ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
Том 74 ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 1980
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
Tome 74 FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE 1980

71

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЕЛ ЗЫКОВА В ТЕОРИЮ РАМСЕЯ

Недялко Д. Ненов

Н. Д. Ненов. **Некоторые применения чисел Зыкова в теорию Рамсея.**

Через $H(r,r+1)$ обозначим множество всех графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\chi(G) \geqq r+1$, где $\mathrm{cl}(G)$ и $\chi(G)$ означают соответветственно кликовое число и хроматическое число графа G. В работе доказывается, что, если граф $G \in H(r,r+1)$, то он имеет не менее $r+3$ вершин. Описаны все графы из $H(r,r+1)$ с $r+3$ и $r+4$ вершинами. Полученые результаты применяются в теорию Рамсея.

N. D. Nenov. **Some applications of Zykov's numbers in Ramsey's theory.**

Let $H(r,r+1)$ denote the set of all graphs G for which $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ and $\chi(G) \geqq r+1$, where $\mathrm{cl}(G)$ and $\chi(G)$ are the clique number and the chromatic number, respectively.
In this paper we prove that if the graph $G \in H(r,r+1)$ then it has at least $r+3$ vertices. We describe all graphs of $H(r,r+1)$ with $r+3$ and $r+4$ vertices. The results obtained are applied in Ramsey's theory.

I. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматриваются только конечные, неориентированные графы, без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаем соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1 v_2] \in E(G)$, говорят, что вершины v_1 и v_2 смежные.

Определение 1. Будем говорить что множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G является *p-кликой*, если любые две из них смежны.

Ясно, что ребра графа G являются 2-кликами, а треугольники — 3-кликами графа G.

Определение 2. Через $\mathrm{cl}(G)$ обозначим наибольшее натуральное число p со следующим свойством: граф G обладает p-кликой. Число $\mathrm{cl}(G)$ называется *кликовым числом графа* G.

Через $C_n = v_1 v_2 \ldots v_n v_1$, $n \geqq 3$, обозначим простой цикл длины n, т. е. граф, для которого $V(C_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ и $E(C_n) = \{[v_i, v_{i+1}], 1 \leqq i \leqq n-1, [v_1, v_n]\}$. Очевидно

$$\mathrm{cl}(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n>3, \\ 3, & \text{если } n=3. \end{cases} \tag{1}$$

Определение 3. Будем говорить, что множество вершин графа G является *незамисимым множеством*, если любые две из них несмежны.

Определение 4. Через $\alpha(G)$ обозначим наибольшее натуральное число s со следующим свойством: существует независимое множество из s вершин графа G. Число $\alpha(G)$ называется *числом независимости графа* G.

Очевидно

$$\alpha(C_n) = [n/2], \tag{2}$$

где $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Определение 5. Будем говорить, что

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$$

является r*—хроматическим разложением графа* G, если $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$, и любое из множеств V_i является независимым множеством графа G. Множества V_i будем называть *хроматическими классами* этого разложения, а граф G—r-*хроматическим графом*.

Определение 6. Через $\chi(G)$ обозначим наименьшее натуральное число r со следующим свойством: граф G обладает r-хроматическим разложением. Число $\chi(G)$ называется *хроматическим число графа* G.

Очевидно

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n=2k, \\ 3, & \text{если } n=2k+1. \end{cases} \tag{3}$$

(4) Отметим, что, если $\chi(G) > 2$, то граф G содержит простой цикл нечетной длины [25].

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин, т.е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$.

Определение 7. [33] Через $G_1 + G_2$ обозначается граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где E' является множеством всех неупорядоченных пар $[v_1, v_2]$, $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Отметим следующие очевидные свойства этой операции [33]:

$$\mathrm{cl}(G_1 + G_2) = \mathrm{cl}(G_1) + \mathrm{cl}(G_2), \tag{5}$$

$$\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2). \tag{6}$$

Ясно, что $\mathrm{cl}(G) \leqq \chi(G)$. Пусть p и r — натуральные числа и $2 \leqq p \leqq r$.

Определение 8. Через $H(p,r)$ обозначим множество всех графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ и $\chi(G) \geqq r$.

А.Зыков [33] доказал, что $H(p,r) \neq \varnothing$, $2 \leqq p \leqq r$. Самое простое доказательство этого факта принадлежит Мицельскому [28].

Определение 9. Положим

$$Z(p,r) = \min\{|V(G)|, G \in H(p,r)\}.$$

Числа $Z(p,r)$ будем называть *числами Зыкова*.

Мицельский [28] доказал, что

$$Z(2, r) \leqq 2^r - 2^{r-2} - 1, \; r \geqq 3. \tag{7}$$

В [29] доказано, что

(8) $$Z(2, r) \geqq \binom{r+2}{2} - 4, r \geqq 4.$$

В случае $r = 4$ неравенството (8) точное. Однако для $r = 5$ это неравенство уже является неточным (в [30] доказано, что $Z(2, 5) \geqq 19$). В случае $r = 4$ неравенство (7) тоже является точным. Пока неизвестно точно ли оно, если $r = 5$. В [2] вместе с Н. Хаджиивановым мы доказали, что

(9) $$Z(5, 6) = 8.$$

Равенство достигается только для графа $C_3 + C_5$.

Через K_n обозначим полный граф с n вершинами, а через K_0 — пустой граф. В этой работе мы докажем следующее обобщение утверждения (9):

Теорема 1 [1]. $Z(r, r + 1) = r + 3$, $r \geqq 2$. Равенство достигается только для графа $K_{r-2} + C_5$, $r \geqq 2$

Пусть $v \in V(G)$. Через $G-v$ обозначим граф, который получается от графа G удалением вершины v и всех выходящих из нее ребра.

Определение 10. Будем говорить, что граф G является вершинно-критическим r-хроматическим графом, если $\chi(G) = r$ и $\chi(G-v) < r$ для любой вершины $v \in V(G)$.

В этой работе докажем тоже следующие две теоремы:

Теорема 2. Пусть $G \in H(r, r + 1)$ и $|V(G)| = r + 4$, $r \geqq 2$. Тогда $\chi(G) = r + 1$ и $\mathrm{cl}(G) = r$.

Теорема 3. Пусть $G \in H(r, r + 1)$ и $|V(G)| = r + 4$, $r \geqq 3$. Тогда верно одно из следующих двух утверждений:

а. Граф G является вершинно-критическим $(r + 1)$-хроматическим графом и $G = K_{r-3} + G_1$, где G_1 является вершинно-критическим 4-хроматическим графом с 7 вершинами.

б. Существует вершина $v \in V(G)$ такая, что подграф $G-v$ изоморфен графу $K_{r-2} + C_5$.

II. СВОДКА ОБОЗНАЧЕНИЙ И ТЕРМИНОВ

$V(G)$—множество вершин графа G.
$E(G)$—множество ребер графа G.
$\mathrm{cl}(G)$—кликовое число графа G, определение 2.
$\alpha(G)$—число независимости графа G, определение 4.
$\chi(G)$—хроматическое число графа G, определение 6.
$A(v)$—множество всех вершин, смежных вершине v.
$G_1 + G_2$—определение 7.
$G-v$—подграф графа G, получающийся удалением вершины v.
$G-e$, $e \in E(G)$—подграф графа G, получающийся после удаления ребра e.
$\langle v_1, \dots, v_k \rangle$—подграф графа G, порожденный множеством его вершин $\{v_1, \dots, v_k\}$.
K_n—полный граф с n вершинами.
K_0—пустой граф.
C_n—простой цикл длины n.
$\bar{G}$—дополнительный граф графа G.
$R(p_1, \dots, p_s)$—определение 15.
$N(p_1, \dots, p_s; q)$—определение 16.
$H(p, r)$—определение 8.
$(p_1, \dots, p_s)$—граф Рамсея, определение 14.
p-клика—определение 1.
r-хроматический граф—определение 5.

Вершинно-критический r-хроматический граф—определение 10.
s-раскраска ребер—определение 12.
Хроматические классы некоторого r-хроматического разположения—определение 5.

III. НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть некоторое $\chi(G)$-хроматическое разложение графа G имеет одноэлементные хроматические классы $\{v_1\},\dots,\{v_k\}$. Тогда $[v_1,\dots,v_k]$ является k-кликой и в любом другом хроматическом классе этого разложения есть вершина, смежная всем вершинам $v_1,\dots,v_k$. Следовательно, если $|V(G)|>k$, то $\mathrm{cl}(G)>k$.

Доказательство леммы 1. Пусть

$$V(G)=\{v_1\}\cup\{v_2\}\cup\dots\cup\{v_k\}\cup T_{k+1}\cup\dots\cup T_{\chi(G)}$$

является $\chi(G)$-хроматическим разложением графа G с одноэлементными хроматическими классами $\{v_1\},\dots,\{v_k\}$. Любые две вершины множества $\{v_1,\dots,v_k\}$ смежны (иначе граф G имеет $(\chi(G)-1)$-хроматическое разложение). Следовательно, $\{v_1,\dots,v_k\}$ является k-кликой. Допустим, что в некотором хроматическом классе T_i, $k+1\leqq i\leqq\chi(G)$, нет вершины, смежной всем вершинам $v_1,\dots,v_k$. Группируя любую вершину из T_i с несмежной ей вершиной из $\{v_1,\dots,v_k\}$, получим, что граф G обладает $(\chi(G)-1)$-хроматическим разложением, что является противоречием.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 [32, с. 299]. Любая вершина вершинно-критического $(r+1)$-хроматического графа смежна хотя бы r вершинам.

