ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
Том 73 Факултет по математика и механика 1979
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI“
Tome 73 Faculté de Mathématiques et Mécanique 1979

О (3, 4)-ГРАФАХ РАМСЕЯ

Недялко Д. Ненов

I. **Введение и формулировка результатов.** Рассматриваются только конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Будем говорить, что задана 2-раскраска ребер графа G, если любое из них покрашено в красный или зеленый цвет.

Определение 2. Будем говорить, что вершины $v_1, \ldots, v_p$ графа G составляют p-клику, если любые две из них смежны.

Определение 3. Если в 2-раскраске ребер графа все ребра некоторой p-клики имеют одинаковый цвет, будем говорить, что это одноцветная p-клика в данной 2-раскраске.

Теорема Рамсея [1] утверждает, что существует натуральное число $R(p, q)$ такое, что в любой 2-раскраске ребер полного графа с $R(p, q)$ вершинами существует либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика, однако полный граф с $R(p, q)-1$ вершинами обладает 2-раскраской ребер без красной одноцветной p-клики и без зеленой одноцветной q-клики. Пока известны только следующие из чисел $R(p, q)$ [2]: $R(3, 3)=6$, $R(3, 4)=9$, $R(3, 5)=14$, $R(3, 6)=18$, $R(3, 7)=23$, $R(4, 4)=18$.(очевидно $R(p, q)=R(q, p)$).

Определение 4. Будем говорить, что граф G является (p, q)-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его ребер есть либо одноцветная красная p-клика, либо одноцветная зеленая q-клика.

Определение 5. Если граф G содержит p-клику, но не содержит $(p+1)$-клику, будем говорить, что граф G имеет кликовое число p, и писать $\mathrm{cl}(G)=p$.

Из теоремы Рамсея следует, что, если $\mathrm{cl}(G) \geqq R(p, q)$, то граф G является (p, q)-графом Рамсея.

Через $N((p, q); r)$ обозначим наименьшее натуральное число со следующим свойством: существует (p, q)-граф Рамсея G, который имеет $N((p, q); r)$ вершин и $\mathrm{cl}(G)<r$.

Ясно, что число $N((p, q); r)$ имеет смысл только когда $r>\max(p, q)$. Существование чисел $N((p, q); r)$, когда $r>R(p, q)$, следует из теоремы Рамсея. Очевидно, если $r>R(p, q)$, то $N((p, q); r)=R(p, q)$. В [3] доказано, что числа $N((p, q); r)$ существуют для любых натуральных p, q и $r>\max(p, q)$. В [5] доказано, что $N((3, 3); 6) \leqq 8$, а в [4] доказано, что $N((3, 3); 6) \geqq 8$. Следовательно $N((3, 3); 6)=8$. В [9] доказано, что $N((3, 3); 5) \leqq 16$, а в [11] — $N((3, 3); 5) \geqq 11$. Тем самым $11 \leqq N((3, 3); 5) \leqq 16$. Отметим, что для числа $N((3, 3); 4)$ практически ничего неизвестно. Лин [4] доказал, что $N((3, 4); 9) \geqq 12$, $N((3, 5); 14) = 16$, $N((4, 4); 18) = 20$.

В настоящей работе мы построим бесконечную серию $(3, 4)$-графов Рамсея и в качестве следствия получим, что $N((3, 4); 9) \leqq 14$. Тоже в качестве следствия получим, что существуют бесконечно много критических $(3, 4)$-графов Рамсея.

