

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАМСЕЕВСКИХ КРАТНОСТЯХ

Недялко Ненов

Будем говорить, что множество вершин v_1, \dots, v_p графа G является p -кликкой, если любые две из них смежны. Если среди этих вершин нет двух смежных вершин, будем говорить, что множество вершин v_1, \dots, v_p является p -антикликкой. Через $t(G;p)$ и $\bar{t}(G;p)$ обозначим соответственно число p -клик и число p -антиклик графа G . Число $m(n;p,q)$ определяется равенством $m(n;p,q) = \min\{t(G;p) + \bar{t}(G;q) \mid G \in H(n)\}$, где $H(n)$ обозначает множество всех графов с n вершинами. Через $M(p,q)$ обозначается число $m(R(p,q);p,q)$, где $R(p,q)$ является соответствующим числом Рамсея. В работе доказывается, что если $R(p,q) = R(p-1,q) + R(p,q-1)$, тогда $M(p,q) \geq 2$. В частности $M(3,5) \geq 2$ и $M(4,4) \geq 2$.

Рассматриваются только обыкновенные графы, т.е. конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Будем говорить, что множество вершин v_1, \dots, v_p графа G является p -кликкой, если любые две из них смежны.

Определение 2. Будем говорить, что множество вершин v_1, \dots, v_q графа G является q -антикликкой, если любые две из них не смежны.

Через $t(G;p)$ обозначим число p -клик графа G , а через $\bar{t}(G;q)$ — число q -антиклик графа G .

Через $R(p,q)$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: для любого графа G с n вершинами либо $t(G;p) > 0$, либо $\bar{t}(G;q) > 0$. Существования чисел $R(p,q)$ было доказано впервые Рамсеем [3]. Эти числа называются числами Рамсея. Отметим следующие очевидные свойства чисел Рамсея:

- (1) $R(p,q) = R(q,p)$
- (2) $R(p,2) = p$
- (3) $R(p,q) > \max(p,q)$, если $p \geq 3, q \geq 3$.

До сих пор известны только следующие числа Рамсея:

$q \backslash p$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			
5	14				
6	18				
7	23				

Для любого графа G положим $m(G; p, q) = t(G; p) + \bar{t}(G; q)$.
 Через $H(n)$ обозначим множество всех графов с n вершинами. Положим
 $m(n; p, q) = \min \{ m(G; p, q) \mid G \in H(n) \}$. Из определения
 чисел Рамсея следует, что $m(n; p, q) = 0$, если $n < R(p, q)$ и $m(n; p, q) > 0$,
 если $n \geq R(p, q)$.

Определение 3. Следуя [6], числа $m(R(p, q); p, q)$ назовем крат-
 ностями Рамсея. Для удобства положим $M(p, q) = m(R(p, q); p, q)$.
 Из определения чисел Рамсея следует $M(p, q) \geq 1$. Очевидно $M(p, 2) = 1$
 и $M(p, q) = M(q, p)$.

Гудман, [5], доказал, что

$$m(n; 3, 3) = \begin{cases} \frac{1}{3} k(k-1)(k-2), & n = 2k \\ \frac{1}{3} 2k(k-1)(4k+1), & n = 4k+1 \\ \frac{1}{3} 2k(k+1)(4k-1), & n = 4k+3 \end{cases}$$

В частности,

$$(4) \quad M(3, 3) = 2$$

В [7] даны некоторые оценки сверху для чисел $M(p, q)$. В частности, полу-
 чены следующие неравенства: $M(3, 4) \leq 3$, $M(4, 5) \leq 4$, $M(4, 4) \leq 12$. По
 всей видимости эти оценки неточны. Так например в [1], [2] доказано, что
 $M(3, 4) = 1$.

Отметим следующее свойство чисел Рамсея [4]:

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

В настоящей работе мы докажем

Теорема. Если $p \geq 3$, $q \geq 3$ и

$$(5) \quad R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

то $M(p, q) \geq 2$.

Из (4) следует, что для числа $M(3, 3)$ эта оценка точная. Отметим еще,
 что если (5) не выполняется, утверждение теоремы неверно, так как $M(3, 4) = 1$
 [1], [2].

Пусть v -вершина графа G . Через $A(v)$ обозначим множество всех вер-
 шин графа G , которые смежны вершине v , а через $B(v)$ - множество всех не-
 смежных ей вершин, отличных от ней самой.

Для доказательства теоремы нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1. $m(n; p, q) < m(n+1; p, q)$, если $n \geq R(p, q) - 1$.

Лемма 2. Пусть $R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ и G является гра-
 фом с $R(p, q)$ вершинами. Если вершина v не входит ни в какой p -кликке
 и ни в какой q -антикликке графа G , тогда либо $A(v)$ содержит q -антикли-
 ку, либо $B(v)$ содержит p -кликку.

Доказательство леммы 1. Пусть G является графом с $n+1$ вершинами, ко-
 торый имеет в точности $m(n+1; p, q)$ p -клик и q -антиклик. Возьмем
 вершину v графа G , которая участвует либо в некоторой p -кликке, либо в
 некоторой q -антикликке. Рассмотрим граф G' получающийся от графа G удале-
 нием вершины v . Очевидно G' имеет n вершин и $m(G; p, q) \leq m(n+1; p, q) - 1$.
 Следовательно $m(n; p, q) \leq m(n+1; p, q) - 1$, если $n \geq R(p, q) - 1$.

