[68]

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ

Доклади на Десета пролетна конференция на СМБ. Слънчев бряг 6—9 април 1981

София, БАН, 1981

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РАМСЕЕВСКИХ КРАТНОСТЯХ

Недялко Ненов

Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G является p-кликой, если любые две из них смежны. Если среди этих вершин нет двух смежных вершин, будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ является p-антикликой. Через $t(G;p)$ и $\bar{t}(G;p)$ обозначим соответственно число p-клик и число p-антиклик графа G. Число $m(n;p,q)$ определяется равенством $m(n;p,q) = \min\{t(G;p)+\bar{t}(G;q) \mid G \in H(n)\}$, где $H(n)$ обозначает множество всех графов с n вершинами. Через $M(p,q)$ обозначается число $m(R(p,q);p,q)$, где $R(p,q)$ является соответствующим числом Рамсея. В работе доказывается, что если $R(p,q)=R(p-1,q)+R(p,q-1)$, тогда $M(p,q) \geqq 2$. В частности $M(3,5) \geqq 2$ и $M(4,4) \geqq 2$.

Рассматриваются только обыкновенные графы, т.е. конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Определение 1. Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G является p-кликой, если любые две из них смежны.

Определение 2. Будем говорить, что множество вершин $v_1, \ldots, v_q$ графа G является q-алтикликой, если любые две из них не смежны.

Через $t(G;p)$ обозначим число p-клик графа G, а через $\bar{t}(G;q)$ – число q-антиклик графа G.

Через $R(p,q)$, $p \geqq 2$, $q \geqq 2$, обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: для любого графа G с n вершинами либо $t(G;p)>0$, либо $\bar{t}(G;q)>0$. Существования чисел $R(p,q)$ было доказано впервые Рамсеем [3]. Эти числа называются числами Рамсея. Отметим следующие очевидные свойства чисел Рамсея:

(1) $R(p,q)=R(q,p)$

(2) $R(p,2)=p$

(3) $R(p,q)>\max(p,q)$, если $p \geqq 3$, $q \geqq 3$.

До сих пор известны только следующие числа Рамсея:

q \ p	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4	9	18			
5	14				
6	18				
7	23				

Для любого графа G положим $m(G;p,q) = t(G;p) + \bar{t}(G;q)$. Через $H(n)$ обозначим множество всех графов с n вершинами. Положим $m(n;p,q) = \min\{m(G;p,q) \mid G \in H(n)\}$. Из определения чисел Рамсея следует, что $m(n;p,q) = 0$, если $n < R(p,q)$ и $m(n;p,q) > 0$, если $n \geqq R(p,q)$.

Определение 3. Следуя [6], числа $m(R(p,q);p,q)$ назовем кратностями Рамсея. Для удобства положим $M(p,q) = m(R(p,q);p,q)$. Из определения чисел Рамсея следует $M(p,q) \geqq 1$. Очевидно $M(p,2) = 1$ и $M(p,q) = M(q,p)$.

Гудман, [5], доказал, что

$$m(n;3,3) = \begin{cases} \frac{1}{3} k(k-1)(k-2), & n = 2k \\ \frac{1}{3} 2k(k-1)(4k+1), & n = 4k+1 \\ \frac{1}{3} 2k(k+1)(4k-1), & n = 4k+3 \end{cases}$$

В частности,

(4) $$M(3,3) = 2$$

В [7] даны некоторые оценки сверху для чисел $M(p,q)$. В частности, получены следующие неравенства: $M(3,4) \leqq 3$, $M(4,5) \leqq 4$, $M(4,4) \leqq 12$. По всей видимости эти оценки неточные. Так например в [1],[2] доказано, что $M(3,4) = 1$.

Отметим следующее свойство чисел Рамсея [4]:

$$R(p,q) \leqq R(p-1,q) + R(p,q-1).$$

В настоящей работе мы докажем

Теорема. Если $p \geqq 3$, $q \geqq 3$ и

(5) $$R(p,q) = R(p-1,q) + R(p,q-1)$$

то $M(p,q) \geqq 2$.

Из (4) следует, что для числа $M(3,3)$ эта оценка точная. Отметим еще, что если (5) не выполняется, утверждение теоремы неверно, так как $M(3,4) = 1$ [1],[2].

Пусть v -вершина графа G. Через $A(v)$ обозначим множество всех вершин графа G, которые смежны вершине v, а через $B(v)$ - множество всех несмежных ей вершин, отличных от ней самой.

Для доказательства теоремы нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1. $m(n;p,q) < m(n+1;p,q)$, если $n \geqq R(p,q)-1$.