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Если $v_1, \dots, v_k$ — множество вершин графа G, то чрез $< v_1, \dots, v_k >$ обозначим подграф графа G, порожденный множеством вершин $v_1, \dots, v_k$, т. е. $V(< v_1, \dots, v_k >) = \{v_1, \dots, v_k\}$ и $E(< v_1, \dots, v_k >)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Пусть G_1 и G_2 два графа без общих вершин, т. е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. Следуя Зыкову [7], под соединением $G_1 + G_2$ графов G_1 и G_2 будем подразумевать граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{12}$, где E_{12} состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$, $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Отметим следующее простое свойство этой операции [7]:

(1) $\quad \mathrm{cl}\,(G_1 + G_2) = \mathrm{cl}\,(G_1) + \mathrm{cl}\,(G_2).$

Чрез C_n обозначим простой цикл длины n, через K_n — полный граф с n вершинами, а через $\chi(G)$ — хроматическое число графа G.

Определение 6. Будем говорить, что (p, q)-граф Рамсея является критическим (p, q)-графом Рамсея, если любой его собственный подграф не является (p, q)-графом Рамсея.

В этой работе будут доказаны:

Теорема. Для любых натуральных чисел r и s граф $F(r, s) = C_{2r+1} + C_{2s+1} + K_4$ является $(3, 4)$-графом Рамсея.

Следствие 1. Граф $A + B + K_4$ является $(3, 4)$-графом если $\chi(A) \geqq 3$ и $\chi(B) \geqq 3$.

Следствие 2. $N((3, 4); 9) \leqq 14$.

Следствие 3. Существует бесконечно много неизоморфных критических $(3, 4)$-графов Рамсея, которые являются подграфами графов $F(r, s)$.

Для доказательства теоремы нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1 [4]. Пусть G граф и $\chi(G) < R(p, q)$. Тогда G не является (p, q)-графом Рамсея. В частности для $(3, 4)$-графа Рамсея G имеем $\chi(G) \geqq 9$.

Лемма 2 [8]. Граф $C_3 + A$ является $(3, 3)$-графом Рамсея, если подграф A содержит простой цикл нечетной длины или, что тоже самое [6], если $\chi(A) \geqq 3$.

Лемма 3 [10]. Пусть граф $G = C_{2r+1} + C_{2s+1}$, $r > 1$, $s > 1$. Тогда в любой 2-раскраске ребер графа G без одноцветных треугольников все ребра циклов C_{2r+1} и C_{2s+1} имеют одинаковый цвет.

Пусть дана некоторая 2-раскраска ребер графа G и v вершина этого графа. Через $A(v)$ обозначим множество всех вершин графа G, которые смежны вершине v, через $A_k(v)$ — множество всех вершин графа G, которые связаны с вершиной v красным ребром, а через $A_3(v)$ — множество всех вершин графа G, которые связаны с вершиной v зеленым ребром.

Лемма 4. Пусть G не является $(3, 4)$-графом Рамсея. Рассмотрим произвольную 2-раскраску ребер графа G без красных треугольников и без зеленых 4-клик. Тогда для этой 2-раскраски имеем

(2) $\quad \mathrm{cl}\,(< A_k(v) >) \leqq 3,$

(3) подграф $< A_3(v) >$ не содержит одноцветных треугольников.

II. **Сводка обозначений.**

$V(G)$ — множество вершин графа G,

$E(G)$ — множество ребер графа G,

$\mathrm{cl}(G)$ — кликовое число графа G,

$\chi(G)$ — хроматическое число графа G,

$< v_1, \ldots, v_k >$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин $v_1, \ldots, v_k$,

C_n — простой цикл длины n,

K_n — полный граф с n вершинами,

$A(v)$ — множество весех вершин, смежных вершине v,

$A_k(v)$ — множество всех вершин, связанных с вершиной v красным ребром в фиксированной 2-раскраске ребер,

$A_3(v)$ — множество всех вершин, связанных с вершиной v зеленым ребром в фиксированной 2-раскраске ребер.

