[84]

Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 31, N° 6, 1978

МАТЕМАТИКА
Топология

УСИЛЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ГРИЙНВУДА И ГЛИСОНА О РАСКРАСКАХ РЕБЕР ПОЛНОГО ГРАФА С ДЕВЯТЬЮ ВЕРШИНАМИ

Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов

(Представлено чл.-корреспондентом Я. Тагамлицким 16. II. 1978)

Грийнвудом и Глисоном в [1] было доказано, что если любое из ребер полного графа с девятью вершинами K_9 раскрасить в один из двух цветов — красный или зеленый — то всегда имеется либо зеленый тетраэдр, либо красный треугольник. Нам удается усилить это, утверждая, что за исключением трех случаев имеются либо три зеленые тетраэдра, либо два красные треугольника, либо одновременно зеленый тетраэдр и красный треугольник.

Определение 1. Если любое из ребер полного графа K_n покрашено в зеленый или красный цвет, тогда будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа K_n.

Определение 2. Будем говорить, что две 2-раскраски ребер полного графа K_n изоморфны, если существует такая подстановка σ множества его вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$, что ребра $[v_i, v_j]$ и $[\sigma(v_i), \sigma(v_j)]$ имеют одинаковый цвет.

Рассмотрим симметрическую матрицу

$$M(a, b, c)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a & b & c & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Положим $M(1, 1, 0)=A$, $M(0, 1, 0)=B$, $M(0, 0, 0)=C$.

Основные результаты:

Теорема 1. В любой 2-раскраске ребер графа K_9 без красных треугольников обязательно имеются хотя бы три зеленые тетраэдра за исключением двух случаев, заданных посредством матриц смежности A и B зеленого графа (зеленый граф данной 2-раскраске графа K_n называется граф, множество ребер которого совпадает с множеством всех зеленых ребер K_n). Матрица A задает единственную с точностью до изоморфизма 2-раскраску ребер графа K_9 без красных треугольников, в которой есть точно два зеленые тетраэдра. Матрица B задает единственную с точностью до изоморфизма 2-раскраску ребер K_9 без красных треугольников, в которой есть точно один зеленый тетраэдр.

Теорема 2. В любой 2-раскраске ребер графа K_9 без зеленых тетраэдров обязательно имеются хотя бы два красных треугольника за исключением одного единственного случая, заданного посредством матрицы смежности C зеленого графа. Матрица C задает единственную с точностью до изоморфизма 2-раскраску ребер графа K_9 без зеленых тетраэдров, в которой есть точно один красный треугольник.

Так как доказательства этих теорем грамоздки, мы их в этой работе проводить не будем. Они будут опубликованы в [2].

Теперь докажем несколько предложений.

Предложение 1. Группа автоморфизмов графа, заданного посредством матрицы смежности B, изоморфна симметрической группе четвертой степени S_4.

Доказательство. Так как $[v_3, v_5, v_8, v_9]$ — единственный тетраэдр рассматриваемого графа, то любой автоморфизм этого графа переводит этот тетраэдр в себя. Следовательно, существует гомоморфизм χ группы автоморфизмов рассматриваемого графа в группу S_4. Рассмотрим автоморфизмы этого графа

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 6 & 8 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 9\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 6 & 9 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8\end{pmatrix}.$$

Очевидно $\chi(\varphi_1)$ и $\chi(\varphi_2)$ пораждают все автоморфизмы тетраэдра $[v_3, v_5, v_8, v_9]$, и, следовательно, χ является эпиморфизмом. Чтобы завершить доказательство предложения, нужно показать, что ядро $\ker\chi$ содержит только тождественный автоморфизм. Действительно, пусть $\varphi\in\ker\chi$, т. е.

$$\varphi(v_3)=v_3,\quad \varphi(v_5)=v_5,\quad \varphi(v_8)=v_8 \text{ и } \varphi(v_9)=v_9.$$

Так как v_4 единственная вершина, которая несмежна одновременно вершинам v_3, v_5 и v_9, то $\varphi(v_4)=v_4$. Вершина v_2 единственная вершина, которая смежна одновременно вершинам v_4, v_5 и v_8. Следовательно, $\varphi(v_2)=v_2$. Вершина v_1 единственная вершина, которая несмежна одновременно вершинам v_2, v_5 и v_8. Следовательно, $\varphi(v_1)=v_1$. Так как v_6 единственная вершина, которая смежна одновременно всем вершинам v_1, v_2, v_3, v_4 и v_5, то $\varphi(v_6)=v_6$. Так как $\varphi(v_i)=v_i$ при $i\neq 7$, то $\varphi(v_7)=v_7$. Предложение 1 доказано полностью.

