[66]

Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 34, N° 9, 1981

МАТЕМАТИКА
Теория графов

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ГРИЙНВУДА И ГЛИССОНА О ТРИЦВЕТНЫХ РАСКРАСКАХ РЕБЕР ПОЛНОГО ГРАФА С 17 ВЕРШИНАМИ

Н. Д. Ненов

(*Представлено членом-корреспондентом Я. Тагамлицким 16. IV. 1981*)

1. Введение и формулировка основных результатов. Под обыкновенным графом будем понимать упорядоченную пару $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторое подмножество множества всех 2-элементных подмножеств $V(G)$. Будем рассматривать только обыкновенные графы. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$ будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ называется p-кликой, если любые две из них смежны. Через $\mathrm{cl}(G)$ обозначим наибольшее натуральное число p, для которого граф G имеет p-клику. Это число называетя кликовым числом графа G. Любое разложение

$$E(G)=E_1 \cup \cdots \cup E_s, \quad E_i \cap E_j=\varnothing, \quad i \neq j, \tag{1}$$

называется s-раскраской ребер графа G. Для удобства будем говорить, что ребра множества E_i окрашены в i-ый цвет.

Определение 1. Пусть дана s-раскраска (1) ребер графа G. Если все ребра некоторой p-клики графа G принадлежат множеству E_i (т. е. окрашены в i-тый цвет) будем говорить, что эта p-клика является монохроматической p-кликой i-ого цвета данной s-раскраски.

Определение 2. Будем говорить, что граф G является $(p_1, \ldots, p_s)$ — графом Рамсея, если для любой s-раскраски его ребер, существует i, $1 \leqq i \leqq s$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-ого цвета.

Определение 3. Будем говорить, что графа G является критическим $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, если он является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, однако все его собственные подграфы не являются $(p_1, \ldots, p_s)$-графами Рамсея.

В [5] доказано, что если $q \geqq max(p_1, \ldots. p_s)$, тогда существует $(p_1, \ldots p_s)$-граф Рамсея G с $\mathrm{cl}(G)=q$.

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Следуя Зыкову [9] под соединением G_1+G_2 графов G_1 и G_2 будем подразумевать граф G, для которого $V(G)=V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G)=E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где E' состоит из всех 2-элементных множеств $[v_1, v_2]$, $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Через C_n обозначим простой цикл длины n, а через K_n — полный граф с n вершинами. В [1] Грийнвуд и Глиссон доказали, что полный граф с 17 вершинами K_{17} является (3, 3, 3)-графом Рамсея. В этой работе мы докажем следующее обобщение этого факта;

Основная теорема. Для любых натуральных чисел p, q и r граф $F(p, q, r) = K_8 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}$ являетея критическим (3, 3, 3)-графом Рамсея.

Как уже отметили выше, для графа $F(1, 1, 1) = K_{17}$ этот факт был доказан в [1]. Другой частный случай основной теоремы (а именно $p=1$) доказан в [7] Для доказательства основной теоремы нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 1, [6]. Граф $C_5 + C_{2r+1}$, $r \geqq 1$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Лемма 2, [8]. Пусть $L(p, q, r) = K_2 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}$ и $V(L(p, q, r)) = V_1 \cup V_2$. Пусть еще $V(K_2) \cap V_1 \neq \varnothing$ и $V(K_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Тогда один из порожденных подграфов $\langle V_1 \rangle$, $\langle V_2 \rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Лемма 3. Пусть $T(v, q, r) = K_7 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + G_{2r+1}$ и $V(T(p, q, r) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$. Пусть еще $V(K_7) \cap V_1 \neq \varnothing$, $V(K_7) \cap V_2 \neq \varnothing$ и $V(K_7) \cap V_3 \neq \varnothing$. Тогда один из порожденных подграфов $\langle V_1 \rangle$, $\langle V_2 \rangle$, $\langle V_3 \rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Рассмотрим некоторую 3-раскраску ребер графа G. Через $A_i(v)$, $i=1$, 2, 3, $v \in V(G)$ обозначим множество всех вершин графа G, связанных с вершиной v ребром i-ого цвета. Для удобства сформулируем в виде леммы следующее очевидное предложение:

Лемма 4. Пусть дана некоторая 3-раскраска ребер графа G, такая, что для некоторой вершины $v \in V(G)$ один из подграфов $\langle A_i(v) \rangle$, $i=1$, 2, 3 является (3, 3)-графом Рамсея. Тогда в этой 3-раскраске граф G имеет монохроматический треугольник.

