Глава 13

Област на холоморфност. Холоморфна изпъкналост.

Определение 13.1. *Областта $D_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ е холоморфно разширение на областта $D_1 \subset \mathbb{C}^n$, ако $D_1 \subset D_2$ и всяка холоморфна функция $f : D_1 \to \mathbb{C}$ се продължава до холоморфна функция $f : D_2 \to \mathbb{C}$.*

Никоя област $D_1 \subset \mathbb{C}$ не се разширява холоморфно до област $D_2 \subseteq \mathbb{C}$, защото за всяка точка $a \in D_2 \setminus D_1$ съществува холоморфна функция

$$f_a : D_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f_a(z) = \frac{1}{z-a},$$

която не се продължава до холоморфна функция върху D_2.

Лема 13.2. *Ако областта $D_2 \subset \mathbb{C}^n$ е холоморфно разширение на областта $D_1 \subset \mathbb{C}^n$, то произволна холоморфна функция $f : D_1 \to \mathbb{C}$ приема в $D_2 \setminus D_1$ същите стойности, които приема в D_1.*

Доказателство: Да допуснем противното и да изберем холоморфна функция $f : D_1 \to \mathbb{C}$ със стойност $f(z_o) = w_o \notin f(D_1)$ в някакво точка $z_o \in D_2 \setminus D_1$. Тогава функцията

$$g : D_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_o}$$

е холоморфна в D_1, но няма аналитично продължение в D_2, защото $g(z_o) = \infty$. Това противоречи на предположението, че D_2 е холоморфно продължение на D_1, Q.E.D.
Възможността за холоморфно разширение на области с комплексна размерност $n \geq 2$ може да се обясни с Теорема 17 за холоморфно продължение върху аналитично подпространство с коразмерност поне 2. Например, пунктираното кълбо $B(0^2, 1) \setminus \{0^2\}$ в $\mathbb{C}^2$ има холоморфно разширение $B(0^2, 1)$, защото всяка холоморфна функция $f : B(0^2, 1) \setminus \{0^2\} \to \mathbb{C}$ се продължава в началото 0^2.

Следствие 13.3. *Всяко холоморфно разширение $D_2 \subset \mathbb{C}^n$ на ограничена област $D_1 \subset \mathbb{C}^n$ е също ограничена област.*

Доказателство: Съгласно Лема 13.2, координатните функции $f_j(z) = z_j$, $1 \leq j \leq n$ приемат в D_2 същите стойности, както и в D_1. Затова

$$\sup_{z \in D_2} |z_j| = \sup_{z \in D_1} |z_j| \quad \text{за } \forall 1 \leq j \leq n.$$

Но $\sup_{z \in D_1} |z_j| < \infty$ приемат крайни стойности благодарение на ограничеността на D_1, така че $\sup_{z \in D_2} |z_j| < \infty$ и $D_2 \subset \mathbb{C}^n$ е също ограничена област, Q.E.D.

Определение 13.4. *Казваме, че* $D \subset \mathbb{C}^n$ *е област на холоморфност на функцията* f*, ако* $f : D \to \mathbb{C}$ *е холоморфна функция и за всяка точка* $a \in D$ *на разстояние* r *до границата* ∂D*, функцията* $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ *не се продължава в* $B(a, r_1)$ *за нито едно* $r_1 > r$.

Определение 13.5. *Областта* $D \subset \mathbb{C}^n$ *е област на холоморфност, ако* D *е област на холоморфност на някаква холоморфна функция* $f : D \to \mathbb{C}$.

Определение 13.6. *В граничната точка* $\zeta \in \partial D$ *на област* $D \subset \mathbb{C}^n$ *съществува бариер, ако за всеки компакт* $K \subset D$ *и всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува холоморфна функция* $g : D \to \mathbb{C}$*, така че*

$$||g||_K = \sup_{z \in K} |g(z)| \leq 1,$$

но $|g(z)| > 1$ *за някаква точка* $z \in B(\zeta, \varepsilon) \cap D$.

Ще казваме, че холоморфната функция $f : D \to \mathbb{C}$ е неограничена в граничната точка $\zeta \in \partial D$, ако съществува редица то точки $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$, така че $\lim\limits_{m\to\infty} z^{(m)} = \zeta$ и $\lim\limits_{m\to\infty} |f(z^{(m)}| = \infty$.

Теорема 18. *(i) Ако холоморфната функция* $f : D \to \mathbb{C}$ *е неограничена в граничната точка* $\zeta \in \partial D$*, то в* ζ *съществува бариер.*
(ii) Ако $E \subset \partial D$ *е множество от точки, в които съществува бариер, то съществува холоморфна функция* $f : D \to \mathbb{C}$*, която е неограничена във всички точки от* E.