III. **Доказательства леммы 4, теоремы и следствий.**

Доказательство леммы 4. Допустим, что $\mathrm{cl}(< A_k(v) >) \geqq 4$.Тогава подграф $< A_k(v) >$ содержит некоторую 4-клику $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Если хотя бы одно из ребер этой 4-клики красное, то будет красный треугольник с вершиной v. Иначе $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ является одноцветной зеленой 4-кликой. Теперь допустим, что подграф $< A_3(v) >$ содержит одноцветный треугольник. Так как нет красных треугольников, то $< A_3(v) >$ содержит зеленый треугольник. Вместе с вершиной v этот зеленый треугольник образует одноцветную зеленую 4-клику. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 4.

Доказательство теоремы. Пусть $V(C_{2r+1}) = \{v_1, \ldots, v_{2r+1}\}$, $V(C_{2s+1}) = \{w_1, w_2, \ldots, w_{2s+1}\}$ и $V(K_4) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Если хотя бы одно из чисел r, s равно единице, утверждение теоремы следует из теоремы Рамсея, так как, согласно (1), $\mathrm{cl}(F(r, s)) = 9$. Поэтому будем предполагать, что $r > 1$ и $s > 1$.

Допустим, что граф $F(r, s)$, $r > 1$, $s > 1$, не является (3, 4)-графом. Зафиксируем какую-нибудь 2-раскраску ребер графа $F(r, s)$ без красных одноцветных треугольников и зеленых одноцветных 4-клик. Рассмотрим три случая:

Случай 1. Существуют три красные ребра подграфа K_4, которые имеют общую вершину. Без ограничения общности можно предположить, что ребра $[z_1, z_2]$, $[z_1, z_3]$, $[z_1, z_4]$ — красные. Так как нет красных треугольников, то все ребра треугольника $[z_4, z_2, z_3]$ — зеленые. Заметим, что либо $E(< A_k(z_2) \cap V(C_{2r+1}) >) \neq \varnothing$, либо $E(< A_k(z_2) \cap V(C_{2s+1}) >) \neq \varnothing$ (иначе, согласно лемме 2, $< A_3(z_2) >$ является (3, 3)-графом, что противоречит (3)). Без ограничения общности можно предположить, что $E(< A_k(z_2) \cap V(C_{2r+1}) >) \neq \varnothing$ и что $v_1, v_2 \in A_k(z_2)$, т. е. ребра $[v_1, z_2]$ и $[v_2, z_2]$ — красные. Тогда

(4) $$\text{ребро } [v_1, v_2] \text{ — зеленое.}$$

Из (2) следует, что ребра $[z_1, v_i]$, $[z_1, w_j]$, $i = 1, 2, \ldots; 2\,r + 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2\,s + 1$, — зеленые. Согласно (3), подграф $C_{2r+1} + C_{2s+1}$ не содержит одноцветных треугольников. Согласно лемме 3, все ребра циклов C_{2r+1} и C_{2s+1} имеют одинаковый цвет в рассматриваемой 2-раскраске. Из (4) следует, что все ребра циклов C_{2r+1} и C_{2s+1} — зеленые. Так как $z_1, v_1, v_2 \in A_k(z_2)$, то, согласно (2), все ребра $[z_2, w_i]$, $i = 1, 2, \ldots, 2\,s + 1$, — зеленые, т. е. $A_3(z_2) \supset V(C_{2s+1})$. Аналогичным образом для вершины z_3 доказывается, что либо $V(C_{2r+1}) \subset A_3(z_3)$, либо $V(C_{2s+1}) \subset A_3(z_3)$, а для вершины z_4 — $V(C_{2r+1}) \subset A_3(z_4)$, либо $V(C_{2s+1}) \subset A_3(z_4)$. Заметим, что $V(C_{2s+1}) \not\subset A_3(z_3)$ (иначе все ребра 4-клики $[z_2, z_3, w_1, w_2]$ — зеленые), а также, что $V(C_{2s+1}) \not\subset A_3(z_4)$ (иначе все ребра 4-клики $[z_2, z_4, w_1, w_2]$ — зеленые). Следовательно, $V(C_{2r+1}) \not\subset A_3(z_3) \cap A_3(z_4)$. Из этого следует, что все ребра 4-клики $[z_3, z_4, v_1, v_2]$ — зеленые.