Лемма 2. Пусть $R(p,q) = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ и G является графом с $R(p,q)$ вершинами. Если вершина v не входит ни в какой p-клике и ни в какой q-антиклике графа G, тогда либо $A(v)$ содержит q-антиклику, либо $B(v)$ содержит p-клику.

Доказателство леммы 1. Пусть G является графом с $n+1$ вершинами, который имеет в точности $m(n+1;p,q)$ p-клик и q-антиклик. Возьмем вершину v графа G, которая участвует либо в некоторой p-клике, либо в некоторой q-антиклике. Рассмотрим граф G' получающийся от графа G удалением вершины v. Очевидно G' имеет n вершин и $m(G';p,q) \leqq m(n+1;p,q) - 1$. Следователно $m(n;p,q) \leqq m(n+1;p,q) - 1$, если $n \geqq R(p,q) - 1$.

Доказательство леммы 2. Так как $|A(v)|+|B(v)|=R(p,q)-1$, из равенства (5) следует либо $|A(v)| \geqq R(p-1,q)$, либо $|B(v)| \geqq R(p,q-1)$. Предположим, что $|A(v)| \geqq R(p-1,q)$. Согласно определению чисел Рамсея $A(v)$ содержит либо $(p-1)$-клика, либо q-антиклика. Поскольку v не является вержиной p-клики, $A(v)$ содержит q-антиклика. Если $|B(v)| \geqq R(p,q-1)$, аналогичным образом доказывается, что $B(v)$ содержит p-клика. Этим лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть G -гграф с $R(p,q)$ вершинами. Нужно показать, что $m(G;p,q) \geqq 2$. Рассмотрим следующие два случая:

1. Существует вершина v_0 графа G, которая не входит ни в какой p-клике и ни в какой q-антиклике.

2. Любая вершина графа G входит либо в некоторой p-клике, либо в некоторой q-антиклике.

Случай 1. Согласно лемме 2 либо $A(v_0)$ содержит q-антиклика, либо $B(v_0)$ содержит p-клика. Предположим, что $A(v_0)$ содержит q-антиклику $[v_1, \ldots, v_q]$. Пусть $v' \in B(v_0)$. Если вершина v' содержится в некоторой p-клике или в некоторой q-антиклике, очевидно $m(G;p,q) \geqq 2$. Иначе, согласно лемме 2, либо $A(v')$ содержит q-антиклика, либо $B(v')$ содержит p-клика. Если предположить, что $A(v')$ не содержит q-антиклику $[v_1, \ldots, v_q]$ ясно, что $m(G;p,q) \geqq 2$. Остается рассмотрет случай когда имеем $A(v) \supset [v_1, \ldots, v_q]$ для любой вершиной $v \in B(v_0)$. В частности

(6) $$A(v_1) \supset B(v_0)$$

Если предположить, что $|A(v_0)| > R(p-1,q)$, из определения чисел Рамсея и леммы 1 следует $m(G;p,q) \geqq 2$. Поэтому остается предположить, что $|A(v_0)| \leqq R(p-1,q)$. Из равенства (5) следует $|B(v_0)| \geqq R(p,q-1)-1$. Так как очевидно $R(p-1,q-1) \leqq R(p,q-1)-1$ и $B(v_0)$ не содержит $(q-1)$-антиклик (иначе v_0 будет содержаться в некоторой q-антиклике), то $B(v_0)$ содержит некоторую $(p-1)$-клику $[v_1', \ldots, v_{p-1}']$. Из (6) следует, что $[v_1, v_1', \ldots, v_{p-1}']$ является p-кликой графа и следовательно $m(G;p,q) \geqq 2$.

Если $B(v_0)$ содержит p-клика рассуждения аналогичны.

Случай 2. В этом случае неравенство $m(G;p,q) \geqq 2$ следует непосредственно из неравенства (3).

Следствие. $M(3,5) \geqq 2$ и $M(4,4) \geqq 2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Хаджииванов, Н.Ненов. О некоторых 2-раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. Год. СУ 71 (под печат).

2. Н.Хаджииванов, Н.Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. Докл. БАН 31 (1978), 631 - 633.

3. F. Ramsey, On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. 30 (1930), 246-286.

4. P. Erdos, G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. Compositio Math. 2 (1935), 463-470.

5. A. Goodman. On Sets of Acquaintances and Strangers at any Party. Amer. Math. Month. 66 (1959), 778-783.

6. F. Harary, G. Prins. Generalized Ramsey theory for graphs. IV. Networks 4 (1974), 163-173.

7. M. Jacobson. A note on Ramsey multiplicity. Discrete Math. 29 (1980), 201-203.