Доказателство: (i) За произволен компакт $K \subset D$, в който $||f||_K = 0$ и за произволно $\varepsilon > 0$, холоморфната функция $g_{K,\varepsilon} = f : D \to \mathbb{C}$ гарантира съществуването на бариер в $\zeta \in \partial D$, съгласно неограничеността на f в $\zeta \in \partial D$. Ако $||f||_K > 0$, то $g_{K,\varepsilon} = \frac{f}{||f||_K} : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция с $||g_{K,\varepsilon}||_K = 1$ и $|g_{K,\varepsilon}(z)| > 1$ за точка $z \in B(\zeta, \varepsilon) \cap D$, която е достатъчно близо до $\zeta \in \partial D$.
(ii) Полето $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ на Гаусовите числа е изброимо и навсякъде гъсто подмножество на полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. Следователмно множеството $\mathbb{Q}(i)^n$ на наредените n-торки Гаусови числа е изброимо и навсякъде гъсто в $\mathbb{C}^n$. В частност, произволно $E \subseteq \partial D$ съдържа изброимо $E_o \subseteq E$, което е навсякъде гъсто в E. Ако една холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ е неограничена върху E_o, то f е неограничена върху E. По-точно, ако точките $p_k \in E_o$ клонят към точка $p \in \overline{E}$, а $\{p_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$ са редици с $\lim\limits_{m\to\infty} p_k^{(m)} = p_k$ и $\lim\limits_{m\to\infty} |f(p_k^{(m)})| = \infty$ за $\forall k \in \mathbb{N}$, то всяко кълбо $B(p, \varepsilon)$ с център $p \in E$ съдържа безбройно много точки $p_k^{(m)}$. По този начин, p е точка на сгъстяване на $\{p_k^{(m)}\}_{k,m \in \mathbb{N}}$ и f е неограничена в E. Оттук нататък ще предполагаме, че подмножеството $E \subset \partial D$ е най-много изброимо или се съдържа в редица $\{e^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \partial D$. Означаваме с $\{\zeta^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ редицата $e^{(1)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots, e^{(m-1)}, e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}, e^{(1)}, \ldots$, в която всеки член на $\{e^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ се среща безброй много пъти. Твърдим, че ако $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция, за която съществува редица от точки $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$ с $\lim\limits_{m\to\infty} ||z^{(m)} - \zeta^{(m)}|| = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} |f(z^{(m)})| = \infty$, то f е неограничена във всяка точка $\zeta^{(m)}$. Наистина, за произволно $k \in \mathbb{N}$, индексите $m_j(k) \in \mathbb{N}$, за които $\zeta^{(m_j(k))} = e^{(k)}$ образуват безкрайна редица. Съответната редица $\{z^{(m_j(k))}\}_{j=1}^{\infty} \subset D$ клони към $e^{(k)} \in E \subset \partial D$, а нейните стойности $\{f(z^{(m_j(k))})\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ клонят по модул към ∞.
За конструкцията на холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ и редица от точки $\{z^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset D$ с $\lim\limits_{m\to\infty} ||z^{(m)} - \zeta^{(m)}|| = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} |f(z^{(m)})| = \infty$, пристъпваме към индуктивно построение на:

(а) растяща редица от компактни подмножества

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m \subset K_{m+1} \subset \ldots \subset D$$

с отворени ядра K_m^o, изчерпващи $\cup_{m=1}^{\infty} K_m^o = D$;
(б) точки $z^{(m)} \in D$, за които $||z^{(m)} - \zeta^{(m)}|| < \frac{1}{m}$ и
(в) холоморфни функции $f_m : D \to \mathbb{C}$, изпълняващи условията

$$||f_m||_{K_m} \leq 1 \quad \text{и } |f_m(z^{(m)})| > 1.$$

На първата стъпка избираме произволен компакт $K_1 \subset D$. Съществуването на бариер в точката $\zeta^{(1)} \in E$ гарантира наличието на холоморфна функция $f_1 : D \to \mathbb{C}$ и точка $z^{(1)} \in D$, така че $||z^{(1)} - \zeta^{(1)}|| < 1$ и $|f_1(z^{(1)})| > 1 \geq ||f_1||_{K_1}$. Да предположим, че сме осъществили описаните построения за всички $k \leq m-1$. Ако

$$\rho(z, \partial D) = \inf_{\delta \in \partial D} ||z - \delta||,$$

$$K_m' = \left\{ z \in D \,\middle|\, \rho(z, \partial D) \geq \frac{1}{m}, \, ||z|| \leq m \right\},$$