Определение 4. Через $R(p_1, \ldots, p_s)$ обозначим наименьшее натуральное число n, для которого полный граф с n вершинами K_n является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея.

Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_s)$ впервые было доказано Рамсеем в [2]. Эги числа называются числами Рамсея. Известны только следующие нетривиальные числа Рамсея [4]: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = R(5, 3) = 14$, $R(3, 6) = R(6, 3) = 18$, $R(3, 7) = R(7, 3) = 23$, $R(4, 4) = 18$, $R(3, 3, 3) = 17$. Через $\chi(G)$ обозначим хроматическое число графа G.

Лемма 5, [3]. Пусть G — граф и $\chi(G) < R(p_1, \ldots, p_s)$. Тогда граф G не является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея. В частности, если $\chi(G) < 17$, тогда G не является (3, 3, 3)-графом Рамсея.

2. **Доказательство леммы 3.** Положим $\alpha_i = |V_i \cap V(K_7)|$, $i=1$, 2, 3. Ясно, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7$, согласно условию леммы 3, $\alpha_1 \geqq 1$, $\alpha_2 \geqq 1$, $\alpha_3 \geqq 1$. Без ограничения общности можно предположить, что $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3$. Представляются три возможности: $\alpha_3 = 5$, $\alpha_3 = 4$ и $\alpha_3 = 3$. Рассмотрим эти возможности.

Случай 1. $\alpha_3 = 5$. В этом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Если $V_3 \cap V(C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}) \neq \varnothing$, из $\alpha_3 = 5$ следует $\mathrm{cl}(\langle V_3 \rangle) \geqq 6$. Согласно лемме 1, $\langle V_3 \rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея. Поэтому предположим, что $V_3 \cap V(C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}) = \varnothing$. Тогда $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = K_2 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}$. Из $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ следует $V_1 \cap V(K_2) \neq \varnothing$ и $V_2 \cap V(K_2) \neq \varnothing$. Согласно лемме 2 один из подграфов $\langle V_1 \rangle$, $\langle V_2 \rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Случай 2. $\alpha_3 = 4$. В этом случае $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. Если $V_3 \cap V(C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}) = \varnothing$ разсуждаем так же как в случае 1. Поэтому предположим, что $V_3 \cap V(C_{2r+1}) \neq \varnothing$. Если $V_3 \cap V(G_{2p+1} + C_{2q+1}) \neq \varnothing$ тогда $\mathrm{cl}(\langle V_3 \rangle) \geqq 6$ и следовательно $\langle V_3 \rangle$ является (3, 3)-грофом Рамсея. Поэтому предположим, что

$$(V_1 \cup V_2) \supset V(C_{2p+1} + C_{2q+1}). \tag{2}$$

Кроме того можно предположить

$$E(\langle V_1 \cup V_2 \rangle) \cap E(C_{2r+1}) \neq \varnothing \tag{3}$$

(иначе $E(\langle V_3\rangle)\cap E(C_{2r+1})\neq\varnothing$ и следовательно $\mathrm{cl}(\langle V_3\rangle)\geq 6$). Из $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, (2) и (3) следует, что граф $\langle V_1\cup V_2\rangle$ содержит в качестве подграфа $K_2+C_3+C_{2p+1}+C_{2g+1}$ и $V(K_2)\cap V_1\neq\varnothing$, $V(K_2)\cap V_2\neq\varnothing$. Согласно лемме 2, один из подграфов $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Случай 3. $\alpha_3=3$. В этом случае $\alpha_1+\alpha_2=4$. Если одновременно $V_3\cap V(C_{2p+1})\neq\varnothing$, $V_3\cap V(C_{2q+1})\neq\varnothing$, $V_3\cap V(C_{2r+1})\neq\varnothing$, тогда $\mathrm{cl}(\langle V_3\rangle)\geq 6$ и следовательно $\langle V_3\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея. Теперь предположим, что

$$(V_1\cup V_2)\supset V(C_{2p+1}). \tag{4}$$

Рассмотрим два подслучая:

3. а. Одно из множеств $V_3\cap V(C_{2q+1})$ и $V_3\cup V(C_{2r+1})$ тоже пусто. Пусть например $V_3\cap V(C_{2q+1})=\varnothing$. Тогда

$$(V_1\cup V_2)\supset V(C_{2q+1}), \tag{5}$$

Если $V_3\supset V(C_{2r+1})$, тогда подграф $\langle V_3\rangle$ содержит C_3+C_{2r+1} и согласно лемме 1, он является (3, 3)-графом Рамсея. Поэтому предположим

$$(V_1\cup V_2)\cap V(C_{2r+1})\neq\varnothing\cdot \tag{6}$$

Из $\alpha_1+\alpha_2=4$, (4), (5) и (6) следует, что $\langle V_1\cup V_2\rangle$ соцержит в качестве подграфа граф $K_2+C_3+C_{2p+1}+C_{2q+1}$. Из $\alpha_1\geq 1$ и $\alpha_2\geq 1$ следует, что K_2 можно выбрать так, чтобы $V(K_2)\cap V_1\neq\varnothing$ и $V(K_2)\cap V_2\neq\varnothing$. Согласно лемме 2 один из подграфов $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

3.б. $V_3\cap V(C_{2q+1})\neq\varnothing$ и $V_3\cap V(C_{2r+1})\neq\varnothing$. Если одно из множеств $E(\langle V_3\rangle)\cap E(C_{2q+1})$, $E(\langle V_3\rangle)\cap E(C_{2r+1})$ непусто, тогда $\mathrm{cl}(\langle V_3\rangle)\geq 6$ и следовательно $\langle V_3\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея. Поэтому предположим, что

$$E(\langle V_1\cup V_2\rangle)\cap E(C_{2q+1})\neq\varnothing \quad\text{и}\quad E(\langle V_1\cup V_2\rangle)\cap E(C_{2r+1})\neq\varnothing. \tag{7}$$

Из (4), (7) и $\alpha_1+\alpha_2=4$ следует, что $\langle V_1\cup V_2\rangle$ содержит $K_2+C_3+C_3+C_{2p+1}$. Из $\alpha_1\geq 1$ и $\alpha_2\geq 1$ следует, что K_2 можно выбрать так, чтобы $V_1\cap V(K_2)\neq\varnothing$ и $V_2\cap V(K_2)\neq$. Согласно лемме 2, один из подграфов $\langle V_1\rangle$, $\langle V_2\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Лемма 3 доказана.

3. Доказательство основной теоремы. 1. Граф $F(p, q, r)$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея. Рассмотрим произвольную 3-раскраску ребер этого графа. Пусть $v\in V(K_8)$. Положим $\beta_1(v)=|A_1(v)\cap V(K_8)|$, $\beta_2(v)=|A_2(v)\cap V(K_8)|$, $\beta_3(v)=|A_3(v)\cap V(K_8)|$. Если для некоторой вершины $v'\in V(K_8)$ имеем

$$\beta_1(v')\geq 1,\quad \beta_2(v')\geq 1\quad\text{и}\quad \beta_3(v')\geq 1, \tag{8}$$

тогда $\langle A_1(v')\cup A_2(v')\cup A_3(v')\rangle=K_7+C_{2p+1}+C_{2q+1}+C_{2r+1}$ и $V(K_7)\cap A_1(v')\neq\varnothing$ $V(K_7)\cap A_2(v')\neq\varnothing$, $A_3(v')\cap V(K_7)\neq\varnothing$. Согласно лемме 3, один из подграфов $\langle A_1(v')\rangle$, $\langle A_2(v')\rangle$, $\langle A_3(v')\rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея. Согласно лемме 4, в этой 3-раскраске есть монохроматический треугольник. Если для любой вершины $v\in V(K_8)$ некоторое из неравенств (8) неверно, тогда нетрудно убедится в том, что K_8 будет содержать монохроматический треугольник. Итак, мы доказали, что в любой 3-раскраске ребер графа $F(p, q, r)$ есть монохроматический треугольник, т. е. граф $F(v, q, r)$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея.