Пусть G—граф и $v\in V(G)$. Через $A(v)$ обозначим множество всех вершин графа G, смежных вершине v.

Определение 11. Будем говорить, что граф G является графом Шпернера, если существуют две несмежные его вершины $v_1, v_2\in V(G)$, такие, что $A(v_1)\subseteqq A(v_2)$.

Лемма 3. Любой вершинно-критический r-хроматический граф не является графом Шпернера.

Доказательство леммы 3 очевидное.

Для удобства сформилируем в виде леммы и следующее очевидное утверждение:

Лемма 4. Пусть G_1 является вершинно-критическим r—хроматическим графом, а G_2—вершинно-критическим r_2-хроматическим графом. Тогда граф $G_{r_1}+G_{r_2}$ является вершинно-критическим (r_1+r_2)-хроматическим графом.

IV. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 И 3

Доказателство теоремы 1. Согласно (1), (3), (5) и (6) $\mathrm{cl}(K_{r-2}+C_5)=r$ и $\chi(K_{r-2}+C_5)=r+1$, т. е. $K_{r-2}+C_5\in\mathbf{H}(r,r+1)$. Следовательно, $Z(r,r+1)\leqq r+3$. Теперь докажем, что $Z(r,r+1)\geqq r+3$. Допустим противное, т. е. что существует граф $G\in\mathbf{H}(r,r+1)$ и $|V(G)|\leqq r+2$. Из $\chi(G)\geqq r+1$ следует, что любое $\chi(G)$-хроматическое разложение содержит хотя бы r одноелементные хроматические классы. Согласно лемме 1 $\mathrm{cl}(G)\geqq r+1$, что является противоречием. Итак, $Z(r,r+1)=r+3$. Пусть G является графом, для которого $|V(G)|=r+3$ и $G\in\mathbf{H}(r,r+1)$. Покажем, что граф G изоморфен графу $K_{r-2}+C_5$. Этим теорема 1 будет доказана. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, V_{r+3}\}$. Сначала покажем, что $\alpha(G) \leqq 2$. Допустим противное, т. е. что $\alpha(G) \geqq 3$. Без ограничения общности можно предположить, что $\{v_1, v_2, v_3\}$ является независимым множеством вершин графа G. Так как $\chi(G) \geqq r+1$, то

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4\} \cup \ldots \cup \{v_{r+3}\}$$

является $\chi(G)$–хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 $\mathrm{cl}(G) \geqq r+1$. Это является противоречием. Итак, $\alpha(G) \leqq 2$. Из $\mathrm{cl}(G) \neq \chi(G)$ вытекает $\alpha(G) \leqq 2$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что среди вершин $v_3, \ldots, v_{r+3}$ есть две несмежные. Тоже без ограничения общности можно предположить, что $[v_3, v_4] \notin E(G)$. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2,\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5\} \ldots \cup \{v_{r+3}\}$$

будет $\chi(G)$–хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 можно предположить, что вершины v_1 и v_3 смежны всем вершинам $v_5, \ldots, v_{r+3}$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Вершина v_2 несмежна некоторой вершине множества $\{v_5, \ldots, v_{r+3}.\}$ (иначе из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\{v_1, v_2, v_3\}$ является независимым множеством).

Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_5] \notin E(G)$. Аналогичные рассуждения показывают, что вершина v_4 тоже несмежна некоторой вершине множества $\{v_5, \ldots, v_{r+3}\}$. Заметим, что если $r > 2$, вершина v_4 смежна всем вершинам $v_6, \ldots, v_{r+3}$. (иначе $\chi(G) \leqq r$). Следовательно, $[v_4, v_5] \notin E(G)$. Заметим, что если $r > 2$, вершина v_2 тоже смежна всем вершинам $v_6, \ldots, v_{r+3}$. Из сделанных рассуждений вытекает, что

$$G = < v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 > + < v_6, \ldots, v_{r+3} >,$$

где $< V_1 >$ обозначает подграф графа G, порожденный множеством вершин $V_1 \subset V(G)$. Согласно лемме 1

$$< v_6, \ldots, v_{r+3} > = K_{r-2}.$$

Из $\alpha(G) = 2$ следует $[v_1, v_4]$, $[v_2, v_4]$, $[v_2, v_3] \in E(G)$, т. е. $< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 > = C_5$.

Теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.

1. $\chi(G) = r+1$. Допустим противное, т.е. $\chi(G) > r+1$. Тогда любое $\chi(G)$–хроматическое разложение графа G имеет хотя бы r одноэлементных хроматических классов. Согласно лемме 1 $\mathrm{cl}(G) \geqq r+1$, что является противоречием.

2. $\mathrm{cl}(G) = r$. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $\alpha(G) > 2$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ является независимым множеством вершин графа G, а $v_4, \ldots, v_{r+4}$ — остальные его вершины. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что среди вершин $v_4, \ldots, v_{r+4}$ есть две несмежные. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_4, v_5] \notin E(G)$. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6\} \cup \ldots \cup \{v_{r+4}\}$$

является $\chi(G)$–хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 $\mathrm{cl}(G) \geqq r$ и так как $G \in \mathbf{H}(r, r, +1)$ то $\mathrm{cl}(G) = r$.

Случай 2. $\alpha(G) = 2$. Пусть v_1 и v_2 несмежные вершины графа G, а $v_3, \dots, v_{r+4}$ — остальные его вершины. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что среди вершин $v_3, \dots, v_{r+4}$ есть две несмежные. Без ограничения общности можно предположить, что v_3 и v_4 — несмежные. Если среди вершин $v_5, \dots, v_{r+4}$ нет несмежных вершин, тогда $\{v_5, \dots, v_{r+4}\}$ является $r-$кликой и следовательно $\mathrm{cl}(G) = r$. Остается рассмотреть случай, когда $[v_5, \dots, v_{r+4}]$ не является $r-$кликой. Без ограничения общности можно предположить, что v_5 и v_6 несмежные вершины. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2,\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \dots \cup \{v_{r+4}\}$$

является $\chi(G)-$хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 можно предположить, что любая из вершин v_1, v_3, v_5 смежна всем вершинам $v_7, \dots, v_{r+4}$. Из $\alpha(G) = 2$ следует, что среди вершин v_1, v_3, v_5 есть смежные. Предположим, что v_1 и v_3 смежные вершины. Тогда $[v_1, v_3, v_7, \dots, v_{r+4}]$ является $r-$кликой графа G и следовательно $\mathrm{cl}(G) = r$.

Теорема 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 3. Пусть $G \in \mathbf{H}(r, r, +1)$ и $|V(G)| = r + 4$, $r \geqq 3$. Согласно теореме 2, $\chi(G) = r + 1$ и $\mathrm{cl}(G) = r$. Допустим, что утверждение б) неверно. Согласно теореме 1 $G-v \notin \mathbf{H}(r, r, +1)$ для любой вершины $v \in V(G)$. Так как $\mathrm{cl}(G-v) \leqq r$, то $\chi(G-v) \leqq r$ для любой вершины $v \in V(G)$. Следовательно

(10) граф G является вершинно-критическим $(r + 1)-$хроматическим графом.

Пусть $V(G) = \{v_1, \dots, v_{r+4}\}$. Сначала покажем, что $G = K_{r-3} + G_1$. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $\alpha(G) \geqq 3$. Пусть $\{v_{r+2}, v_{r+3}, v_{r+4}\}$ является независимым множеством вершин графа G. Из $\mathrm{cl}(G) = r$ следует, что среди вершин $v_1, \dots, v_{r+1}$ есть две несмежные. Без ограничения общности можно предположить что $[v_r, v_{r+1}] \notin E(G)$. Тогда

$$V(G) = \{v_1\} \cup \dots \cup \{v_{r-1}\} \cup \{v_r, v_{r+1}\} \cup \{v_{r+2}, v_{r+3}, v_{r+4}\}$$

является $\chi(G)-$хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 можно предположить, что вершины v_r и v_{r+2} смежны всем вершинам $v_1, \dots, v_{r-1}$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $[v_r, v_{r+2}] \notin E(G)$. Согласно (10) и лемме 2 вершина v_{r+1} смежна хотя бы $r-3$ вершинам множества $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$. Без ограничения общности можно предположить, что вершина v_{r+1} смежна вершинам $v_1, \dots, v_{r-3}$. Заметим, что вершина v_{r+3} тоже смежна всем вершинам $v_1, \dots, v_{r-3}$ (иначе G будет графом Шпернера, что противоречит лемме 3). Аналогично – v_{r+4} смежна тоже всем вершинам $v_1, \dots, v_{r-3}$. Следовательно,

$$G = < v_1, \dots, v_{r-3} > + < v_{r-2}, \dots, v_{r+4} >.$$

Соглано лемме 1, $< v_1, \dots, v_{r-3} > = K_{r-3}$.

