(t) = f_0|C|$ за антиподални дизайни C и $f(t)\in P_\tau^{+,even}$).

Горните граници от Теорема 5.1.5 зависят от размерността n, силата на дизайна τ и мощността му $M = |C|$. Намерен е видът на полиномите, с чиято помощ могат да се получават тези горни граници.

Теорема 5.1.6. Инфимумът в Теорема 5.1.5, се достига от полиноми $f(t) = (t+1)^\varepsilon A^2(t)$, където $\tau = 2k-\varepsilon$, $\varepsilon\in\{0,1\}$, $\deg(A) = k-\varepsilon$ и полиномът $A(t)$ има $k-\varepsilon$ корена в интервала $[-1, t_\tau^{(FL)}]$.

Получена е следната горна граница $t_4^{(up)}$ за радиуса на покритие на сферични 4-дизайни.

Теорема 5.2.1. За всеки сферичен 4-дизайн C имаме

$$t_c \le t_4^{(up)} = \frac{B\sqrt{2(n|C|(2n+1) - 3n^2(n+1) + (|C|-n)\sqrt{A})}}{2n(n+2)(|C|-2n)},$$

където $B = \sqrt{2(n+2)|C| - 3n(n+3)} - \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{\frac{A}{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)}$, $A = n(n-1)[2(n+2)|C| - 3n(n+3)]$.

В последния параграф на тази глава са получени съответни горни граници за радиуса на покритие за антиподални 3- и 5-дизайни.

Теорема 5.2.2. Ако C е антиподален 3-дизайн, тогава

$$t_3^{(FL)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \le t_c \le \frac{1}{n}\sqrt{\frac{|C|}{2}}.$$

Получената в Теорема 5.2.2 горна граница за радиуса на покритие на антиподални 3-дизайни C с мощности $|C| = n(2+\gamma)$, $\gamma = const.$, дава точния порядък на t_c.

Структурата на антиподалните 5-дизайни е изучавана по-рано и от други автори. Резник [55] доказа несъществуването на антиподални 5-дизайни с n^2+n+2 точки. Бойваленков-Данев-Никова в [23] получават ограничения върху структурата на антиподални 5-дизайни с n^2+n+4 точки. Получени са съответни горни граници за радиуса на покритие за антиподални 5-дизайни.

Теорема 5.2.3. Ако C е антиподален 5-дизайн, тогава

$$t_5^{(FL)} = \left(\frac{3}{n+2}\right)^{1/2} \le t_c \le \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n-1)(|C|-2n)}{n(n+2)}}\right)^{1/2}.$$

Глава 5 е написана въз основа на [28].

Класическият случай, когато $s \in [-1;1)$ получаването на граници за мощността за даден сферичен (n, M, s)-код, е въпрос, дискутиран от редица автори ([45, 46, 48, 31, 36]). В [45, 48] Левенщейн получава универсални граници за такива кодове. Това е една от нашите мотивации да изследваме този въпрос в малко по-общ вид: за зададен интервал $[a,b]$, $-1 \le a < b < 1$. По-точно, за дадени фиксирани размерност n и интервал $[a,b]$, $-1 \le a < b < 1$, означаваме множеството

$$\begin{aligned} S_n(a,b) &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : \langle x,y \rangle \in [a,b], \text{ за } x,y \in C, x \ne y\} \\ &= \{C \subset \mathbb{S}^{n-1} : a \le \ell(C) < s(C) \le b\}. \end{aligned}$$

Проблем 5 (1.1.4) За дадени фиксирани размерност n и интервал $[a,b] \subset [-1,1)$, да се намери (да се намерят граници за) максималната възможна мощност $M = |C|$ на код $C \subset S_n(a,b)$, т.е. да се намери (оцени) величината

$$A(n;a,b) = \max\{|C| : C \subset S_n(a,b)\}.$$

В Глава 6 прилагаме полиномиални техники за изследване на сферични кодове, за които скаларните произведения са във фиксиран подинтервал на интервала

$[-1;1)$, т.е. разглеждаме Проблем 5. Следвайки логиката [45, 21] от ситуацията за интервал $[-1,s]$, първо са получени така наречените Граници на линейното програмиране за разглежданите кодове.

