[63]

Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 34, N° 3, 1981

МАТЕМАТИКА
Топология

УСИЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ЛИНА, ОТНОСЯЩИХСЯ К ТЕОРИЮ РАМСЕЯ

Н. Д. Ненов

(Представлено членом-корреспондентом Я. Тагамлицким 9. 11. 1980)

I. Введение и формулировка результатов. Будем рассматривать только конечные, неориентированные графы, без кратных ребер и петель. Множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G называется p-кликой, если любые две из них смежны. Максимальное натуральное число p, для которого граф G обладает p-кликой называется кликовым числом графа G и обозначается $\mathrm{cl}(G)$. Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим соответственно множество вершин и множество ребер графа G. Любое разложение

$$E(G)=E_1\cup\cdots\cup E_r,\quad E_i\cap E_j=\varnothing,\quad i\neq j,$$

называется r-раскраской ребер графа G. Иногда, для удобства, будем говорить, что ребра из E_i окрашены в i-ом цвете.

Определение 1. Если в некоторой r-раскраске $E_1\cup\cdots\cup E_r$ ребер графа G, все ребра некоторой p-клики принадлежат E_i (т. е. окрашены в i-ом цвете), будем говорить, что эта p-клика является монохроматической p-кликой i-ого цвета.

Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — натуральные числа, $p_i \geqq 2$, $1 \leqq i \leqq r$.

Определение 2. Будем говорить, что граф G является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея, если для любой r-раскраски его ребер, существует i, $1\leqq i\leqq r$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-ого цвета.

Определение 3. Через $R(p_1, \ldots, p_r)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: полный граф с n вершинами является $(p_1, \ldots, p_r)$-графом Рамсея.

Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_r)$ впервые было доказано Рамсеем [1], и они называются числами Рамсея. Очевидно $R(p)=p$, $R(p_1, \ldots, p_r, 2)=R(p_1, \ldots, p_r)$. Имея ввиду эти свойства, в дальнейшем будем рассматривать только такие числа Рамсея $R(p_1, \ldots, p_r)$, для которых $r\geqq 2$ и $p_i\geqq 3$, $1\leqq i\leqq r$. Известны только следующие нетривиальные числа Рамсея [3]: $R(3,3)=6$, $R(3,4)=R(4,3)=9$, $R(3,5)=R(5,3)=14$, $R(3,6)=R(6,3)=18$, $R(3,7)=R(7,3)=23$, $R(4,4)=18$, $R(3,3,3)=17$.

Определение 4. Через $N((p_1, \ldots, p_r); q)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует $(p_1 \ldots, p_r)$-граф Рамсея G, который имеет n вершин и кликовое число $\mathrm{cl}(G)<q$.

Очевидно, если $q\leqq\max\{p_1, \ldots, p_r\}$, число $N((p_1, \ldots, p_r); q)$ не определено. Из определения чисел Рамсея следует, что если $q>R(p_1, \ldots, p_r)$, то

$N((p_1, \ldots, p_r); q) = R(p_1 \ldots, p_r)$. Ж. Фолкман [2], доказал, что если $q > \max (p_1, \ldots, p_r)$, то $N((p_1, \ldots, p_r); q) < \infty$.

В [4] Лин доказал следующие неравенства:

(1) $$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 2$$

(2) $$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r) - 1) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 4.$$

Как показал Лин [4], неравенство (1) точное. Тоже в [4] он высказал предположение, что неравенство (2) неточное. Это предположение было опровергнуто в [11], где доказано, что $N((3, 3, 3); 16) = 21$.

Пусть даны натуральные числа $p_1, \ldots, p_r$, $r \geqq 2$, $p_i \geqq 3$, $1 \leqq i \leqq 3$. Ниже будем рассматривать r-раскраски ребер графа со следующим свойством:

(3) для некоторого i_0, $1 \leqq i_0 \leqq r$, существует единственная монохроматическая p_{i_0}-клика i_0-ого цвета и не существует монохроматическая p_i-клика i-ого цвета, $i \neq i_0$.

Цель настоящей работы показать, что при некоторых дополнительных предположениях неравенства (1) и (2) можно усилить. Точнее, мы докажем следующее утверждение:

Основная теорема. Пусть полный граф с $R(p_1, \ldots, p_r)$ вершинами обладает r-раскраской со свойством (3). Тогда

4) $$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 3.$$

Если еще дополнительно потребовать чтобы $p_{i_0} \geqq 4$, тогда

(5) $$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r)) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 4$$

(6) $$N((p_1, \ldots, p_r); \quad R(p_1, \ldots, p_r) - 1) \geqq R(p_1, \ldots, p_r) + 5.$$

Пусть G_1 и G_2 два графа без общих вершин, т. е. $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Следуя Зыкову [12], через $G_1 + G_2$ обозначим граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$, $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где E' состоит из всех ребер $[v_1, v_2]$ $v_1 \in V(G_1)$, $v_2 \in V(G_2)$.

Любое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \ i \neq j,$$

где любое из множеств V_i, $1 \leqq i \leqq r$, не содержит смежных вершин, называется r-хроматическим разложением графа G. Наименьшее натуральное число r, для которого граф G обладает r-хроматическим разложением, называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$. Очевидно $\mathrm{cl}(G) \leqq \chi(G)$. Пусть p и r — натуральные числа и $2 \leqq p \leqq r$. Через $H(p, r)$ обозначим множество всех графов G, для которых $\mathrm{cl}(G) \leqq p$ и $\chi(G) \geqq r$. Положим

$$Z(p, r) = \min\{|V(G)|, \ G \in H(p, r)\}, \ 2 \leqq p \leqq r.$$

Существование чисел $Z(p, r)$ было впервые доказано Зыковым [12].

Через K_n обозначим полный граф с n вершинами, а через C_n — простой цикл длины n. В доказательстве основной теоремы будем пользоваться следующими теоремами:

Теорема 1, [5,6]. $Z(r, r+1) = r+3$, $r \geqq 2$. Равенство достигается единствено для графа $K_{r-2} + C_5$, $(K_0 = \emptyset)$.

Теорема 2, [5, 6]. Пусть $G \in H(r, r+1)$ и $|V(G)| = r+4$, $r \geqq 4$. Тогда верно одно из следующих двух утверждений:

а) существует вершина $v \in V(G)$ после удаления которой получается подграф, изоморфный графу $K_{r-2} + C_5$.