Случай 2. $\alpha(G) = 2$. Рассмотрим произвольное $(r+1)-$хроматическое разложение графа G. Из $\alpha(G) = 2$ и $\chi(G) = r + 1$ следует, что с точностью до нумерации вершин это $(r+1)-$хроматическое разложение имеет следующий вид:

$$V(G) = \{v_1\} \cup \dots \cup \{v_{r-2}\} \cup \{v_{r-1}, v_r\} \cup \{v_{r+1}, v_{r+2},\} \cup \{v_{r+3}, v_{r+4}\}.$$

Согласно лемме 1 можно предположить, что вершины $v_{r-1}, v_{r+1}, v_{r+3}$ смежны всем вершинам $v_1, \ldots, v_{r-2}$. Из $\mathrm{cl}\,(G) \leqq r$ следует, что хотя бы две из вершин $v_{r-1}, v_{r+1}, v_{r+3}$ несмежны. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_{r-1}, v_{r+1}] \notin E\,(G)$. Рассмотрим два подслучая:

2а. Одна из вершин v_r и v_{r+2} тоже смежна всем вершинам $v_1, \ldots, v_{r-2}$. Без ограничения общности можно предположить, что v_r смежна всем вершинам $v_1, \ldots, v_{r-2}$. Из $\mathrm{cl}\,(G) \leqq r$ следует, что $<v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, v_{r+3}>$ не содержит треугольников. Согласно (4), $\chi(<v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, v_{r+3}>) \leqq 2$. Пусть

(11) $V_1 \cup V_2$ является 2-хроматическим разложением подграфа $<v_{r-1}, v_r, v_{r+1}, v_{r+3}>$.

Если любая из вершин $v_1, \ldots, v_{r-2}$ смежна всем останалым вершинам графа G – утверждение теоремы очевидно. Поэтому предположим, что некоторая из этих вершин имеет несмежную вершину. Без ограничения общности можно предположить, что v_{r-2} имеет несмежную вершину. Из (10) и леммы 3 следует, что v_{r-2} несмежна хотя бы двум вершинам. Согласно лемме 1, v_{r-2} смежна всем вершинам $v_1, \ldots, v_{r-3}$, а согласно сделанным выше предположениям v_{r-2} смежна вершинам $v_{r-1}, v_r, v_{r+1}\ v_{r+3}$. Следовательно $[v_{r-2}, v_{r+2}] \notin E\,(G)$ и $[v_{r-2}, v_{r+4}] \notin E\,(G)$. Заметим, что $[v_1, v_{r+2}] \in E\,(G)$, так как иначе, согласно (11),

$$\{v_1, v_{r+2}\} \cup \{v_2\} \cup \ldots \cup \{v_{r-3}\} \cup \{v_{r-2}, v_{r+4}\} \cup V_1 \cup V_2$$

будет r-хроматическим разложением графа G, что противоречит равенству $\chi\,(G) = r + 1$. Аналогично доказывается, что $[v_i, v_{r+2}] \in E\,(G)$, $2 \leqq i \leqq r\text{-}3$ и $[v_i, v_{r+4}] \in E\,(G)$, $1 \leqq i \leqq r\text{-}3$. Следовательно

$$G = <v_1, \ldots, v_{r-3}> + <v_{r-2}, \ldots, v_{r+4}> .$$

Согласно лемме 1, $<v_1, \ldots, v_{r-3}> = K_{r-3}$.

2 б. Любая из вершин v_r и v_{r+2} несмежна некоторой вершине из $v_1, \ldots, v_{r-2}$. Вершины v_r и v_{r+2} не могут быть несмежными разным вершинам (иначе $\chi\,(G) < r + 1$). Следовательно, без ограничения общности можно предположить, что $[v_r, v_{r-2}]$, $[v_{r+2}, v_{r-2}]$ $\notin E\,(G)$ и $[v_r, v_i], [v_{r+2}, v_i], \in E\,(G)$, $1 \leqq i \leqq r-3$.

Из (10) и леммы 3 следует $[v_{r+4}, v_i], \in E\,(G)$, $1 \leqq i \leqq r-3$. Следовательно,

$$G = <v_1, \ldots, v_{r-3}> + <v_{r-2}, \ldots, v_{r+4}>.$$

Как уже отметили, $<v_1, \ldots, v_{r-3}> = K_{r-3}$. Тем самым мы доказали, что $G = K_{r-3} + G_1$. Утверждения $\mathrm{cl}\,(G_1) = 3$ и $\chi\,(G_1) = 4$ вытекают очевидным образом из (4), (5) и теоремы 2. Согласно лемме 4, G_1 является вершинно-критическим 4-хроматическим графом.

Теорема 3 доказана полностью.

Следствие 1. $Z\,(r, r + 2) = r + 6$, если $r \geqq 4$.

Доказательство следствия 1. Сначала докажем, что $Z\,(r, r + 6) \geqq r + 6$. Допустим противное, т. е., что существует граф $G \in \mathbf{H}\,(r, r + 2)$ и $|V\,(G)| \leqq r + 5$. Тогда $G \in \mathbf{H}\,(r + 1, r + 2)$ и согласно теоремам 1 и 2, $\mathrm{cl}\,(G) = r + 1$, что противоречит предположению $G \in \mathbf{H}\,(r, r + 2)$. Следовательно, $Z\,(r, r + 2) \geqq r + 6$. Так как очевидно $(K_{r-4} + C_5 + C_5) \in \mathbf{H}\,(r, r + 2)$, $r \geqq 4$, то $Z\,(r, r + 2) = r + 6$. Следствие 1 доказано.

Замечание. В [1, 16] доказано, что граф $K_{r-4} + C_5 + C_5$, $r \geqq 4$, является единственным графом класса $\mathbf{H}\,(r, r + 2)$ с $r + 6$ вершинами.

V. ГРАФЫ РАМСЕЯ И НЕКОТОРЫЕ КОНСТАНТЫ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Определение 12. Любое разложение

$$E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_s,\ E_i \cap E_j = \emptyset,\ i \neq j,$$

называется s-раскраской ребер графа G. Иногда для удобства будем говорить, что ребра множества E_i окрашены в i-ый цвет, $1 \leqq i \leqq s$.

Определение 13. Если в некоторой s-раскраске $E_1 \cup \ldots \cup E_s$ ребер графа G все ребра некоторой p-клики принадлежат множеству E_i (т.е. окрашены в i-ый цвет) будем говорить, что эта p-клика является монохроматической p-кликой i-ого цвета.

Определение 14. Будем говорить что граф G является $(p_1, \ldots, p_s)$–графом Рамсея, если для любой s-раскраски его ребер существует i, $1 \leqq i \leqq s$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-ого цвета.

Хорошо известно [19], что полный граф с 6 вершинами K_6 является (3,3)–графом Рамсея, однако K_5 не является (3,3)–графом Рамсея.

Определение 15. Через $R(p_1, \ldots, p_s)$ обозначается наименьшее натуральное число n со следующим свойством: полный граф с n вершинами является $(p_1, \ldots, p_s)$–графом Рамсея.

Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_s)$ впервые было доказано Рамсеем [17]. Они называется числами Рамсея. Из сделанного выше замечания следует, что $R(3, 3) = 6$ [19]. Отметим следующие очевидные свойства чисел Рамсея:

(12) $\quad R(p) = p;$

(13) $\quad R(p_1, \ldots, p_s, 2) = R(p_1, \ldots, p_s);$

(14) $\quad R(p_1, \ldots, p_s) = R(p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}),$

где $(i_1, \ldots, i_s)$ является произвольной перестановкой чисел $1, \ldots, s$. Согласно свойствам (12), (13) и (14) достаточно рассматривать чисел Рамсея $R(p_1, \ldots, p_s)$, для которых $s \geqq 2$ и $3 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_s$. Ниже даны все известные нам до сих пор нетривиальные числа Рамсея [18]:

$(p_1, \ldots, p_s)$	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(4,4)	(3,3,3)
$R(p_1, \ldots, p_s)$	6	9	14	18	23	18	17

Определение 16. Следуя Грахам и Спенсер [22], через $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует $(p_1, \ldots, p_s)$–граф Рамсея G, который имеет n вершин и кликовое число, меньше q.

Очевидно, если $q \leqq \max\{p_1, \ldots, p_s\}$ число $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ не имеет смысла. Из определения чисел Рамсея $R(p_1, \ldots, p_s)$ следует $N(p_1, \ldots, p_s; q) = R(p_1, \ldots, p_s)$, если $q > R(p_1, \ldots, p_s)$. В [21] Фолкман доказал, что, если $q > \max\{p_1, \ldots, p_s\}$, то $N(p_1, \ldots, p_s; q) < \infty$.

В этой части получим новые доказательства следующих теорем:

Теорема 4 (Лин [23]). Верно неравенство

(15) $$N(p_1, \ldots, p_s; R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 2.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда граф $K_{R(p_1,\dots,p_s)-3}+C_5$ является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея.

Теорема 5 (Лин [23]). Верно неравенство

$$N(p_1,\dots,p_s;\ R(p_1,\dots,p_s)-1) \geqq R(p_1,\dots,p_s)+4. \tag{16}$$

Для доказательства этих теорем нам будет нужна следующая

Лемма 5 (Лин [23]). Если $\chi(G) < R(p_1,\dots,p_s)$, то граф G не является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея.

