ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
Том 73 Факултет по математика и механика 1979
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI“
Tome 73 Faculté de Mathématiques et Mécanique 1979

[80]

О (3, 4)-ГРАФАХ РАМСЕЯ

Недялко Д. Ненов

I. **Введение и формулировка результатов.** Рассматриваются только конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа G, если любое из них покрашено в красный или зеленый цвет.

Определение 2. Будем говорить, что вершины $v_1, \ldots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны.

Определение 3. Если в 2-раскраске ребер графа все ребра некоторой p-клики имеют одинаковый цвет, будем говорить, что это одноцветная p-клика в данной 2-раскраске.

Теорема Рамсея [1] утверждает, что существует натуральное число $R(p, q)$ такое, что в любой 2-раскраске ребер полного графа с $R(p, q)$ вершинами существует либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика, однако полный граф с $R(p, q)-1$ вершинами обладает 2-раскраской ребер без красной одноцветной p-клики и без зеленой одноцветной q-клики. Пока известны только следующие из чисел $R(p, q)$ [2]: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$, $R(3, 6) = 18$, $R(3, 7) = 23$, $R(4, 4) = 18$.(очевидно $R(p, q) = R(q, p)$).

Определение 4. Будем говорить, что граф G является (p, q)-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его ребер есть либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика.

Определение 5. Если граф G содержит p-клику, но не содержит $(p+1)$-клику, будем говорить, что граф G имеет кликовое число p, и писать $\mathrm{cl}(G) = p$.

Из теоремы Рамсея следует, что, если $\mathrm{cl}(G) \geqq R(p, q)$, то граф G является (p, q)-графом Рамсея.

Через $N((p, q); r)$ обозначим наименьшее натуральное число со следующим свойством: существует (p, q)-граф Рамсея G, который имеет $N((p, q); r)$ вершин и $\mathrm{cl}(G) < r$.

Ясно, что число $N((p, q); r)$ имеет смысл только когда $r > \max(p, q)$. Существование чисел $N((p, q); r)$, когда $r > R(p, q)$, следует из теоремы Рамсея. Очевидно, если $r > R(p, q)$, то $N((p, q); r) = R(p, q)$. В [3] доказано, что числа $N((p, q); r)$ существуют для любых натуральных p, q и $r > \max(p, q)$. В [5] доказано, что $N((3, 3); 6) \leqq 8$, а в [4] доказано, что $N((3, 3); 6) \geqq 8$. Следовательно $N((3, 3); 6) = 8$. В [9] доказано, что $N((3, 3); 5) \leqq 16$, а в [11] — $N((3, 3); 5) \geqq 11$. Тем самым $11 \leqq N((3, 3); 5) \leqq 16$. Отметим, что для числа $N((3, 3); 4)$ практически ничего