Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 34, N° 11, 1981

[70]

МАТЕМАТИКА
Теория графов

ПРИМЕР 15-ВЕРШИННОГО (3,3)-ГРАФА РАМСЕЯ С КЛИКОВЫМ ЧИСЛОМ 4

Н. Д. Ненов

(Представлено академиком Б. Петканчиным 23 июня 1981)

1. Введение. Под графом будем понимать упорядоченную пару $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$, будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \dots, v_p$ называется p-кликой, если любые две из них смежны. Максимальное число вершин графа G, составляющих клику, будем называть кликовым числом графа G и обозначать $\mathrm{cl}(G)$.

Любое разложение

$$V(G)=V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2=\varnothing \tag{1}$$

называется 2-раскраской вершин графа G, а любое разложение

$$E(G)=E_1 \cup E_2,\ E_1 \cap E_2=\varnothing \tag{2}$$

называется 2-раскраской ребер графа G.

Определение 1. Если в 2-раскраске вершин (1) графа G все вершины некоторого треугольника принадлежат либо V_1, либо V_2, будем говорить, что этот треугольник является монохроматическим треугольником этой 2-раскраски. Монохроматический треугольник 2-раскраски (2) ребер графа G определяется аналогичным образом.

Определение 2. Будем говорить, что граф G является $(3,3)_v$-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его вершин есть монохроматический треугольник.

Определение 3. Будем говорить, что граф G является $(3,3)_e$-графом Рамсея, если в любой 2-раскраске его ребер есть монохроматический треугольник.

В [1] Грахам и Спенсер поставили вопрос о нахождении минимального натурального числа n (обозначим его через α), для которого существует $(3,3)_e$-граф Рамсея с n вершинами и кликовым числом 4. Подробный обзор результатов в этом направлении содержится в [4, 5]. Отметим последние известные факты: $\alpha \leqq 16$, [4, 5] и $\alpha \geqq 11$, [6].

В этой статье докажем неравенство $\alpha \leqq 15$. Для этого рассмотрим еще одну константу, связанную с $(3,3)_v$-графами Рамсея.

Определение 4. Через β обозначим наименьшее натуральное число n, для которого существует $(3,3)_v$-граф Рамсея G с n вершинами и $\mathrm{cl}(G)=3$.

Существование числа β впервые было доказано Ердешем и Рожерсом в [2]. В [3] Ирвинг доказал, что $\beta \leqq 17$. В настоящей работе докажем, что $\beta \leqq 14$.

2. Об одном неравенстве между числами α **и** β.

Верно следующее:

Предложение, [3]. $\alpha \leqq \beta + 1$.

Это предложение вытекает из очевидного факта, что если граф G является $(3,3)_v$-графом Рамсея и $\mathrm{cl}\,(G)=3$, тогда граф $G_1 = G+v$, получающийся добавлением к графу G одной вершиный v, смежной всем его вершинам, является $(3,3)_v$-графом Рамсея и $\mathrm{cl}\,(G_1)=4$.

3. Доказательство неравенства $\beta \leqq 14$.

Через Γ обозначим граф, заданный на рис. 1. Через Γ_1 обозначим его подграф, порожденный множеством вершин $1, 2, \ldots, 7$. Очевидно граф Γ_1 получается от полного графа с 7 вершинами удалением всех ребер простого цикла $1, 2, \ldots, 7, 1$. Граф Γ получается от графа Γ_1 добавлением независимого множества вершин $1', 2', \ldots, 7'$, при том вершина i', $1 \leqq i \leqq 7$, смежна четырем ближайшим вершинам вершине i графа Γ_1. Докажем следующее утверждение

Теорема. Граф Γ является $(3,3)_v$-графом Рамсея с кликовым числом 3.

Доказательство теоремы. 1. Граф Γ является $(3,3)_v$-графом Рамсея. Допустим противное и пусть $V(\Gamma) = V_1 \cup V_2$ является 2-раскраской вершин графа Γ без монохроматических треугольников. Положим $V_1' = V_1 \cap V(\Gamma_1)$ и $V_2' = V_2 \cap V(\Gamma_1)$. Ясно, что $V(\Gamma_1) = V_1' \cup V_2'$ является 2-раскраской вершин графа Γ_1 без монохроматических треугольников. Очевидно среди любых 5 вершин графа Γ_1 есть три, которые составляют треугольник графа Γ. Следовательно,

$$|V_1'| \leqq 4 \text{ и } |V_2'| \leqq 4. \tag{3}$$

Без ограничение общности можно предположить, что $|V_1'| \leqq |V_2'|$. Тогда из (3) и $|V_1'| + |V_2'| = 7$ следует

$$|V_1'| = 3 \text{ и } |V_2'| = 4. \tag{4}$$

Так как рассматриваемая 2-раскраска вершин графа Γ не содержит монохроматических треугольников, то две из всех трех вершин множества V_1' несмежны. Без ограничения общности можно предположить, что $1, 2 \in V_1'$. Для третьей вершины V_1' представляются 5 возможностей. Ввиду симметричности графа Γ, среди них только три принципиально различные: $3 \in V_1'$, $4 \in V_1'$ и $5 \in V_1'$.

Случай 1. $3 \in V_1'$. Из (4) следует $V_1' = \{1, 2, 3\}$ и $V_2' = \{7, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим вершину $2'$. Если $2' \in V_1$ получим, что все вершины треугольника $[2', 1, 3]$ принадлежат V_1, а если $2' \in V_2'$ — тогда все вершины треугольника $[2', 4, 7]$ принадлежат V_2. Это противоречит нашему допущению, что нет монохроматических треугольников.

Случай 2. $4 \in V_1'$. Из (4) следует $V_1' = \{1, 2, 4\}$ и $V_2' = \{3, 5, 6, 7\}$. Рассмотрим вершину $2'$. Если $2' \in V_1$ получим, что все вершины треугольника $[1, 4, 2']$ принадлежат V_1, а если $2' \in V_2$ — тогда все вершины треугольника $[3, 7, 2']$ принадлежат V_2. Это снова противоречит нашему допущению, что нет монохроматических треугольников.

Случай 3. $5 \in V_1'$. Из (4) следует, что $V_1' = \{1, 2, 5\}$ и $V_2' = \{3, 4, 6, 7\}$. Рассмотрим вершину $4'$. Если $4' \in V_1$, тогда все вершины треугольника [2,