Доказательство теоремы 4. Ниже всюду вместо $R(p_1,\dots,p_s)$ будем писать R. Пусть G является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея с $N(p_1,\dots,p_s;\ R)$ вершинами и $\mathrm{cl}(G) < R$. Согласно лемме 5 $\chi(G) \geqq R$. Следовательно, $G \in \mathbf{H}(R-1,R)$. Из определения чисел Зыкова получаем

$$|V(G)| = N(p_1,\dots,p_s;\ R) \geqq Z(R-1,R). \tag{17}$$

Согласно теореме 1

$$Z(R-1,R) = R+2. \tag{18}$$

Неравенство (15) вытекает из (17) и (18). Допустим, что в (15) есть равенство и пусть G является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея с $R+2$ вершинами и $\mathrm{cl}(G) < R$. Из равенства в (15) следует равенство в (17). Согласно теореме 1 граф G изоморфен графу $K_{R-3}+C_5$. Следовательно, $K_{R-3}+C_5$ является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея. То, что если граф $K_{R-3}+C_5$ является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея в (15) имеется равенство — очевидно.

Теорема 4 доказана.

В [23] Лин доказывает, что, если

$$R = R(p_1-1,p_2,\dots,p_s)+R(p_1,p_2-1,p_3,\dots,p_s)+\dots+R(p_1,p_2,\dots,p_s-1)-s+2,$$

тогда граф $K_{R-3}+C_5$ является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея. Из этого факта и теоремы 4 он получает: $N(3,3;6)=8$, $N(3,5;14)=16$, $N(4,4;18)=20$, $N(3,3,3;17)=19$. В [23] Лин показывает, что граф K_6+C_5 не является $(3,4)$-графом Рамсея и следовательно $N(3,4;9)\geqq 12$. В [12] доказано, что $N(3,4;9)\geqq 13$, а в [11] — что $N(3,4;9)\leqq 14$. В следующей части мы дадим новое доказательство неравенства $N(3,4;9)\geqq 13$.

Доказательство теоремы 5. Пусть G является произвольным $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея и $\mathrm{cl}(G) < R(p_1,\dots,p_s)-1$. Согласно лемме 5 $\chi(G) \geqq R(p_1,\dots,p_s)$. Следовательно,

$$G \in \mathbf{H}(R(p_1,\dots,p_s)-2,\ R(p_1,\dots,p_s)). \tag{19}$$

Из (19) и следствия 1 получаем, что

$$|V(G)| \geqq R(p_1,\dots,p_s)+4. \tag{20}$$

Неравенство (16) вытекает из (20).

Теорема 5 доказана.

Из (16) вытекает, что $N(3,3;5)\geqq 10$, Лин [23]. В [8] доказан более сильный результат $N(3,3;5)\geqq 11$. Последняя известная нам оценка сверху для этого числа получена в [5]. Там доказано, что $N(3,3;5)\leqq 16$.

Из (16) вытекает тоже, что $N(3, 4; 8) \geqq 13$. Более сильное неравенство $N(3, 4; 8) \geqq 14$ получено в [12].

В [23] Лин высказал предположение, что неравенство (16) всегда неточное. В [13] это предположение опровергнуто. Там доказано, что граф $K_{11} + C_5 + C_5$ является (3,3,3)–графом Рамсея и следовательно $N(3, 3, 3; 16) = 21$.

VI. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЕЛ ЗЫКОВА К (3,4)–ГРАФАМ РАМСЕЯ

В этой части докажем неравенство $N((3, 4); 9) \geqq 13$, [12]. Для доказательства этого неравенства нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 6. Пусть граф G обладает 9–хроматическим разложением

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_9,$$

такое, что порожденный подграф $\langle V_6 \cup V_7 \cup V_8 \cup V_9 \rangle$ не содержит 4–клик. Тогда граф G не является (3,4)–графом Рамсея.

Доказательство леммы 6. Рассмотрим 2–раскраску ребер полного графа с 9 вершинами, заданную на рис. 1, где даны только ребра 2–ого цвета (остальные ребра являются ребрами 1–ого цвета). Очевидно эта 2–раскраска

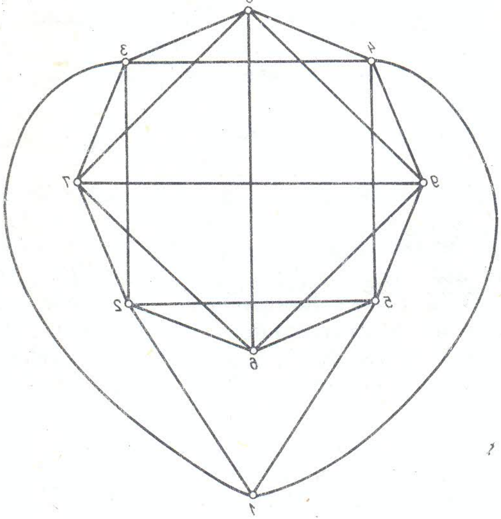

Рис. 1

не содержит монохроматических треугольников 1–ого цвета и содержит единственную монохроматическую 4–клику 2–ого цвета, а именно [6, 7, 8, 9]. Эта 2–раскраска была построена впервые в [14]. В [15] доказано, что с точностью до изоморфизма существует единственная 2–раскраска ребер K_9 с этими свойствами. Используя эту 2–раскраску ребер графа K_q строим 2-раскраску ребер графа G следующим образом: если $v_1 \in V_i$, $v_2 \in V_j$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$, тогда ребро $[v_1, v_2]$ имеет такой же цвет, что и ребро $[i, j]$ графа K_9. Полученная 2–раскраска ребер графа G не содержит монохроматических треугольников 1-ого цвета, так как рассматриваемая 2-раскраска ребер K_9 не содержит таких треугольников. Полученая 2-раскраска ребер графа G не содерит монохроматических 4-клик 2-ого цвета, так как единственная монохроматическая 4-клика 2-ого цвета графа K_9 является [6, 7, 8, 9], а порожденный подграф $<V_6 \cup V_7 \cup V_8 \cup V_9>$ не содержит 4-клик.

Лемма 6 доказана полностью.

Теперь докажем одну теорему, из которой очевидным образом будет следовать неравенство $N(3, 4; 9) \geqq 13$.

Теорема 6 [12]. Пусть G граф, для которого $|V(G)| \leqq 12$ и $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$. Тогда G не является (3,4)-графом Рамсея.

Доказательство теоремы 6. Допустим противное, т. е. что существует (3,4)-граф Рамсея G, для которого $|V(G)| \leqq 12$ и $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$. Согласно лемме 5 $\chi(G) \geqq 9$. Следовательно , $G \in \mathbb{H}(8, 9)$. Добавлением изолированных вершин можно добиться того, чтобы $|V(G)| = 12$. Согласно теореме 3 ($r = 8$) возможны следующие два случая:

Случай а. $G = K_5 + G_1$, где $\chi(G_1) = 4$ и G_1 не содержит 4-клик. Пусть $V(K_5) = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5,\}$ и $V(G_1) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ является 4-хроматическим разложением графа G_1. Тогда

$$V(G) = \{z_1\} \cup \ldots \cup \{z_5\} \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$$

является 9-хроматическим разложением графа G и подграф $<V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4>$ не содержит 4-клик. Согласное лемме 6 граф G не является (3,4)-графом Рамсея, что является противоречием.

Случай б. Для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ граф $G - v_0 = K_6 + C_5$. Пусть $V(K_6) = \{z_1, z_2, \ldots, z_6\}$ и $V(G_5) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ является 3-хроматическим разложением цикла C_5. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq 8$ следует, что вершина v_0 несмежна некоторой вершине подграфа $K_6 + C_5$. Предположим сначала, что v_0 несмежна некоторой вершине K_6, например вершине z_1. Тогда

$$V(G) = \{v_0 z_1\} \cup \{z_2\} \cup \ldots \cup \{z_6\} \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

является 9-хроматическим разложением графа G и подграф $<z_6 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3>$ очевидно не содержит 4-клик. Это противоречит лемме 6.

Если вершина v_0 смежна всем вершинам K_6, тогда попадаем в условиях случая а).

Теорема 6 доказана.

Следствие 2. $N(3, 4; 9) \geqq 13$ [12].

Определение 17. Будем говорить, что $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G является вершинно-критическим $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, если его подграфы $G - v$, $v \in V(G)$, не являются $(p_1, \ldots, p_s)$-графами Рамсея.

В [11] доказано, что для любых натуральных чисел r и s граф $F(r, s) = K_4 + C_{2r+1} + C_{2s+1}$ является (3,4)-графом Рамсея. Используя лемму 6, мы усилим это утверждение. Точнее докажем, что графы $F(r, s)$, $r \geqq 2$, $s \geqq 2$, является вершинно-критическими (3,4)-графами Рамсея.

Теорема 7. Граф $F(r, s) = K_4 + C_{2r+1} + C_{2s+1}$, $r \geqq 2$, $s \geqq 2$, является вершинно-критическим (3,4)-графом Рамсея.

Доказательство теоремы 7. Доказательство того, что граф $F(r, s)$ является (3,4)-графом Рамсея, дано в [11]. Нам нужно показать, что подграфы $F(r, s) - v$, $v \in V(F(r, s))$, не являются (3,4)-графами Рамсея. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $v \in V(K_4)$. Пусть $V(K_4) = \{z_1, z_2, z_3, z_4,\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $v = z_1$. Пусть $V(C_{2r+1}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ и $V(C_{2s+1}) = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ является 3-хроматическими разложениями циклов C_{2r+1} и C_{2s+1}. Тогда

$$\{z_2\} \cup \{z_3\} \cup \{z_4\} \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3$$

является 9-хроматическим разложением подграфа $F(r, s) - z_1$. Из $s \geqq 2$ очевидным образом следует, что $< V_3 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 >$ не содержит 4-клик. Согласно лемме 6, подграф $F(r, s) - z_1$ не является (3,4)-графом Рамсея.