Теорема 6.1.1. (Граници на линейното програмиране за кодове $C \in S_n(a,b)$) Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти, такъв че:

(A1) $f(t) \leq 0$ за всяко $t \in [a,b]$;

(A2) $f_0 > 0$, $f_i \geq 0$ за $i = 1,2,\ldots,k$, в развитието на f по полиномите на Гегенбауер $f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i P_i^{(n)}(t)$.

Тогава за мощността на всеки код $C \subset S_n(a,b)$ е налице границата $|C| \leq f(1)/f_0$, т.е. в сила е

$$A(n;a,b) \leq \frac{f(1)}{f_0}.$$

Получен е вида на полиномите, с чиято помощ могат да се получават такива граници. След това са намерени следните Левенщейн-тип граници за величината $A(n;a,b)$ в първите случаи.

Теорема 6.2.1. Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a,b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a,b]$. Нека за полинома $F(t) = (t-a)(t-b)$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата

$$A(n;a,b) \leq U_2(n;a,b) = \frac{n(1-a)(1-b)}{abn+1},$$

за всички a, b и n, които удовлетворяват условията $-1 \leq a < b < -\frac{1}{na} < 1$.

Теорема 6.2.2. Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a,b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a,b]$. Нека за полинома $F(t) = (t-a)(t-b)(t-\alpha)^2$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата

$$A(n;a,b) \leq U_4(n;a,b) = \frac{n(1-a)(1-b)[3+(n+2)(abn+ab+2a+2b+1)]}{(n+2)[a^2b^2n-(a-b)^2]-6ab+3},$$

където $\alpha = -\frac{3+(n+2)(ab+a+b)}{(n+2)(abn+a+b+1)}$, а за параметрите a, b и n, са изпълнени условията

$$a+b+2\alpha \leq 0,\ \alpha^2+2(a+b)\alpha+ab+\frac{6}{n+4} \geq 0, (a+b)\alpha^2+2\alpha(ab+\frac{3}{n+2})+\frac{3(a+b)}{n+2} \leq 0.$$

Теорема 6.2.3. Нека $n \geq 3$, $-1 \leq a < b < 1$ и $C \subset S_n(a,b)$ е сферичен код със скаларни произведения в интервала $[a,b]$. Нека за полинома $F(t) = (t-a)(t-b)(t^2+\alpha t+\beta)^2$ са изпълнени условията (A2) на Теорема 6.1.1. Тогава е в сила границата

$$A(n;a,b) \leq U_6(n;a,b) = \frac{n(n+2)(1-a)(1-b)A}{2B},$$

където $A = (n+4)[(n+2)(n+3)ab(a+b)+4(a+b)+2-(n-1)(a^2+b^2)+8ab]+3(n+3)+12(a+b)+2(2n-1)ab$, $B = 9+(n+2)[(n+2)(n+4)a^3b^3+3(ab-a^2-b^2)(ab(n+4)+1)]$, при изпълнени условията (A2).

Получени са подобрения на гореописаните граници (когато такива са възможни) при конкретно зададени параметри. Описани са необходимите условия за достигането на получените граници.

Теорема 6.3.1. Нека за някои фиксирани n, a и b, $C \in S_n(a,b)$ и полином $f(t)$ удовлетворяващ условията (A1) и (A2) имаме $|C| = f(1)/f_0$. Тогава от $\langle x, y\rangle = s$, $x, y \in C$, $x \neq y$ следва $f(s) = 0$. Освен това $f_i M_i = 0$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, k = deg(f)$. (Тук M_i са моментите за дизайна C (виж [1]).)

Глава 6 е написана въз основа на [29].

Апробация на резултатите

Резултатите в дисертационния труд се основават на работите [15] - [19], [25] - [29], които са публикувани или приети за публикуване както следва:

[17] - *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, (accepted),

[19] - *Problems of Information Transmission*, 2008, (accepted),

[25] - *Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski"*, (2004),

[26], [27], [29], [18] - *Proc. Intern. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, (2002, 2004, 2006, 2008),

[28], [16] - *Proc. Intern. Workshop Optimal Codes and Related Topics*, (2005, 2007);

[15] - *Scientific Research, a Journal of South-West University*, Blagoevgrad, (2007).

Статиите [15] - [19], [25] - [29] са в съавторство с Петър Бойваленков, [15] - [19] са в съавторство и със Силвия Бумова, а на [15] - [17] е съавтор и Христина Кулина.

