[63]

Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 34, N° 3, 1981

МАТЕМАТИКА
Топология

УСИЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ЛИНА, ОТНОСЯЩИХСЯ К ТЕОРИЮ РАМСЕЯ

Н. Д. Ненов

(Представлено членом-корреспондентом Я. Тагамлицким 9. 11. 1980)

I. Введение и формулировка результатов. Будем рассматривать только конечные, неориентированные графы, без кратных ребер и петель. Множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G называется p-кликой, если любые две из них смежны. Максимальное натуральное число p, для которого граф G обладает p-кликой называется кликовым числом графа G и обозначается $\mathrm{cl}(G)$. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Любое разложение

$$E(G)=E_1\cup\cdots\cup E_r,\quad E_i\cap E_j=\emptyset,\quad i\neq j,$$

называется r-раскраской ребер графа G. Иногда, для удобства, будем говорить, что ребра из E_i окрашены в i-ом цвете.

Определение 1. Если в некоторой r-раскраске $E_1\cup\cdots\cup E_r$ ребер графа G, все ребра некоторой p-клики принадлежат E_i (т. е. окрашены в i-ом цвете), будем говорить, что эта p-клика является монохроматической p-кликой i-ого цвета.

Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — натуральные числа, $p_i\geqq 2$, $1\leqq i\leqq r$.

Определение 2. Будем говорить, что граф G является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея, если для любой r-раскраски его ребер, существует i, $1\leqq i\leqq r$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-ого цвета.

Определение 3. Через $R(p_1, \ldots, p_r)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: полный граф с n вершинами является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея.

Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_r)$ впервые было доказано Рамсеем [1], и они называются числами Рамсея. Очевидно $R(p)=p$, $R(p_1, \ldots, p_r, 2)=R(p_1, \ldots, p_r)$. Имея ввиду эти свойства, в дальнейшем будем рассматривать только такие числа Рамсея $R(p_1, \ldots, p_r)$, для которых $r\geqq 2$ и $p_i\geqq 3$, $1\leqq i\leqq r$. Известны только следующие нетривиальные числа Рамсея [3]: $R(3,3)=6$, $R(3,4)=R(4,3)=9$, $R(3,5)=R(5,3)=14$, $R(3,6)=R(6,3)=18$, $R(3,7)=R(7,3)=23$, $R(4,4)=18$, $R(3,3,3)=17$.

Определение 4. Через $N((p_1, \ldots, p_r);\, q)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует $(p_1 \ldots, p_r)$-граф Рамсея G, который имеет n вершин и кликовое число $\mathrm{cl}(G)<q$.

Очевидно, если $q\leqq\max\{p_1, \ldots, p_r\}$, число $N((p_1, \ldots, p_r);\, q)$ не определено. Из определения чисел Рамсея следует, что если $q>R(p_1, \ldots, p_r)$, то

$N((p_1, \ldots, p_r); q) = R(p_1 \ldots, p_r)$. Ж. Фолкман [2], доказал, что если $q > \max (p_1, \ldots, p_r)$, то $N((p_1, \ldots, p_r); q) < \infty$.

В [4] Лин доказал следующие неравенства:

$$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 2 \tag{1}$$

$$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r) - 1) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 4. \tag{2}$$

Как показал Лин [4], неравенство (1) точное. Тоже в [4] он высказал предположение, что неравенство (2) неточное. Это предположение было опровергнуто в [11], где доказано, что $N((3, 3, 3); 16) = 21$.

Пусть даны натуральные числа $p_1, \ldots, p_r$, $r \geqq 2$, $p_i \geqq 3$, $1 \leqq i \leqq 3$. Ниже будем рассматривать r-раскраски ребер графа со следующим свойством:

(3) для некоторого i_0, $1 \leqq i_0 \leqq r$, существует единственная монохроматическая p_{i_0}-клика i_0-ого цвета и не существует монохроматическая p_i-клика i-ого цвета, $i \neq i_0$.