то полагаме

$$K_m = K_{m-1} \cup K_m' \cup \{z^{(1)}, \ldots, z^{(m-1)}\}.$$

По определението за бариер в точка $\zeta^{(m)} \in E \subset \partial D$, съществува холоморфна функция $f_m : D \to \mathbb{C}$ и точка $z^{(m)} \in D$, така че $||z^{(m)} - \zeta^{(m)}|| < \frac{1}{m}$, $||f_m||_{K_m} \leq 1$ и $|f_m(z^{(m)})| > 1$. Това доказва съществуването на обектите, описани в (а), (б) и (в).
Възоснова на $|f_m(z^{(m)})| > 1$ съществува редица от естествени числа $p_1 = 1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$, така че

$$\frac{1}{m^2} |f_m(z^{(m)})|^{p_m} \geq \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} |f_j(z^{(m)})|^{p_j} + m \quad \text{за} \quad m \geq 2.$$

Да разгледаме реда

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} f_m(z)^{p_m}. \tag{13.1}$$

За $\forall z \in K_m$ и $\forall l \geq m$ е в сила $|f_l(z)| \leq 1$. Следователно редът (13.1) е равномерно сходящ върху K_m. Поради $D = \cup_{m=1}^{\infty} K_m^o$, редът (13.1) е сходящ в цялата област D и неговата сума $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна в D функция, съгласно Теоремата на Вайерщрас за равномерната сходимост. Накрая, за произволни $m \in \mathbb{N}$ е в сила

$$|f(z^{(m)})| \geq \frac{1}{m^2} |f_m(z^{(m)})|^{p_m} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j^2} |f_j(z^{(m)})|^{p_j} - \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \geq m - \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}.$$

Оттук става ясно, че $\lim_{m \to \infty} |f(z^{(m)})| = \infty$, Q.E.D.

Следствие 13.7. *Ако E е навсякъде гъсто подмножество на границата ∂D на област D и във всички точки на E съществува бариер, то D е област на холоморфност.*

Доказателство: Съгласно Теорема 18(ii), ако D има бариер в $E \subseteq \partial D$, то съществува холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$, която е неограничена в E. От гъстотата на E в ∂D следва неограничеността на f върху цялата граница.
Допускането, че D не е област на холоморфност на f води до съществуването на точка $a \in D$ и реално положително число $r > \rho(a, \partial D) = \inf_{\zeta \in \partial D} ||\zeta - a||$, така че f има холоморфно продължение в $B(a, r)$. Ако $\rho(a, \partial D) = ||\zeta_a - a||$ за някое $\zeta_a \in \partial D$, то f се продължава холоморфно в $\zeta_a \in \partial D$, противно на

своята неограниченост в тази точка. Противоречието доказва, че D е област на холоморфност на f, Q.E.D.

Например, във всяка точка $\zeta \in \partial B(0^n, R)$ съществува бариер, защото функцията

$$f_\zeta : B(0^n, R) \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$f_\zeta(z) = \frac{1}{R^2 - (z, \zeta)}$$

е холоморфна в кълбото $B(0^n, R)$ и неограничена в точка ζ. Следователно кълбото $B(0^n, R)$ е област на холоморфност.

Твърдим, че всяка област $D \subset \mathbb{C}$ е област на холоморфност. За целта е достатъчно да отбележим, че за всяка точка $\zeta \in \partial D$ съществува холоморфна функция

$$f_\zeta : D \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$f_\zeta(z) = \frac{1}{z - \zeta}$$

която е неограничена в $\zeta \in \partial D$. Тогава съгласно Теорема 18(i) съществува бариер във $\forall \zeta \in \partial D$. Прилагаме Следствие 13.7 и получаваме, че D е област на холоморфност.

За да докажем, че всяка изпъкнала област $D \subset \mathbb{C}^n$ е област на холоморфност, да напомним, че подмножеството $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало, ако заедно с произволни две свои точки $x, y \in W$ съдържа изцяло отсечката

$$I(x, y) = \{tx + (1 - t)y \,|\, t \in [0, 1]\}$$

с краища x и y. Например, кълбото $B(0^n, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x||^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 < 1\}$ е изпъкнала област в $\mathbb{R}^n$, защото за произволни $x, y \in B(0^n, 1)$ и $t \in [0, 1]$ е в сила

$$||tx+(1-t)y||^2 = t^2||x||^2+2t(1-t)(x, y)+(1-t)^2||y||^2 < t^2+2t(1-t)+(1-t)^2 = 1,$$

съгласно неравенството на Коши-Буняковски $(x, y) \leq ||x||||y||$ в евклидовото пространство $\mathbb{R}^n$.