Резултатите, представени в дисертацията, са докладвани на:

• Международните конференции по алгебрична и комбинаторна теория на кодирането: Царское село 2002, Кранево 2004, Звенигород 2006, Пампорово 2008;

• Международните конференции по оптимални кодове: Пампорово 2005, Бялата Лагуна 2007;

• $MASSEE$ Международен конгрес по математика, Боровец, 2003;

• $MASSEE$ Международен конгрес по математика MICOM-2006, Пафос, Кипър;

• Националните семинари по теория на кодирането: Стара Загора, 2001, Банкя, 2002, 2003, 2004, 2005, Бачиново, 2006, Боровец, 2007;

• Научната сесия на ФМИ (СУ), катедра Алгебра, 2008;

• Семинари по теория на кодирането в ИМИ (БАН);

• Семинари към катедра Алгебра, ФМИ (СУ), 2008.

Благодарности

Преди всичко искам да изкажа благодарност на научния си консултант ст.н.с. II ст. дмн Петър Бойваленков за многобройните напътствия, полезните съвети и безрезервната подкрепа, оказана по време на работата ми.

Искрено съм благодарна и на н.с. I ст. д-р Силвия Бумова за съвместната ни работа и помощта при оформянето на дисертацията.

Благодаря на всички колеги от катедра Алгебра към Факултета по Математика и Информатика на Софийски Университет, както и на колегите от секция МОИ при Института по Математика и Информатика на БАН за създадената творческа атмосфера за работа и за подкрепата, препоръките и помощта, оказана по време на работата ми, като специално искам да отбележа помощта на акад. проф. дмн Стефан Додунеков, проф. д-р Керопе Чакърян, проф. дмн Недялко Ненов и доц. д-р Евгения Великова.

Библиография

[1] K. Andreev, S. Boumova, P. Boyvalenkov, Moments of spherical codes and designs, Proc. Sixth Intern. Workshop ACCT, Bansko, Bulgaria, June 2000, 29-32.

[2] B. Bajnok, Construction of spherical t-designs, *Geom. Dedicata* 43, 1992, 167-179.

[3] B. Bajnok, Construction of spherical 3-designs, *Graphs Combin.* 14, 1998, 97-107.

[4] B. Bajnok, Spherical Designs and Generalized Sum-Free Sets in Abelian Groups, *Des. Codes Crypt.* 21, 2000, 11-18.

[5] Ei. Bannai, Et. Bannai, *Algebraic combinatorics on spheres*, Springer-Verlag, Tokyo, 1999

[6] E. Bannai, E. Bannai, D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance subset in real Euclidean space II, *Combin.* 3, 1983, 147-152.

[7] E. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs I, *J. Math. Soc. Japan* 31, 1979, 199-207.

[8] E. Bannai, R. M. Damerell, Tight spherical designs II, *J. London Math. Soc.* 21, 1980, 13-30.

[9] A. Blokhuis, *Few distance sets*, CWI Tracts No. 7, Math. Centrum, Amsterdam, 1984.

[10] S. P. Boumova, Applications of polynomials to spherical codes and designs, *PhD Thesis*, 2002.

[11] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Upper bounds on the minimum distance of spherical codes, *IEEE Trans. Inform. Theory* 41, 1996, 1576-1581.

[12] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, Necessary conditionds for existence of some designs in polynomial metric spaces, *Europ. J. Combin.* 20, 1999, 213-225.

[13] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, New nonexistence results for spherical designs, in Constructive Theory of Sunctions (B. Bojanov, Ed.) Darba, Sofia 2003, 225-232.

[14] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, The general method applied for 3-designs (contd.) Baltimore, 2003.

[15] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, New nonexistence results for spherical 5-designs, *Scientific Research, a Journal of South-West University*, Blagoevgrad, Bulgaria, 2007 (14 pages).

[16] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, New nonexistence results for spherical 5-designs, Proc. Intern. Workshop OC'07, June 2007, White Lagoon, Bulgaria, 30-35.

[17] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, Polynomial techniques for investigation of spherical designs. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, (accepted).

[18] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Nonexistence results for spherical 7-designs, Proc. Intern. Workshop ACCT–11, 16-22 June, 2008, Pamporovo, Bulgaria, 35-39.