Случай 2. $v \in (V(C_{2r+1}) \cup (V(C_{2s+1}))$. Без ограничения общности можно предположить, что $v \in (V(C_{2r+1})$. Очевидно $\chi(C_{2r+1} - v) = 2$. Пусть $V_1 \cup V_2$ является 2-хроматическим разложением подграфа $C_{2r+1} - v$, а $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ является 3-хроматическим разложением цикла C_{2r+1}. Тогда

$$\{z_1\} \cup \{z_2\} \cup \{z_3\} \cup \{z_4\} \cup V_1 \cup V_2 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3$$

является 9-хроматическим разложением подграфа $F(r, s) - v$. Из $s \geqq 2$ следует, что $< V_2 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 >$ не содержит 4-клик. Согласно лемме 6, подграф $F(r, s) - v$ не является (3,4)-графом Рамсея.

Теорема 7 доказана полностью.

Следствие 3. Для любого четного числа $n \geqq 14$ существует критический (3,4)-граф Рамсея с n вершинами, т.е. такой (3,4)-граф Рамсея, все собственные подграфы которого не являются (3,4)-графами Рамсея.

VII. ОПИСАНИЕ ГРАФОВ G КЛАССА $\mathbf{H}(r, r+1)$, $r \geqq 3$, ДЛЯ КОТОРЫХ $|V(G)| = r + 4$ И $\alpha(G) \geqq 3$

Согласно теореме 3 описание всех графов $G \in \mathbf{H}(r, r+1)$, $r \geqq 3$, для которых $|V(G)| = r + 4$, сводится к описанию всех вершинно-критических

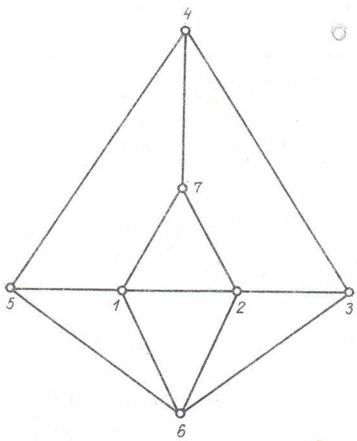

Рис. 2

4-хроматических графов с 7 вершинами, либо для графа G выполнено условие б) этой же теоремы.

Через F_1 обозначим граф, заданный на рис. 2. Докажем следующие теоремы:

Теорема 8. Граф F_1 является вершинно-критическим 4–хроматическим графом.

Теорема 9. Пусть G является вершинно-критическим 4–хроматическим графом с 7 вершинами и $\alpha(G) \geqq 3$. Тогда граф G изоморфен графу F_1.

Доказательство теоремы 8. Разложение

$$V(F_1) = \{1, 3\} \cup \{2, 5\} \cup \{4\} \cup \{6, 7\}$$

показывает, что $\chi(F_1) \leqq 4$. Допустим, что $\chi(F_1) < 4$ и пусть $V(F_1) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ является 3–хроматическим разложением графа F_1. Понятно, что вершины 1 и 2 принадлежат разным хроматическим классам этого разложения. Без ограничения общности можно предположить, что $1 \in V_1$, $2 \in V_2$. Заметим, что $3 \notin V_3$ (иначе вершина 6 вместе с некоторой из вершин 1, 2, 3 будет в одном хроматическом классе). Ясно, что $3 \notin V_2$. Следовательно $3 \in V_1$. Аналогично доказывается, что $5 \in V_2$. Из $3 \in V_1$ и $5 \in V_2$ следует $4 \in V_3$, а из $1 \in V_1$ и $2 \in V_2$ следует $7 \in V_3$. Получилось $4 \in V_3$, $7 \in V_3$, что является противоречием.

Итак, мы доказали, что $\chi(F_1) = 4$. То, что F_1 является вершинно-критическим 4–хроматическим графом, проверяется непосредственно.

Теорема 8 доказана.

Для доказательства теоремы 9 нам будем нужна следующая

Лемма 7. Не существует вершинно-критический 3–хроматический граф с четным числом вершин.

Лемма 7 непосредственно вытекает из (4).

Доказательство теоремы 9. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_7\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $\{v_1, v_2, v_3\}$ является независимым множеством вершин графа G. Так как G является вершинно-критическим 4–хроматическим графом, то $\mathrm{cl}(G) < 4$. Следовательно, среди вершин v_4, v_5, v_6, v_7, есть две несмежные. Без ограничения общности можно предположить, что v_4 и v_5 несмежные. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6\} \cup \{v_7\}$$

является 4–хроматическим разложением графа G. Согласно лемме 1 можно предположить, что вершины v_1 и v_4 смежны вершинам v_6 и v_7. Из $\mathrm{cl}(G) < 4$ вытекает $[v_1, v_4] \notin E(G)$.

Покажем, что $[v_5, v_7] \notin E(G)$. Допустим противное. Тогда $[v_2, v_7], [v_3, v_7] \in E(G)$ (иначе либо $A(v_2) \subseteqq A(v_7)$, либо $A(v_3) \subseteqq A(v_7)$ противоречит лемме 3). Мы получили, что

$$G = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\rangle + \{v_7\}.$$

Согласно лемме 4 $\langle v_1, \ldots, v_6\rangle$ является вершинно-критическим 3–хроматическим графом. Это противоречит лемме 7. Итак, мы доказали, что $[v_5, v_7] \notin E(G)$. Аналогично доказывается, что $[v_5, v_6] \notin E(G)$. Заметим, что одно из ребер $[v_2, v_7], [v_3, v_7]$ не является ребром графа G (иначе G будет графом Шпернера, так как $A(v_5) \subseteqq A(v_7)$, см. лемму 3). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_3, v_7] \notin E(G)$. Тогда $[v_2, v_7] \in E(G)$, так как иначе $\{v_2, v_3, v_7\} \cup \{v_1, v_4\} \cup \{v_5, v_6\}$ будет 3–хроматическим разложением графа G. Из $[v_2, v_7] \in E(G)$ вытекает $[v_2, v_6] \notin E(G)$ (иначе $\langle v_1, v_2, v_4\rangle$ является независимым множеством и $\{v_1, v_2, v_4\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_5, v_6\}$ будет 3–хроматическим разложением графа G. Из $[v_2, v_6] \notin E(G)$ вытекает $[v_3, v_6] \in E(G)$ (иначе $\{v_2, v_3, v_6\} \cup \{v_1, v_4\} \cup \{v_5, v_7\}$

будет 3–хроматическим разложением графа G). Заметим, что $[v_2, v_4] \in E(G)$ (иначе $\{v_1, v_2, v_4\} \cup \{v_3, v_7\} \cup \{v_5, v_6\}$ является 3–хроматическим разложением графа G). Аналогично доказывается, что $[v_3, v_4]$, $[v_1, v_5]$, $[v_2, v_5]$, $[v_3, v_5] \in E(G)$.

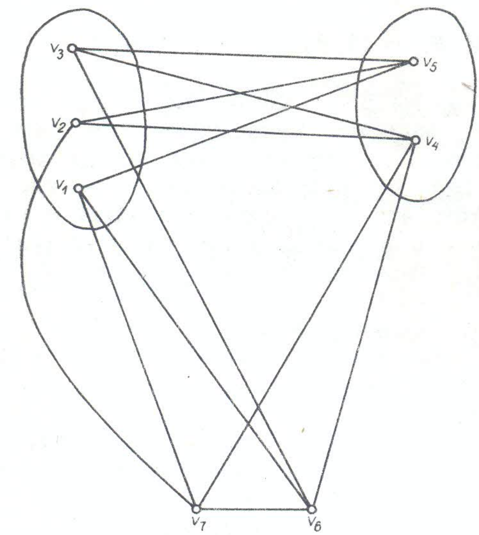

Рис. 3

Через P обозначим граф, заданный на рис. 3. Мы доказали, что граф G изоморфен графу P. Остается показать, что графы P и F_1 изоморфны. Искомый изоморфизм задается отображением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ v_4 & v_7 & v_1 & v_5 & v_3 & v_6 & v_2 \end{pmatrix}$$

Теорема 9 доказана.

Из теоремы 3 и теоремы 9 получаем

Теорема 10. Пусть $G \in \mathbf{H}(r, r+1)$, $r \geqq 3$, $|V(G)| = r + 4$ и $\alpha(G) \geqq 3$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

а) граф G изоморфен графу $F_1 + K_{r-3}$;

б) существует вершина $v \in V(G)$, такая, что подграф $G - v$ изоморфен графу $K_{r-2} + C_5$.

VIII. ОПИСАНИЕ ВСЕХ ГРАФОВ $G \in \mathbf{H}(r, r+1)$, $r \geqq 3$, ДЛЯ КОТОРЫХ $|V(G)| = r + 4$ и $\alpha(G) = 2$

Через F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 обозначим графы, заданные соответственно на рисунках 4, 5, 6, 7 и 8. Через F_7 обозначим граф $\bar{C}_7$, т. е., граф F_7 является дополнением простого цикла длины 7.

В этой части докажем следующие теоремы:

Теорема 11. Графы F_i, $2 \leqq i \leqq 7$, являются неизоморфными вершинно-критическими 4–хроматическими графами с числом независимости 2.

Теорема 12. Пусть G является вершинно-критическим 4–хроматическим графом с 7 вершинами и с числом независимости 2. Тогда граф G изоморфен некоторому из графов F_i, $2 \leqq i \leqq 7$.