В случае 1 теорема доказана.

Случай 2. Существуют ровно два красные ребра подграфа K_4, которые имеют общую вершину. Без ограничения общности можно предположить, что ребра $[z_1, z_2]$ и $[z_1, z_3]$ — красные, а ребро $[z_1, z_4]$ — зеленое. Заметим, что либо $V(C_{2r+1}) \subset A_3(z_1)$, либо $V(C_{2s+1}) \subset A_3(z_1)$ (иначе $\mathrm{cl}(< A_k(z_1) >) \geqq 4$, что противоречит (2)). Без ограничения общности можно предположить, что $V(C_{2r+1}) \subset A_3(z_1)$. Из (2) вытекает, что $E(< A_k(z_1) \cap V(C_{2s+1}) >) = \varnothing$. Следовательно, $E(< A_3(z_1) \cap V(C_{2s+1}) >) \neq \varnothing$. Без ограничения общности можно предположить, что $[w_1, w_2] \in E(< A_3(z_1) >)$. Из сделанных рассуждений получаем, что граф $< A_3(z_1) >$ содержит в качестве подграфа граф $< z_4, w_1, w_2 > + C_{2r+1}$. Это противоречит (3), так как, согласно лемме 2, граф $< z_4, w_1, w_2 > + C_{2r+1}$ является (3, 3)-графом Рамсея.

В случае 2 теорема доказана.

Случай 3. В подграфе K_4 нет инцидентных красных ребер. В K_4 должно быть хотя бы одно красное ребро. Без ограничения общности можно предположить, что ребро $[z_1, z_2]$ — красное. Тогда $[z_1, z_3]$, $[z_1, z_4]$, $[z_2, z_3]$, $[z_2, z_4]$ — зеленые.

Заметим, что либо $E(< A_3(z_1) \cap V(C_{2r+1}) >) = \varnothing$, либо $E(< A_3(z_1) \cap V(C_{2s+1}) >) = \varnothing$ (иначе, согласно лемме 2, подграф $< A_3(z_1) >$ является (3, 3) -графом Рамсея, что противоречит (3)). Без ограничения общности можно предположить, что $E(< A_3(z_1) \cap V(C_{2r+1}) >) = \varnothing$. Предположим, для определенности, что $[v_1, v_2] \in E(< A_k(z_1) >)$. Из $z_2, v_1, v_2 \in A_k(z_1)$ следует

(5) $$V(C_{2s+1}) \subset A_3(z_1)$$

(иначе $\mathrm{cl}(< A_k(z_1) >) \geqq 4$, что противоречит (2)). Из (5) следует

(6) $$V(C_{2r+1}) \subset A_k(z_1)$$

(иначе, согласно лемме 2, подграф $< A_3(z_1) >$ является (3, 3)-графом, что противоречит (3)).

(7) Все ребра цикла C_{2r+1} — зеленые (иначе будет красный треугольник).

Из (6) вытекает

(8) $$V(C_{2r+1}) \subset A_3(z_2)$$

(иначе будет красный треугольник).

Из (8) следует

(9) $$V(C_{2r+1}) \subset A_k(z_2)$$

(иначе $< A_3(z_2) >$, согласно лемме 2, будет (3, 3)-графом, что противоречит (3)).

(10) Все ребра цикла C_{2s+1} — зеленые (иначе будет красный треугольник).

Из (5) и (10) следует

(11) $$E\ (<A_3(z_3)\ \cap\ V(C_{2s+1})>\ ) = \varnothing\,.$$

Из (11) вытекает

(12) $$E\ (<A_k(z_3)\ \cap\ V\ (C_{2s+1})>\ ) \neq \varnothing\,.$$

Из (7) и (8) следует

(13) $$E\ (<A_3(z_3)\ \cap\ V\ (C_{2r+1})>\ ) = \varnothing\,.$$

Из (13) следует

(14) $$E\ (<A_k(z_3)\ \cap\ V(C_{2r+1})>) \neq \varnothing\,.$$

Из (12) и (14) вытекает $\mathrm{cl}\ (<A_k(z_3)>) \geqq 4$. Это противоречит (2). Теорема доказана полностью.