Цель настоящей работы показать, что при некоторых дополнительных предположениях неравенства (1) и (2) можно усилить. Точнее, мы докажем следующее утверждение:

Основная теорема. Пусть полный граф с $R(p_1, \ldots, p_r)$ вершинами обладает r-раскраской со свойством (3). Тогда

$$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 3. \tag{4}$$

Если еще дополнительно потребовать чтобы $p_{i_0} \geqq 4$, тогда

$$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 4 \tag{5}$$

$$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r) - 1) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 5. \tag{6}$$

Пусть G_1 и G_2 два графа без общих вершин, т. е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Следуя Зыкову [12], через $G_1 + G_2$ обозначим граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где E' состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$ $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Любое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \; i \neq j,$$

где любое из множеств V_i, $1 \leqq i \leqq r$, не содержит смежных вершин, называется r-хроматическим разложением графа G. Наименьшее натуральное число r, для которого граф G обладает r-хроматическим разложением, называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$. Очевидно $\mathrm{cl}(G) \leqq \chi(G)$. Пусть p и r — натуральные числа и $2 \leqq p \leqq r$. Через $H(p, r)$ обозначим множество всех графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ и $\chi(G) \geqq r$. Положим

$$Z(p, r) = \min\{|V(G)|, \; G \in H(p, r)\}, \; 2 \leqq p \leqq r.$$

Существование чисел $Z(p, r)$ было впервые доказано Зыковым [12].

Через K_n обозначим полный граф с n вершинами, а через C_n — простой цикл длины n. В доказательстве основной теоремы будем пользоваться следующими теоремами:

Теорема 1, [5,6]. $Z(r, r+1) = r+3$, $r \geqq 2$. Равенство достигается единствено для графа $K_{r-2} + C_5$, $(K_0 = \emptyset)$.

Теорема 2, [5, 6]. Пусть $G \in H(r, r+1)$ и $|V(G)| = r+4$, $r \geqq 4$. Тогда верно одно из следующих двух утверждений:

а) существует вершина $v \in V(G)$ после удаления которой получается подграф, изоморфный графу $K_{r-2} + C_5$.

б) $G = K_{r-3} + G_1$, где $\chi(\ \ _1) = 4$ и $\mathrm{cl}(G_1) < 4$.

Для доказательства основной теоремы нам будут нужны тоже следующие леммы:

Лемма 1, [4]. Если $\chi(G) < R(p_1, \ldots, p_r)$, тогда граф G не является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея.

Лемма 2. Пусть полный граф с s вершинами K_s обладает r-раскраской ребер со свойством (3). Если граф G обладает s-хроматическим разложением

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_s \tag{7}$$

таким, что для некоторого $t \leq p_{i_0}$ $V_1 \cup \cdots \cup V_t$ не содержит t-клик, то тогда граф G не является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея.

II. Доказательство леммы 2. Рассмотрим произвольную r-раскраску ребер графа K_s со свойством (3). Пусть $V(K_s) = \{z_1, \ldots, z_s\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $\{z_1, \ldots, z_{p_{i_0}}\}$ является единственной монохроматической p_{i_0}-кликой i_0-цвета рассматриваемой r-раскраски ребер K_s. Рассмотрим отображение $\varphi : V(G) \to V(K_s)$, определенное следующим образом: если $v \in V_i$ (см. (7)), тогда $(v)\varphi = z_i$. При помощи отображения φ и рассматриваемой r-раскраски ребер графа K_s строим r-раскраску ребер графа G следующим образом: ребро $[v_i, v_j]$ графа G имеет такой же цвет как и ребро $[(v_i)\varphi, (v_j)\varphi]$ графа K_s. Покажем, что полученная r-раскраска ребер графа G не содержит монохроматических p_i-клик i-ого цвета, $1 \leq i \leq r$. Допустим противное, т. е., что граф G содержит монохромотическую p_i-клику Q i-ого цвета. Тогда $(Q)\varphi$ является монохроматической p_i-кликой i-ого цвета графа K_s. Согласно свойству (3), $(Q)\varphi = \{z_1, \ldots, z_{p_{i_0}}\}$. Из определения отображения φ следует, что $Q \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_{p_{i_0}}$. Это является противоречием, так как из того, что $V_1 \cup \cdots \cup V_t$, $t \leq p_{i_0}$, не содержит t-клик следует, что $V_1 \cup \cdots \cup V_{p_{i_0}}$ не содержит p_{i_0}-клик.

Лемма 2 доказана.