Доказательство теоремы 11. Очевидно $\alpha(F_i) = 2$, $2 \leqq i \leqq 7$. Из $|V(F_i)| = 7$ и $\alpha(F_i) = 2$ следует, что графы F_i, $2 \leqq i \leqq 7$, являются 4–хроматическими графами. Покажем, что граф F_2 является вершинно-критическим 4–хроматическим графом. Допустим противное, т.е., что $\chi(F_2 - v) = 4$ для

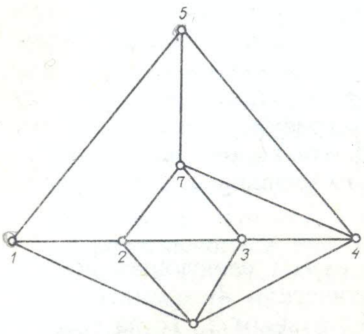

Рис. 4

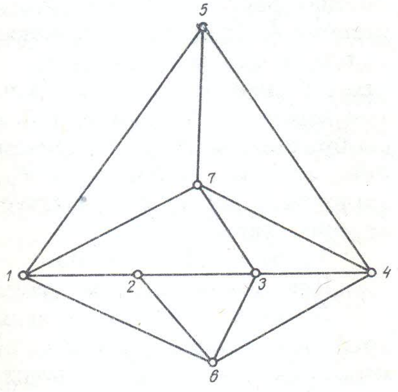

Рис. 5

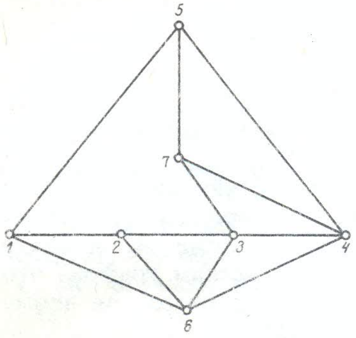

Рис. 6

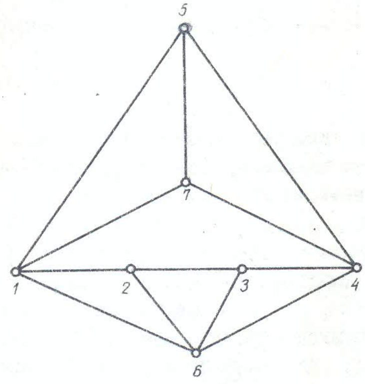

Рис. 7

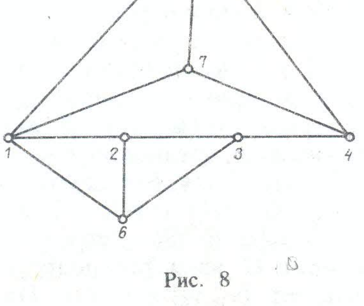

Рис. 8

некоторой вершины $v \in V(F_2)$. Тогда $(F_2 - v) \in \mathbf{H}(3, 4)$. Согласно теореме 1 граф $F_2 - v$ изоморфен графу $K_1 + C_5$. Это является противоречием, так как очевидно ни один из подграфов $F_2 - v$, $v \in V(F_2)$, не изоморфен графу $K_1 + C_5$. Таким же образом доказывается, что графы F_3, F_4, F_5, F_6 и F_7 являются тоже вершинно-критическими 4–хроматическими графами.

Теперь докажем, что среди графов F_i, $2 \leqq i \leqq 7$, нет изоморфных. Граф F_7 неизморфен никакому из остальных графов по очевидным соображениям: все его вершины имеют степень 4, а остальные графы F_i, $2 \leqq i \leqq 6$, имеют вершины степени 3. Покажем, что граф F_6 неизморфен никакому из графов F_2, F_3, F_4, F_5. В самом деле, он имеет единственную вершину степени 4, а именно вершина 1. Все графы F_2, F_3, F_4, и F_5 имеют хотя бы две вершины степени 4. Графы F_5 и F_4 неизоморфны, так как вершина 1 графа F_4 участвует только в одном треугольнике, а граф F_5 не имеет вершин с этим свойством. Граф F_5 неизоморфен никакому из графов F_2 и F_3, так как он имеет только три вершины степени 4, а F_2 и F_3 имеют пять вершин степени 4. По тем же соображениям граф F_4 неизоморфен никакому из графов F_2 и F_3. Осталось показать, что графы F_2 и F_3 неизоморфны. Это однако очевидно, так как вершина 1 графа F_2 участвует только в одном треугольнике, а в F_3 таких вершин нет.

Теорема 11 доказана.

Для доказательства теоремы 12 нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 8. Пусть G является вершинно-критическим 4–хроматическим графом с 7 вершинами и с числом независимости, равным 2. Тогда граф G изоморфен некоторому подграфу графа $\bar{K}_2 + C_5$, либо изоморфен графу $F_7 = \bar{C}_7$.

Доказательство леммы 8. Пусть $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$. Из $\alpha(G) = 2$ следует, что с точностью до обозначения вершин любое 4–хроматическое разложение графа G имеет следующий вид:

$$\{v_1\} \cup \{v_2\, v_3\} \cup \{v_4\, v_5\} \cup \{v_6\, v_7\}.$$

Согласно лемме 1 можно предположить, что вершины v_2, v_4, v_6 смежны вершине v_1. Из того, что G является вершинно-критическим графом, очевидно вытекает $\mathrm{cl}\,(G) < 4$. Следовательно, хотя бы одно из ребер $[v_2, v_4]$, $[v_2, v_6]$, $[v_4, v_6]$, не является ребром G. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_4] \notin E(G)$. Заметим, что вершина v_1 несмежна некоторой из остальных вершин (иначе, согласно лемме 4, подграф $\langle v_2, \ldots, v_7 \rangle$ является вершинно-критическим 3–хроматическим графом, что противоречит лемме 7). Так как G не является графом Шпернера (см. лемму 3), то вершина v_1 несмежна хотя бы двум вершинам.

Допустим теперь, что граф G неизоморфен никакому подграфу графа $\bar{K}_2 + C_5$. Покажем, что v_1 смежна либо вершине v_3, либо вершине v_5. Допустим противное, т.е., что $[v_1, v_3] \notin E(G)$ и $[v_1, v_5] \notin E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает $[v_3, v_4][v_2, v_5]$, $[v_3, v_5] \notin E(G)$ и, следовательно, $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle = C_5$. Мы получили, что G является подграфом графа $\bar{K}_2 + C_5$. Это противоречит нашему допущению. Итак, вершина v_1 смежна либо вершине v_3, либо вершине v_5. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_3] \in E(G)$. Выше мы заметили, что v_1 несмежна хотя бы двум вершинам. Следовательно, $[v_1, v_5] \notin E(G)$ и $[v_1, v_7] \notin E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает $[v_5, v_7]$ $[v_4, v_7] \in E(G)$. Заметим, что $[v_4, v_6] \in E(G)$ (иначе из $\alpha(G) = 2$ вытекает $[v_5, v_6], \in E(G)$ и тем самым G является подграфом графа $\bar{K}_2 + C_5$). Из $\alpha(G) = 2$ и $\mathrm{cl}\,(G) < 4$ следует $[v_3, v_6] \notin E(G)$. Из сделанных рассуждений получаем, что дополнение $\bar{G}$ графа G содержит простой цикл длины 7, а именно цикл $v_1\, v_5\, v_4\, v_2\, v_3 v_6\, v_7\, v_1$. Следовательно $G \subseteqq \bar{C}_7$. Так как очевидно любой собственный 4–хроматический подграф графа $\bar{C}_7$ является подграфом графа $\bar{K}_2 + C_5$ и мы допустили, что G не является подграфом $\bar{K}_2 + C_5$, то граф G изоморфен графу $F_7 = \bar{C}_7$.

Лемма 8 доказана полностью.

Доказательство теоремы 12. Согласно лемме 8 достаточно показать, что любой вершинно-критический 4–хроматический подграф графа $\bar{K}_2 + C_5$ изоморфен некоторому из графов F_2, F_3, F_4, F_5, F_6.

Пусть $V(\bar{K}_2) = \{v_1, v_2\}$ и $C_5 = w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_1$. Очевидно любой 4–хроматический подграф графа $\bar{K}_2 + C_5$. содержит цикла C_5. Следовательно, все вершинно-критические 4–хроматические подграфы графа $\bar{K}_2 + C_5$ тоже содержат цикла C_5. Пусть G является произвольным вершинно-критическим 4–хроматическим подграфом графа $\bar{K}_2 + C_5$. Согласно сделанным выше замечаниям граф G получается от графа $\bar{K}_2 + C_5$ удалением некоторых, выходящих из v_1 и v_2, ребер. Через $d(v_1)$ и $d(v_2)$ обозначим соответственно степени вершин v_1 и v_2. Из того, что G не является графом Шпернера (см. лемму 3), следует, что $d(v_1) < 5$ и $d(v_2) < 5$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает, что $d(v_1) \geqq 3$ и $d(v_2) \geqq 3$. Без ограничения общности можно предположить, что $d(v_1) \leqq d(v_2)$. Следовательно, $3 \leqq d(v_1) \leqq d(v_2) \leqq 4$.