Ако $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество, то за всяко естествено $k \in \mathbb{N}$, за произволни точки $p_1, \ldots, p_k \in W$ и произволни реални неотрицателни числа $t_1, \ldots, t_k$ със сума $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$ е в сила $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i p_i \in W$. С индукция по $k \geq 2$, за $t_k < 1$ за предположим, че $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{1-t_k} p_i \in W$. Тогава $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i p_i = (1 - t_k) \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{t_i}{1-t_k} p_i \right) + t_k p_k \in W$.

В случая $t_k = 1$ имаме $t_1 = \ldots = t_{k-1} = 0$, така че $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i p_i = p_k \in W$.

За произволни $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ с $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ множеството

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0 = 0 \right\}$$

се нарича хиперравнина в $\mathbb{R}^n$. Точките $y \in \mathbb{R}^n$ с $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i y_i + a_0 \geq 0$ са над хиперравнината H, а точките $z \in \mathbb{R}^n$ с $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i z_i + a_0 \leq 0$ са под хиперравнината H.

Наредената n-торка $(a_n, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ се нарича нормален вектор на H.

Хиперравнината H разделя подмножествата S_1 и S_2 на $\mathbb{R}^n$, ако точно едното от S_1 или S_2 е над H, а другото е под H. Още повече, H разделя строго S_1 и S_2, ако H разделя тези подмножества на $\mathbb{R}^n$ без да ги пресича.

Теорема 19. *За произволно изпъкнало затворено подмножество $C \subset \mathbb{R}^n$ и произволна точка $b \in \mathbb{R}^n \setminus C$ съществува хиперравнина $H \subset \mathbb{R}^n$, която разделя строго C и b.*

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че $b = 0^n \in \mathbb{R}^n$. Нека

$$\delta = \inf \left\{ ||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \,\middle|\, x \in C \right\},$$

а $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset C$ е редица от точки с $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^{(m)}|| = \delta$. Произволни вектори $u, v \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяват правилото на успоредника

$$2||u||^2 + 2||v||^2 = ||u+v||^2 + ||u-v||^2.$$

В частност,

$$2\left(||x^{(i)}||^2 + ||x^{(j)}||^2\right) \geq ||x^{(i)} - x^{(j)}||^2 + 4\delta^2, \tag{13.2}$$

за $\forall i, j \in \mathbb{N}$, доколкото точката $\frac{1}{2}x^{(i)} + \frac{1}{2}x^{(j)}$ принадлежи на изпъкналото множество C. За $i \to \infty$ и $j \to \infty$ неравенството (13.2) показва, че $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е редица на Коши. По предположение, множеството C е затворено, така че съществува $a = (a_1, \ldots, a_n) = \lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} \in C$. Чрез граничен преход $m \to \infty$ в неравенствата

$$||x^{(m)}|| - ||a - x^{(m)}|| \leq ||a|| \leq ||x^{(m)}|| + ||a - x^{(m)}||$$

получаваме $||a|| = \delta$. Твърдим, че множеството C е строго над хиперравнината

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{1}{2}\delta^2 \right\},$$

а точката $b = 0^n$ е строго под хиперравнината H. Наистина, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i.0 = 0 < \frac{1}{2}\delta^2$. От друга страна, за произволна точка $x \in C$ и точката $a \in C$, отсечката

$$I(x,a) = \{tx + (1-t)a \,|\, t \in [0,1]\}$$

се съдържа в C. По определението на δ имаме

$$||a||^2 = \delta^2 \leq ||tx + (1-t)a||^2 = ||t(x-a)+a||^2 = t^2||x-a||^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - a_i) + ||a||^2.$$

Оттук

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - a_i) + \frac{1}{2}t||x-a||^2 \geq 0$$

за $t > 0$ и при граничен преход $t \to 0$ получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = ||a||^2 = \delta^2 > \frac{1}{2}\delta^2,$$

Q.E.D.

Да напомним, че $x \in \mathbb{R}^n$ е вътрешна точка на множество $S \subset \mathbb{R}^n$, ако съществува кълбо $B(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, ||x-y|| < \varepsilon\}$ с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, което се съдържа изцяло в S. Затворената обвивка $\overline{S}$ на $S \subset \mathbb{R}^n$ е съвкупността от граничните точки на редици на Коши $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset S$. Границата ∂S на $S \subset \mathbb{R}^n$ се състои от онези точки на $\overline{S}$, които не са вътрешни за S.