2. Граф $F(p, q, r)$ является критическим (3, 3, 3)-графом Рамсея. Очевидно любой собственный подграф графа $F(p, q, r)$ имеет хроматическое число меньше 17. Согласно лемме 5, собственные подграфы графа $F(p, q, r)$ не являются (3, 3, 3)-графами Рамсея.

Основная теорема доказана.

Следствие 1. Для любого нечетного числа $n \geqq 17$ существует критический (3, 3, 3)-граф Рамсея с n вершинами.

Следствие 2. Для любого нечетного числа $n \geqq 19$ существует критический (3, 3, 3)-граф Рамсея с n вершинами и кликовым числом 16.

Следствие 3. Для любого нечетного числа $n \geqq 21$ существует критический (3, 3, 3)-граф Рамсея с n вершинами и кликовым числом 15.

Следствие 4. Для любого нечетного числа $n \geqq 23$ существует критический (3, 3, 3)-граф Рамсея с n вершинами и кликовым числом 14.

4. Константы связанные с графами Рамсея. Определение 5. Через $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ обозначается наименьшее натуральное число n, для которого существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G с n вершинами и $\mathrm{cl}(G) < q$.

Понятно, что если $q \leqq max(p_1, \ldots, p_s)$, то число $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ не имеет смысла. Выше мы отметили, что в [5] доказано $N(p_1, \ldots, p_s; q) < \infty$, если $q > max(p_1, \ldots, p_s)$. Пусть $p_i \geqq 3$, $2 \leqq i \leqq s$. Тогда

(9) $$N(p_1, \ldots, p_s; R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 2, \text{ [3]},$$

(10) $$N(p_1, \ldots, p_s; R(p_1, \ldots, p_s) - 1) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 4, \text{ [3]},$$

(11) $$N(p_1, \ldots, p_s; R(p_1, \ldots, p_s) - 2) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 6, \text{ [8]}.$$

В [3] Лин показал, что неравенство (9) точное и высказал предположению, что неравенство (10) всегда строгое. Это предположение было опровергнуто в [7]. Заметим, что из следствий 2, 3 и 4 вытекает, что для (3, 3, 3)-графов Рамсея неравенства (9), (10) и (12) точные и верно

Следствие 5. $N(3, 3, 3; 17) = 19$, [3]; $N(3, 3, 3; 16) = 21$, [7]; $N(3, 3, 3; 15) = 23$, [8].

Согласно известной теореме Кенига, если $\chi(G) \geqq 3$, тогда граф G содержит простой цикл нечетной длины. Из основной теоремы и теоремы Кенига получаем

Следствие 6. Пусть A, B и C — графы и $\chi(A) \geqq 3$, $\chi(B) \geqq 3$, $\chi(C) \geqq 3$. Тогда граф $K_8 + A + B + C$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея.

Замечание. Автору удалось доказать более общее утверждение, а именно, что граф $K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея. Доказательство этого факта гораздо длиннее и мы его опубликуем дополнительно.

Факультет математики и механики
Софийского университета
София, Болгария

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Greenwood, A. Gleason. Canad. J. Math. **7**, 1955, I. [2] P. Ramsey. Proc. London Math. Soc. 1930, 264. [3] S. Lin. J. Combin. Theory, Ser B, **12**, 1972, 82. [4] J. Graver, J. Jankel. Ibid. **3**, 1968, I. [5] J. Nešetřil, V. Rödl. Ibid. Ser. B, **20**. 1976, 243. [6] H. Ненов, Н. Хаджииванов. Сердика **5**, 1979, **303**. [7] Id. Докл. БАН **33**, 1980, 1171. [8] Id. Сердика (в печати). [9] А. Зыков. Мат. сборник **24**, 1949, 163.