Представляются три возможности:

Случай 1. $d(v_1) = d(v_2) = 4$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, w_i] \in E(G)$, $1 \leqq i \leqq 4$ и $[v_2, w_5] \notin E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает $[v_1, w_5] \in E(G)$ и следовательно v_1 несмежна некоторой вершине из w_1, w_2, w_3, w_4. Если v_1 несмежна w_1 или w_4, граф G очевидно изоморфен графу F_2, а, если v_1 несмежна w_2 или w_3, тогда граф G очевидно изоморфен графу F_3.

Случай 2. $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 4$. Без ограничения общности можно предположить, что v_2 смежна вершинам w_1, w_2, w_3, w_4 и несмежна вершине w_5. Из $\alpha(G) = 2$ следует $[v_1, w_5] \in E(G)$. Допустим, что $[v_1, w_1] \notin E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает $[v_1, w_3], [v_1, w_4] \in E(G)$. Так как $d(v_1) = 3$, то $[v_1, w_2] \notin E(G)$. Мы получили, что граф G изоморфен графу F_4. Если предположить, что $[v_1, w_4] \notin E(G)$, аналогичным образом следует, что граф G изоморфен графу F_4. Пусть тепер $[v_1, w_1], [v_1, w_4] \in E(G)$. Тогда из $d(v_1) = 3$ следует $[v_1, w_2] \notin E(G)$ и $[v_1, w_3] \notin E(G)$. В этом случае граф G очевидно изоморфен графу F_5.

Случай 3. $d(v_1) = d(v_2) = 3$. Так как $d(v_2) = 3$, то без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, w_1], [v_2, w_2] \in E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ следует, что одно из ребер $[v_2, w_3], [v_2, w_5]$ непременно является ребром графа G. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, w_3] \in E(G)$. Так как $d(v_2) = 3$, то $[v_2, w_4], [v_2, w_5] \notin E(G)$. Из $\alpha(G) = 2$ вытекает, что $[v_1, w_4], [v_1, w_5] \in E(G)$. Тоже из $\alpha(G) = 2$ следует, что ровно одно из ребер $[v_1, w_1], [v_1, w_3]$ является ребром графа G. В том и другом случае граф G очевидно изоморфен графу F_6.

Теорема 12 доказана полностью.

Из теорем 3, 10 и 12 очевидным образом получаем

Теорема 13. Пусть $G \in \mathbf{H}(r, r+1)$, $r \geqq 3$, и $|V(G)| = r + 4$. Тогда верно одно из следующих двух утверждений:

а) граф G изоморфен некоторому из графов $K_{r-3} + F_i$, $1 \leqq i \leqq 7$;

б) существует вершина $v \in V(G)$, такая, что подграф $G - v$ изоморфен графу $K_{r-2} + C_5$.

Напомним, что графы F_i, $1 \leqq i \leqq 6$, заданы соответственно на рисунках 2, 4, 5, 6, 7 и 8, а граф $F_7 = \bar{C}_7$.

IX. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛТАТОВ К КРИТИЧЕСКИМ (3,3)–ГРАФАМ РАМСЕЯ

Определение 18. Будем говорить, что (3,3)–граф Рамсея G является критическим (3,3)–графом Рамсея, если любой собственый его подграф не является (3,3)–графом Рамсея.

Из равенства $R(3,3) = 6$ и леммы 5 следует, что полный граф с 6 вершинами K_6 является критическим (3,3)–графом Рамсея, так как любой собственный подграф графа K_6 очевидно имеет хроматическое число меньше 6. В [26, 27] доказано, что существует бесконечно много неизоморфных критических (3,3)–графов Рамсея. Очень простая бесконечная система неизоморфных критических (3,3)–графов Рамсея было построена в [2]. Точнее там доказано, что:

(21) для любого натурального числа r граф $C_3 + C_{2r+1}$ является критическим (3,3)–графом Рамсея, [2].

В [3] построено бесконечно много критических (3,3)–графов Рамсея с кликовым числом 4. Бесконечные серии неизморфных критических (3,3)–графов Рамсея с разнообразными свойствами построено в [4]. В [7] доказано, что для натурального числа $n \neq 1, 2, 3, 4, 5, 7$ (и только для этих n) существует критический (3,3)–граф Рамсея с n вершинами.

Согласно (21) и теореме 4 граф $C_3 + C_5$ является единственным (3,3)–графом Рамсея, имеющим неболее 8 вершин и кликовым числом меньше 6. Тем самым он изоморфен графу Грахама [22]. Из сказанного вытекает.

Следствие 4. Графы $C_3 + C_5$ и K_6 являются единственными (с точносью до изоморфизма) критическими (3,3)–графами Рамсея, имеющими неболее 8 вершин.

В [6,7] доказано, что существует критический (3,3)–граф Рамсея с 9 вершинами, а в [10] что

(22) граф $K_2 + F_5$, где F_5 задан на рис. 7, является критическим (3,3)–графом Рамсея.

В [8, 9, 10] доказано, что любой критический (3,3)–граф Рамсея с 9 вершинам имеет число независимости 2. В [1, 10] доказано, что с точностью до изоморфизма существует единственный критический (3,3)–граф Рамсея с 9 вершинами. Ниже мы даем новые доказательства этим двум фактам. Точнее докажем следующие:

Теорема 14 [8, 9, 10]. Пусть G является критическим (3,3)–графом Рамсея с 9 вершинами. Тогда $\alpha(G) = 2$.

Теорема 15 [1, 10]. Пусть G является критическим (3,3)–графом Рамсея с 9 вершинами. Тогда граф G изоморфен графу $K_2 + F_5$, где F_5 является графом, заданным на рис. 7.

Для доказательства этих теорем нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 9 [1]. Пусть G–граф, который обладает 6–хроматическим разложением

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6$$

со следующим свойством: любой треугольник порожденного подграфа $\langle V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6 \rangle$ имеет непременно одну вершину в V_3 и вторую вершину — в V_4. Тогда граф G не является (3,3)–графом Рамсея.

Доказательство леммы 9. На рис. 9 задана 2-раскраска ребер полного графа с 6 вершинами, в которой есть ровно два монохроматические треугольника, а именно $[z_3, z_5, z_6]$ и $[z_4, z_5, z_6]$. Рассмотрим отображение $\varphi: V(G) \to V(K_6)$, определяемое следующим образом: $(v)\varphi = z_i$, если $v \in V_i$. Используя отображние φ и заданную на рис. 9 2-раскраску ребер графа K_6, строим 2-раскраску ребер графа G следующим образом: ребро $[v_1, v_2] \in E(G)$ имеет такой же цвет, что ребро $[(v_1)\varphi, (v_2)\varphi]$ графа K_6. Покажем, что полученная 2-раскраска ребер графа G не содержит монохроматических треугольников. Допустим противное, т.е. что эта 2-раскраска содержит монохроматический треугольник $[v_1, v_2, v_3]$. Тогда $[(v_1)\varphi, (v_2)\varphi, (v_3)\varphi]$ будет монохроматическим треугольником графа K_6. Так как $[z_3, z_5, z_6]$ и $[z_4, z_5, z_6]$ единственные монохроматические треугольники графа K_6, то $[(v_1)\varphi, (v_2)\varphi, v_3)\varphi] = [z_3, z_5, z_6]$, или $[(v_1)\varphi, (v_2)\varphi, (v_3)\varphi] = [z_4, z_5, z_6]$. Последние две равенства противоречат условию, что любой треугольник

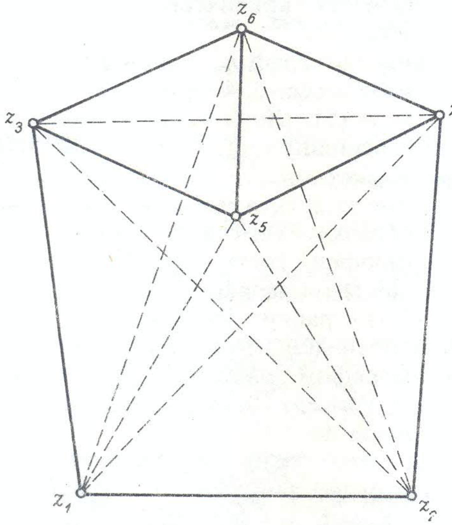

Рис. 9

порожденного подграфа $<V_3 \cup V_4 \cup V_5 \cup V_6>$ имеет одну вершину в V_3 и другую — в V_4.

Лемма 9 доказана полностью.

Доказательство теоремы 14. Допустим противное, т. е. что существует критический (3,3)-граф Рамсея G с 9 вершинами $\alpha(G) \geqq 3$. Из того, что K_6 является (3,3)-графом Рамсея, следует $\mathrm{cl}(G) < 6$. Согласно лемме 5, $\chi(G) \geqq 6$. Следовательно, $G \in \mathbf{H}(5,6)$. Согласно теореме 10 выполнено одно из следующих двух утверждений:

а) граф G изоморфен графу $K_2 + F_1$ (см. рис. 2);

б) существует вершина $v \in V(G)$, такая, что подграф $G-v$ изоморфен графу $K_3 + C_5$.