[19] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, A method for proving nonexistence of spherical designs of odd strength and odd cardinality, *Problems of Information Transmission*, 2008, (accepted).

[20] P. G. Boyvalenkov, Computing distance distributions of spherical designs, *Lin. Alg. Appl.*, 226/228, 1995, 277-286.

[21] P. G. Boyvalenkov, Extremal polynomials for obtaining bounds for spherical codes and designs, *Discr. Comp. Geom.* 14, 1995, 167-183.

[22] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, I. N. Landjev, On maximal spherical codes II, *J. Combin. Des.* 7, 1999, 316-326.

[23] P. G. Boyvalenkov, D. P. Danev, S. I. Nikova, Nonexistence of certain spherical designs of odd strengths and cardinalities, *Discr. Comp. Geom.* 21, 1999, 143-156.

[24] P. G. Boyvalenkov, I. N. Landjev, On maximal spherical codes I, *Springer-Verlag Lect. Not. Comp. Sci.* 948, 1995, 158-168.

[25] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Spherical 2-distance sets which are spherical 3-designs, *Annuaire L'Univ Sofia*, 95, 2004, 53 - 58.

[26] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, On spherical (n, M, ℓ, τ)-sets, Proc. Intern. Workshop ACCT–8, 8-14 Sept. 2002, Tsarskoe Selo, Russia, 69-72.

[27] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Some methods for investigation of spherical designs, Proc. Intern. Workshop ACCT–9, 19-25 June, 2004, Kranevo, Bulgaria, 86-89.

[28] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Upper bounds on the covering radius of spherical designs, Proc. Intern. Workshop OC'05, 17-23 June, 2005, Pamporovo, Bulgaria, 53-58.

[29] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, Bounds on the cardinality of spherical codes with inner products in given range, Proc. Intern. Workshop ACCT–10, 3-9 September, 2006, Zvenigorod, Russia, 48-51.

[30] P. J. Cameron, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents, *J. Algebra* 55, 1978, 257-280.

[31] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[32] H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, Dover, Third Ed., New York, 1973.

[33] H. Davenport, G. Hajos, Aufgabe 35, *Math. Lapok* 58, 1951, No. 2.

[34] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata* 6, 1977, 363-388.

[35] P. Delsarte, J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Bounds for systems of lines, and Jacobi polynomials, *Philips Res. Reports*, 1975, 30:91*-105*.

[36] T. Ericson, V. Zinoviev, *Spherical codes*, Elsevier Science B. V., 2001.

[37] G. Fazekas, V. I. Levenshtein, On upper bounds for code distance and covering radius of designs in polynomial metric spaces, *J. Comb. Theory A*, 70, 1995, 267-288.

[38] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Spherical designs, *Proc. Symp. Pure Math.* 34, 1979, 255-272.

[39] J.-M. Goethals, J. J. Seidel, Cubature formulae, polytopes, and spherical designs, in *The Geometric Vein*, The Coxeter, Festschrift (C. Davis, B. Grünbaum, F. A. Sherk, Eds.), Springer, Berlin, 1982, 203-218.

[40] P. J. Grabner, R. F. Tichy, Spherical designs, discrepancy and numerical integration, *Math. Comput.* 60, 1991, 327-360.

[41] R. H. Hardin, N. J. A. Sloane, McLaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions, *Discr. Comp. Geom.* 15, 1996, 429-441.

[42] G. A. Kabatianskii, V. I. Levenshtein, Bounds for packings on a sphere and in space, *Probl. Inform. Transm.* 14, 1978, 1-17.

[43] J. Korevaar, J. L. H. Meyers, Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains, *J. Approx. Theory* 79, 1994, 144-164.

[44] V. I. Lebedev, Quadratures on the sphere, *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* 16, No. 2, 1976, 10-24.

[45] V. I. Levenshtein, On bounds for packings in n-dimensional Euclidean space, *Soviet Math. Doklady* 20, 1979, 417-421.

[46] V. I. Levenshtein, Bounds for packings in metric spaces and certain applications, *Probl. Kibern.* 40, 1983, 44-110 (in Russian).

[47] V. I. Levenshtein, Designs as maximum codes in polynomial metric spaces, *Acta Appl. Math.* 25, 1992, 1-82.