III. Доказательство основной теоремы. Ниже всюду вместо $R(p_1, \ldots, p_r)$ будем писать R. Сначало докажем неравенство (4). Допустим противное, т. е., что существует $(p_1, \ldots, p_r)$-граф Рамсея G с $|V(G)| \leq R+2$ вершинами и $\mathrm{cl}(G) < R$. Согласно лемме 1 $\chi(G) \geq R$. Следовательно $G \in H(R-1, R)$. Согласно теореме 1 $G = K_{R-3} + C_5$. Очевидно $\chi(C_5) = 3$ и $\mathrm{cl}(C_5) = 2$. Пусть $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ является 3-хроматическим разложением графа C_5, а $z_4, \ldots, z_R$ — вершины графа K_{R-3}. Тогда

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{z_4\} \cup \cdots \cup \{z_R\} \tag{8}$$

является R-хроматическим разложением G и $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ не содержит 3-клик. Согласно лемме 2 граф G не является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея. Полученное противоречие завершает доказательство неравенства (4).

Теперь докажем неравенство (5) (предполагается, что $p_{i_0} \geq 4$). Допустим противное, т. е. что существует $(p_1, \ldots, p_r)$-граф Рамсея с $|V(G)| \leq R+3$ и $\mathrm{cl}(G) < R$. Добавлением изолированных вершин можно добиться того чтобы $|V(G)| = R+3$. Как уже отметили из леммы 1 следует, что $G \in H(R-1, R)$. Согласно теореме 2 возможны следующие два случая:

Случай 1. $G = K_{R-4} + G_1$, где $\mathrm{cl}(G_1) < 4$ и $\chi(G_1) = 4$. Пусть $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ является 4-хроматическим разложением графа G_1 и $V(K_{R-4}) = \{z_1, \ldots, z_{R-4}\}$. Тогда

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup \{z_1\} \cup \cdots \cup \{z_{R-4}\}$$

является R-хроматическим разложением графа G и $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ не содержит 4-клик. Согласно лемме 2 G не является $(p_1, \ldots, p_r)$ графом Рамсея, что является противоречием. В случае 1 неравенство (5) доказано.

Случай 2. После удаления некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ получается подграф, который изоморфен графу $K_{R-3}+C_5$. Из неравенства $\mathrm{cl}(G) < R$ следует, что вершина v_0 несмежна некоторой вершине подграфа $K_{R-3}+C_5$. Пусть v_0 несмежна некоторой вершине подграфа K_{R-3}. Группируя вершину v_0 с этой несмежной ей вершиной, из R-хроматического разложения (8) графа $K_{R-3}+C_5$ получим R-хроматическое разложение графа G. Согласно лемме 2 граф G не является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея, что является противоречием. Если вершина v_0 смежна всем вершинам подграфа K_{R-3}, тогда попадаем в условия случая 1.

Осталось доказать неравенство (6). Оно следует из (5) и

$$N((p_1, \ldots, p_r);\ q) \leq N((p_1, \ldots, p_r);\ q-1)-1,$$

где $p_i \geq 3$, $\max\{p_1, \ldots, p_r\} < q-1 \leq R(p_1, \ldots, p_r)$, [5, 10].

Основная теорема доказана полностью.

VI. Некоторые следствия из основной теоремы для (3,4)-графов Рамсея. В [7, 8] доказано, что существуют 15 120 2-раскрасок ребер графа K_9, которые не содержат треугольники 1-ого цвета и содержат ровно одну 4-клику 2-ого цвета. В этих же работах доказано, что все эти 2-раскраски ребер графа K_9 изоморфны между собой. Согласно (5) и (6) $N((3, 4);\ 9) \geq 13$ и $N((3, 4);\ 8) \geq 14$, [5,10]. Отметим, что в [9] доказано, что граф $K_4+C_5+C_5$ является (3,4)-графом Рамсея. Следовательно $13 \leq N((3, 4);\ 9) \leq 14$.

Факультет математики и механики
Софийского университета
София, Болгария

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Ramsey. Proc. London Math. Soc. **30**, 1930, 264. [2] J. Folkman. SIAM Appl. Math. **18**, 1970, 19. [3] J. Graver, J. Yackel. J. Combin. Theory **3**, 1968, 1. [4] S. Lin. J. Combin. Theory. Ser. B, **12**, 1972, 82. [5] Н. Ненов. Дисертация, Соф. у-т, С., 1980. [6] Id. Годишник Соф. у-та **74**, 1980. [7] Н. Хаджииванов, Н. Ненов. Докл. БАН **31**, 1973, 631. [8] Н. Ненов, Н. Хаджииванов. Годишник Соф. у-т **71**, (в печати). [9] Н. Ненов. Ibid. **73** (в печати). [10] Id. Сердика (в печати). [11] Id. Докл. БАН. **33**, 1980, 1171. [12] А. Зыков. Мат сборник **24**, 1949, 163.