Согласно (21) граф $K_3 + C_5 = C_3 + C_5$ является (3,3)-графом Рамсея. Так как G является критическим (3,3)-графом Рамсея, то утверждение б) неверно. Следовательно, граф G изоморфен графу $K_2 + F_1$. Пусть $V(K_2) = \{v_1, v_2\}$. Рассмотрим следующее 6-хроматическое разложение графа (см. рис. 2):

$$\{v_1\} \cup \{v_2\} \cup \{6, 7\} \cup \{1, 3\} \cup \{2, 5\} \cup \{4\}.$$

Очевидно любой треугольник графа F_1 имеет одну вершину в $\{6, 7\}$ и вторую вершину в $\{1, 3\}$. Согласно лемме 9 граф $K_2 + F_1$ не является (3,3)-графом Рамсея. Так как граф G изоморфен графу $K_2 + F_1$, то он тоже не является (3,3)-графом Рамсея. Полученое противоречие завершает доказательство теоремы 14.

Доказательство теоремы 15. Пусть G является произвольным критическим (3,3)−графом Рамсея с 9 вершинами. В доказательстве теоремы 14 мы показали, что $G \in \mathbf{H}(5, 6)$ и что подграфы $G-v$, $v \in V(G)$, неизоморфны графу $K_3 + C_5$. Из теорем 13 и 14 вытекает, что граф G изоморфен некоторому из графов $K_2 + F_i$, $2 \leqq i \leqq 7$. Докажем, что из этих графов только граф $K_2 + F_5$ является критическим (3,3)−графом Рамсея. Этим теорема 15 будет доказана.

Прежде всего докажем, что граф $K_2 + F_2$ вовсе не является (3,3)−графом Рамсея. Рассмотрим следующее 4-хроматическое разложение графа F_2: $\{6, 7\} \cup \{2, 4\} \cup \{1, 3\} \cup \{5\}$. Любой треугольник графа F_2 имеет одну вершину в $\{6, 7\}$ и вторую вершину в $\{2, 4\}$. Согласно лемме 9 граф $K_2 + F_2$ не является (3,3)−графом Рамсея.

Граф $F_2-[2, 7]$ и F_4 очевидно изоморфны. Следовательно, граф $K_2 + F_4$ тоже не является (3,3)−графом Рамсея.

Граф $F_3-[3, 7]$ изоморфен графу F_5. Согласно (22), Граф $K_2 + F_3$ содержит собственный (3,3)−подграф Рамсея и, следовательно, он не является критическим (3,3)−графом Рамсея.

Графы $F_2-[2, 7]$ и F_4 очевидно изоморфны. Следовательно, граф $K_2 + F_4$ является собственным подграфом графа $K_2 + F_5$. Согласно (22) граф $K_2 + F_6$ не является (3,3)−графом Рамсея. Заметим, что этот факт можно доказать тоже и при помощи леммы 9.

Осталось показать, что граф $K_2 + F_7$ не является критическим (3,3)−графом Рамсея. Нетрудно заметить, что граф F_5 изоморфен собственному подграфу графа $F_7 = \bar{C}_7$. Согласно (22) граф $K_2 + F_7$ содержит собственный (3,3)−подграф Рамсея. Следовательно $K_2 + F_7$ не является критическим (3,3)−графом Рамсея.

Теорема 15 доказана полностью.

Через T обозначим граф, заданный на рис. 10. В [1] доказано, что граф $K_2 + T$ является критическим (3,3)−графом Рамсея, который очевидно не

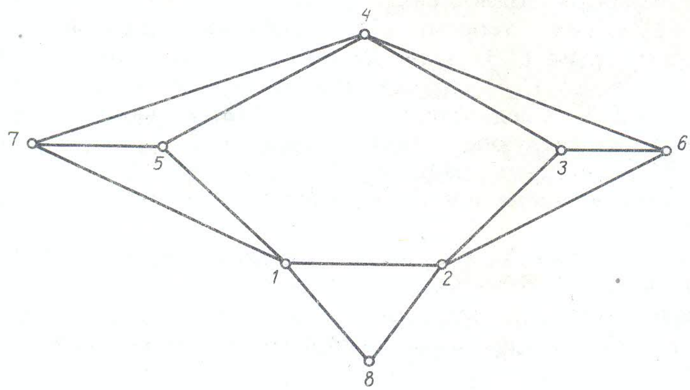

Рис. 10

изоморфен графу $C_3 + C_7$ (см. (21)). В [1] доказано тоже, что граф $K_1 + \bar{C}_9$ содержит критический (3,3)−подграф Рамсея с 10 вершинами, который очевидно неизоморфен уже упомянатым критическим (3,3)−графам Рамсея. Следовательно, существуют хотя бы три неизоморфные критические (3,3)−графы Рамсея с 10 вершинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ненов, Н. Графи на Ремзи и някои константи, свързани с тях. Дисертация, Соф. унив., Фак. мат. и мех., 1980.
2. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двуцветной раскраске ребер. — Сердика, **5**, 1979, 303—305.
3. Хаджииванов, Н., Н. Ненов. $t-$графы с кликовым числом, равным 4. — В: Математика и математическо образование. Доклади Осма пролетна конференция. София, БАН, 1979, 565—577.
4. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. О минимальных $t-$графах. — Сердика, **6**, 1980, 128—142.
5. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. О числе Грахама–Спенсера. — Докл. БАН, **32**, 1979, 155—158.
6. Ненов, Н. О существовании минимального $t-$графа с деветью вершинами. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **72** (под печат).
7. Ненов, Н. О существовании минимального $t-$графа с данным числом вершин. — Сердика, **6**, 1980, 270—274.
8. Ненов, Н. Новая оценка снизу для числа Грахама–Спенсера $N(3, 5)$. — Сердика, **6**, 1980, 373—383.
9. Ненов, Н. О числе независимости минимальных $t-$графов. — В: Математика и математическо образование. Доклади Девета пролетна конференция. София, БАН, 1980, 74—78.
10. Ненов, Н. С точностью до изоморфизма существует единственный минимальный t-граф с девятью вершинами. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **73** (под печат).
11. Ненов, Н. О (3,4)-графах Рамсея. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **73** (под печат).
12. Ненов, Н. Об одной константе, связанной с (3,4)–графами Рамсея. — Сердика, **7**, 1981, 366—371.
13. Ненов, Н. Об одном предположении Лина, относящемся к числам Рамсея–Грахама–Спенсера. — Докл. БАН, **33**, 1980, 1171—1174.
14. Хаджииванов, Н., Н. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глисона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. — Докл. БАН, **31**, 1978, 631—633.
15. Ненов, Н., Н. Хаджииванов. О некоторых 2-раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **71**, ч. II, 1984 (под печат).
16. Ненов, Н. О числах Зыкова и некоторые их применения в теории Рамсея. — Сердика, **9**, 1983, 161—167.
17. Ramsey, P. On a problem of formal logic. — London Math. Soc., **30**, 1930, 260—286.
18. Graver, J., J. Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey theorem. — J. Combin. Theory, **3**, 1968, 1—5.
19. Greenwood R., A. Gleason. Combinatorial relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., **7**, 1955, 1—7.
20. Graham, R. On edgewise 2-coloured graphs with monochromatic trangles and containing no complete hexagon. — J. Combin. Theory, **4**, 1968, 300.
21. Folkman, J. Graphs with monochromatic complete subgraph in every edge colouring. — SIAM J. Apll. Math., **18**, 1970, 19—24.
22. Graham, R., J. Spenser. On small graphs with forced monochrotic triangles. — Lecture Notes in Math., **186**, 1972, 137—141.
23. Lin, S. On Ramsey number and K_r-colouring of graphs. — J. Combin. Theory, Ser. B, **12**, 1972, 82—92.
24. Schauble, M. Zu einem Kantenfärbungsproblem. Bemerkung zu einer Note von R. Graham. — Wiss. Z. Th. Ilmenau, **15**, 1969, H. 2, 55—58.
25. König, D. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.
26. Burr, S., P. Erdos, L. Lovasz. On graphs of Ramsey type. Ars Combinatoria, **1**, 1976, 176—190.
27. Nesetril, J., V. Rödl. The structure of critical Ramsey graphs. — Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **32**, 1978, 295—300.
28. Mycielski, J. Sur le coloriage des graphes. — Coll. Math., **32**, 1955, 161—162.
29. Chvatal, V. The minimality of the Mycielski graph. — Lecture Notes Math., **406**, 1973, 243—246.
30. Avis, D. On minimal 5-chromatic triangle-free graphs. — J. Graph Theory, **3**, 1979, 397—400.
31. Irving, R. On a bound of Graham and Spencer for a graph colouring constant. — J. Combin. Theory, Ser. B, **15**, 1973, 200—203.
32. Ope, O. Теория графов. Москва, 1968.
33. Зыков, А. О некоторых свойствах линейных комплексов. — Мат. сборник, **24**, 1949, 163—188.

Поступила 24. II. 1981 г.

SOME APPLICATIONS OF ZYKOV'S NUMBERS IN RAMSEY'S THEORY

N. D. Nenov

(SUMMARY)

The following notatvons are used

G — unoriented finite graph without loops and multiple edges;
$V(G)$ — the set of vertices of graph G;
$\mathrm{cl}(G)$ — the clique number of graph G;
$\chi(G)$ — the chromatic number of graph G;
$\mathbf{H}(p, q)$ — the set of all graphs G with $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ and $\chi(G) \geqq q$;
$Z(p, q)$ — $\min\{|V(G)|, G \in \mathbf{H}(p, q)\}$.

This paper proves that $Z(r, r+1) = r+3$ and $Z(r, r+2) = r+6$, $r \geqq 4$. All graphs $\mathbf{H}(r, r+1)$ with $r+3$ and $r+4$ vertices are found. The above-mentioned results are applied to Ramsey's theory.