[48] V. I. Levenshtein, Universal bounds for codes and designs, chapter 6 in *Handbook of Coding Theory*, V. Pless and W. C. Huffman, Eds., Elsevier Science B.V., 1998.

[49] P. Lisonek, New maximal two-distance sets, *J. Comb. Theory* A77, 1997, 318-338.

[50] A. D. McLaren, Optimal numerical integration on the sphere, *Math. Comput.* 17, 1963, 361-383.

[51] A. Neumaier, J. J. Seidel, Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices, *Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 91 (*Indag. Math.* 50), 1988, 321-344.

[52] W. Neutch, Optimal spherical designs and numerical integrations on the sphere, *J. Comput. Phys.* 51, 1983, 313-325.

[53] W. Neutch, E. Schrüfer, A. Jessner, Efficient integration on the hypersphere, *J. Comput. Phys.* 59, 1985, 167-175.

[54] B. Reznick, Sums of even powers of real linear forms, *Mem. AMS*, No. 463, 1992.

[55] B. Reznick, Some constructions of spherical 5-designs, *Lin. Alg. Appl.* 226/228, 1995, 163-196.

[56] J. J. Seidel, Quasiregular two-distance sets, *Neder. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 72 (*Indag. Math.* 31), 1969, 64-70.

[57] J. J. Seidel, Eutactic stars, *Collog. Math. Soc. János Bolyai* 18, 1976, 983-999.

[58] P. Solé, The covering radius of spherical t-designs, J. Europ.een de Combinatoire, 12, 1991, 423-431.

[59] V. Yudin, Lower bounds for spherical designs, *Izv.: Math.* 3, 61, 1997, 673-683.

АВТОРСКА СПРАВКА

В представената дисертация е изследвана структурата на някои класове сферични кодове и дизайни.

Разгледани са (n, M, ℓ, τ)-множества за параметри $(\ell, \tau) = (2, 3)$, $(2, 2)$ и $(3, 5)$, където n е размерноста на разглежданото пространство, M е мощността на съответния сферичен код, ℓ е броят на различните му разстояния и τ е силата му като сферичен дизайн. За $(n, M, 2, 3)$-конфигурации е доказана т. нар. Лойд тип теорема, т.е. всичките им скаларни произведения са рационални числа. В случая $(\ell, \tau) = (2, 2)$ също е доказана Лойд тип теорема, но с едно изключение. Конструиран е сферичен код $C \subset \mathbb{S}^5$ с 13 точки, който е 2-дизайн и има две различни ирационални скаларни произведения (първият възможен случай на $(n, M, 2, 2)$-конфигурация, за която теорема на Лойд не е изпълнена). Доказано е, че $(n, M, 2, 3)$- и $(n, M, 3, 5)$-конфигурации съществуват точно тогава, когато са максимални сферични кодове, достигащи съответно границите на Левенщейн $L_3(n, s)$ и $L_5(n, s)$.

Получени са граници за скаларните произведения на точките на някои класове сферични дизайни. Описан е метод за получаване на необходими условия за съществуване на сферични дизайни с нечетна сила и нечетна мощност. Методът е основан на изследване на разпределението на скаларните произведения на сферични дизайни с относително малки нечетни мощности. Приложенията водят до получаване на резултати за несъществуване на сферични дизайни при сила $\tau = 3, 5$ и 7. В размерности $n = 8, 13, 14$ и 18 е приключено описанието на всички възможни мощности, за които съществуват 3-дизайни. Описаните техники подобряват и асимптотично долната граница за минималната възможна нечетна мощност на 3-дизайни.

Намерени са горни граници за радиуса на покритие на сферични дизайни. В някои случаи те са близки до известните долни граници на Фазекаш-Левенщейн. В частност, за антиподални 3-дизайни е установен точният порядък на радиуса на покритие при мощност $n(2 + \gamma)$, където $\gamma = const$ е положителна константа.

Изследвани са сферични кодове, чиито скаларни произведения са във фиксиран подинтервал на интервала $[-1; 1)$. Следвайки логиката на класическия случай, разработен от Левенщейн за интервала $[-1, s]$, първо са получени т. нар. граници на линейното програмиране и вида на полиномите, с чиято помощ могат да се получават такива граници. След това са намерени Левенщейн-тип граници за максималната възможна мощност на разглежданите кодове в първите случаи, като са описани и необходими условия за достигането на получените граници.

СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ ПО ДИСЕРТАЦИЯТА

[1] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *On spherical* (n, M, ℓ, τ)*-sets*, Proc. Intern. Workshop ACCT–8, 8-14 September, 2002, Tsarskoe Selo, Russia, 69-72.

[2] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *Spherical 2-distance sets which are spherical 3-designs*, Annuaire L'Univ Sofia, Fac. Math. and Inform., 95, 2004, 53-58.

[3] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *Some methods for investigation of spherical designs*, Proc. Intern. Workshop ACCT–9, 19-25 June, 2004, Kranevo, Bulgaria, 86-89.

[4] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *Upper bounds on the covering radius of spherical designs*, Proc. Intern. Workshop OC'05, 17-23 June, 2005, Pamporovo, Bulgaria, 53-58.

[5] P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *Bounds on the cardinality of spherical codes with inner products in given range*, Proc. Intern. Workshop ACCT–10, 3-9 September, 2006, Zvenigorod, Russia, 48-51.

[6] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *New nonexistence results for spherical 5-designs*, Scientific Research, a Journal of South-West University, Blagoevgrad, Bulgaria, 2007, (14 pages).

[7] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *New nonexistence results for spherical 5-designs*, Proc. Intern. Workshop OC'07, June 2007, White Lagoon, Bulgaria, 30-35.

[8] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, H. Kulina, M. M. Stoyanova, *Polynomial techniques for investigation of spherical designs*, Designs, Codes and Cryptography, 2008, (accepted).

[9] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *Nonexistence results for spherical 7-designs*, Proc. Intern. Workshop ACCT–11, 16-22 June, 2008, Pamporovo, Bulgaria, 35-39.

[10] S. P. Boumova, P. G. Boyvalenkov, M. M. Stoyanova, *A method for proving nonexistence of spherical designs of odd strength and odd cardinality*, Problems of Information Transmission, 2008, (accepted).

ON THE STRUCTURE OF SOME SPHERICAL CODES AND DESIGNS

SUMMARY

The structure of some spherical codes and designs is investigated in this thesis. We consider (n, M, ℓ, τ)-sets for parameters $(\ell, \tau) = (2, 3), (2, 2)$ and $(3, 5)$, where n is the dimension of the Euclidean space in consideration, M is the cardinality of the corresponding spherical code, ℓ is the number of its different distances and τ is its strength as spherical design. A Lloyd type theorem is proved for $(n, M, 2, 3)$-sets, i.e. all their inner products are rational numbers. A Lloyd type theorem is also proved in the case $(\ell, \tau) = (2, 2)$ with one exception. A spherical code $C \subset \mathbb{S}^5$ of 13 points is constructed, which is a 2-design and it has two different irrational inner products (this is the first possible case of $(n, M, 2, 2)$-set for which Lloyd type theorem does not hold). It is proved that $(n, M, 2, 3)$- and $(n, M, 3, 5)$-sets exist if and only if they are maximal spherical codes reaching Levenshtein's bounds $L_3(n, s)$ and $L_5(n, s)$ accordingly.

Bounds for the inner products of the points of some spherical designs are obtained. Upper bounds on the maximal inner product and lower bounds on the minimum inner product are obtained in general and in explicit form for small τ. A method of generating necessary conditions of existence of spherical designs is described. The method is based on the investigation of the distribution of inner products. The applications lead to obtaining nonexistence results of spherical designs for strength $\tau = 3, 5$ and 7. The described techniques improve the asymptotic lower bound on minimal possible odd cardinality of 3-designs. Upper bounds of the covering radius of spherical designs are obtained. In some cases they conform well to the known lower bounds of Fazekas-Levenshtein. In particular the exact magnitude of the covering radius for cardinality $n(2 + \gamma)$, where γ is a positive constant, is established for antipodal 3-designs.

Spherical codes, for which the inner products are in a fixed subinterval of the interval $[-1; 1)$, are investigated. Following the logic of the classical case developed by Levenshtein is $[-1, s)$, we obtain first the so-called linear programming bounds and the kind of polynomials using which we can obtain such bounds. Then we find Levenshtein type bounds for the maximal possible cardinality of the considered codes in the first cases and necessary conditions to the obtained bounds are also described.