Предложение 2. Группа автоморфизмов графа, заданного посредством матрицы смежности A, изоморфна элементарной абелевой группе четвертого порядка.

Доказательство. Пусть φ произвольный автоморфизм расматриваемого графа. Так как v_9 единственная вершина, которая имеет степень шесть, то $\varphi(v_9)=v_9$. Вершины v_2 и v_6 единственные вершины, которые несмежны v_9, так что $\varphi(v_2)=v_2$ и $\varphi(v_6)=v_6$, или $\varphi(v_2)=v_6$ и $\varphi(v_6)=v_2$. Следовательно, существует гомоморфизм χ группы автоморфизмов рассматриваемого графа в циклическую группу второго порядка. Так как

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 6 & 8 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

является автоморфизмом рассматриваемого графа, то χ является эпиморфизмом. Теперь рассмотрим ядро этого эпиморфизма $\ker\chi$. Пусть $\varphi\in\ker\chi$, т. е. $\varphi(v_2)=v_2$ и $\varphi(v_6)=v_6$, и пусть φ — нетождественный автоморфизм. Так как v_4 и v_5 единственные вершины, которые смежны одновременно вершинам v_2 и v_6, то $\varphi(v_4)=v_4$ и $\varphi(v_5)=v_5$, или $\varphi(v_5)=v_4$ и $\varphi(v_4)=v_5$. Легко проверить, что первой возможности на самом деле не представляется. Очевидно $\varphi(v_7)=v_8$ и $\varphi(v_8)=v_7$, так как v_7 единственная вершина (кроме v_6), которая смежна v_2 и v_4, а v_8 — единственная вершина, (кроме v_6), которая смежна v_2 и v_5. Легко сообразить тоже, что $\varphi(v_1)=v_3$ и $\varphi(v_3)=v_1$, следовательно,

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&2&1&5&4&6&8&7&9\end{pmatrix}$$

Итак, $\ker\chi$ содержит точно два элемента. Следовательно группа автоморфизмов рассматриваемого графа имеет четыре элемента. Так как эта группа имеет два элемента второго порядка (φ и φ_1), то она элементарная абелева группа четвертого порядка.

Предложение 2 доказано полностью

Предложение 3. Группа автоморфизмов графа, заданного посредством матрицы смежности C, изоморфна группе симметрий правильного шестиугольника, т. е. диэдральной группе 6-ой степени D_6.

Доказательство. Любой автоморфизм рассматриваемого графа задает некоторый автоморфизм подграфа Γ, порожденного множеством вершин $v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8$, потому что $[v_4, v_5, v_9]$ единственный красный треугольник. Так как дополнение $\overline{\Gamma}$ графа Γ является гамильтоновым циклом, то группа автоморфизмов графа Γ изоморфна группе D_6. Следовательно, существует гомоморфизм χ группы автоморфизмов рассматриваемого графа в группу D_6. Так как подстановки

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&2&1&5&4&6&8&7&9\end{pmatrix} \text{ и } \varphi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\2&3&7&5&9&8&6&4&1\end{pmatrix}$$

являются автоморфизмами всего графа и, $\chi(\varphi_1)$ и $\chi(\varphi_2)$ пораждают всю группу D_6, то χ — эпиморфизм. Докажем, что χ является изоморфизмом, т. е. что $\ker\chi$ содержит только тождественный автоморфизм. Действительно, пусть $\varphi\in\ker\chi$, т. е. $\varphi(v_1)=v_1$, $\varphi(v_2)=v_2$, $\varphi(v_3)=v_3$, $\varphi(v_6)=v_6$, $\varphi(v_7)=v_7$, $\varphi(v_8)=v_8$. Так как v_9 единственная вершина, которая смежна вершинам v_1, v_8, v_3, v_7, то $\varphi(v_9)=v_9$. Легко сообразить, что $\varphi(v_4)=v_4$ и $\varphi(v_5)=v_5$. Предложение 3 доказано полностью.

Следствие 1. Число всех 2-раскрасок ребер графа K_9 без красных треугольников и с неболее двух зеленых тетраэдров равно 105840. Из них 90720 изоморфны 2-раскраске, заданной с помощью матрицы A, а остальные изоморфны 2-раскраске, заданной с помощью B (см. теорему 1).

Следствие 2. Число всех 2-раскрасок ребер графа K_9 без зеленых тетраэдров и с не более одного красного треугольника равно 30240. Все они изоморфны 2-раскраске, заданной с помощью матрицы C (см. теорему 2).

Институт математики
Болгарской академии наук
София, Болгария

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Greenwood, A. Gleason. Canad. J. Math. 7, 1955, 1. [2] Н. Ненов, Н. Хаджииванов. Годишник СУ. 71 (в печати).