Доказательство следствия 1. Согласно теореме Кенига [6], графы A и B содержат простые циклы нечетной длины. Следовательно граф G содержит подграф, который изоморфен некоторому из графов $F(r, s)$.

Доказательство следствия 2. Рассмотрим граф $F(2, 2)$. Согласно доказанной теореме, $F(2, 2)$ является (3, 4)-графом Рамсея. Очевидно $\mathrm{cl}\,(C_5) = 2$. Из (1) следует $\mathrm{cl}\,(F(2, 2)) = 8$. Ясно, что $|\,V(\,F(2, 2))\,| = 14$. Следовательно, $N\ ((3, 4)\ ;\ 9) \leqq 14$.

Доказательство следствия 3. Рассмотрим (3, 4)-графы рамсея $F\ (r, r)$. Пусть $|\,V\,(F\,(r, r))\,| = n$ (n — четное). Пусть G является критическим (3, 4)-графом, который содержится в графе $F\ (r, r)$ в качестве подграфа. Согласно лемме 1, $\chi\ (G) \geqq 9$. Из последнего неравенства вытекает, что $|\,V(G)\,| \geqq 2\,r + 6 > \frac{n}{2}$. Отсюда следует, что существует бесконечно много критических (3, 4)-графов, любые два из которых имеют разное количество вершин. Ясно, что эти критические (3, 4)-графы неизоморфны.

Следствие 3 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ramsey P.: On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc., **30**, 1930, 264 — 286.
2. Graver J., Yackel J.: Some graph theoretic results associated with Ramsey's theorem. J. Combin. Theory, **3**,1968, 1 — 51.
3. Folkman J.: Grapns with monochromatic complete subgraphs in every edge coloring. SIAM J. Appl. Math., **18**, 1970, 19 — 24.
4. Lin S.: On Ramsey Numbers and $\vec{\mathrm{K}}_r$ — Coloring of graphs. J. Combin. Theory, ser. B, **12**, 1972, 82 — 92.
5. Graham R.: On edgewise 2-colored graphs with monochromatic triangles an containg no complete hexagon. J. Combin. Theory, **4**, 1968, p. 300.
6. Konig D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
7. Зыков А.: О некоторых свойствах линейных комплексов. Мат. сборник, **24**, 1949, 163 — 168.
8. Ненов Н., Хаджииванов Н.: О графах,содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. Сердика, **5**, 1979, 303 — 305.
9. Ненов Н., Хаджииванов Н.: О числе Грахама — Спенсера. Докл. БАН, **32**, 1972, 155 — 157.
10. Хаджииванов Н., Ненов Н.: t-графы с кликовым числом, равным 4. Математика и математическо образование. Докл. на VIII прол. конф. на СМБ. София, БАН, 1979, 565 — 577.
11. Ненов Н.: Новая оценка снизу для числа Грахама — Спенсера N (3, 5). Сердика, **6**, 1980, 373 — 383.

Постъпила на 7. III. 1980 г.

ON THE RAMSEY (3, 4)-GRAPHS

N. Nenov

(SUMMARY)

In this paper the following theorem and their 3 corollaries are proved:

Theorem. For every two integers r, s the graph $F(r, s) = C_{2r+1} + C_{2s+1} + K_4$ is a Ramsey (3, 4)-graph.

Corollary 1. Graph $A + B + K_4$ is a Ramsey (3, 4)-graph, if $\chi(A) \geqq 3$ and $\chi(B) \geqq 3$.

Corollary 2. $N((3, 4); 9) \leqq 14$.

Corollary 3. There exists an infinite number of critical Ramsey (3, 4)-graphs.