Теорема 20. *Ако b е гранична точка на изпъкнало затворено подмножество $C \subset \mathbb{R}^n$, то съществува хиперравнина $H \subset \mathbb{R}^n$ през b, така че C се намира над H.*

Доказателство: За произволна точка $b \in \partial C$ съществува редица $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ от точки $y^{(k)} \notin \overline{C} = C$ с граница $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = b$. Съгласно Теорема 19, за всяко $k \in \mathbb{N}$ съществува хиперравнина

$$H_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_i + a_0^{(k)} = 0 \right\},$$

така че C е строго над H_k, а $y^{(k)}$ е строго под H_k. Без ограничение на общността можем да считаме, че нормалните вектори $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ на H_k са единични. Тогава от

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} y_i^{(k)} + a_0^{(k)} < 0 < \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_i + a_0^{(k)} \quad \text{за } \forall x \in \overline{C} = C$$

получаваме $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(k)}(y_i^{(k)} - x_i) \leq 0$ за $\forall x \in C$. Редицата $\{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена, така че има сходяща подредица $\{a^{(k_m)}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{a^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$. Ако $a = \lim\limits_{m\to\infty} a^{(k_m)}$ е границата на тази подредица, то $||a|| = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - x_i) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k_m)} (y_i^{(k_m)} - x_i) \right) \leq 0 \quad \text{за } \forall x \in C.$$

Сега хиперравнината

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) = 0 \right\}$$

минава през точката $b = (b_1 \dots, b_n)$ и C се намира над H, Q.E.D.

Нека $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнала област с C^1-гладка гранична точка $b \in \partial W$. Това означава съществуване на околност U_b на b върху $\mathbb{R}^n$ и функция $\varphi : U_b \to \mathbb{R}$ с непрекъснати частни производни, така че $W \cap U_b = \{x \in U_b \,|\, \varphi(x) < 0\}$ и $\nabla\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right) \neq 0^n$ за $\forall x \in U_b$. Твърдим, че изпъкналата област W е изцяло в едното от полупространствата спрямо допирателната равнина

$$T_b(\partial W) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (x - b, \nabla\varphi(b)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(b)(x_i - b_i) = 0 \right\}$$

към ∂W в b. По-точно, можем да повторим доказателството на Теорема 20, извирайки редицата $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ върху външната нормала към ∂W в b. Тогава разстоянията от $y^{(k)}$ до ∂W се реализират в $b \in \partial W$ и можем да изберем един и същи нормален вектор $\nabla\varphi(b) \neq 0^n$ на хиперравнините H_k. Тяхната граница H е равнината през b, перпендикулярна на $\nabla\varphi(b)$ или $H = T_b(\partial W)$ е допирателната равнина към ∂W в b.

Ще казваме, че областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е изпъкнала, ако D е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

Да напомним стандартното ермитово скаларно произведение

$$(z, w) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} [Re(z_j) Re(w_j) + Im(z_j) Im(w_j)] + i \sum_{j=1}^{n} [Im(z_j) Re(w_j) - Re(z_j) Im(w_j)]$$

в $\mathbb{C}^n$. Реалната му част

$$Re(z,w) = \sum_{j=1}^{n} [Re(z_j)Re(w_j) + Im(z_j)Im(w_j)]$$

е евклидово скаларно произведение в $\mathbb{R}^{2n}$. Всяка реална хиперравнина $H \subset \mathbb{C}^n$ през $\zeta \in \mathbb{C}^n$ с нормален вектор $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ спрямо това евклидово скаларно произведение има вида

$$H = \{z \in \mathbb{C}^n \mid Re(z-\zeta, a) = 0\}.$$

Теорема 21. *Всяка изпъкнала област $D \subset \mathbb{C}^n$ е област на холоморфност.*

Доказателство: Съгласно Теорема 20, през произволна точка $\zeta \in \partial D$ съществува реална хиперравнина

$$H_\zeta = \{z \in \mathbb{C}^n \mid Re(z-\zeta, a) = 0\},$$

така че D е над H_ζ. Комплексната хиперравнина

$$H_\zeta^{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid (z-\zeta, a) = 0\}$$

през $\zeta \in \partial D$ се съдържа в реалната хиперравнина H_ζ. Затова H_ζ не съдържа вътрешна точка на D и функцията

$$f_\zeta : D \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f_\zeta(z) = \frac{1}{(z-\zeta, a)}$$

е коректно определена и холоморфна в D. Още повече, f е неограничена в ζ. По този начин, съществува бариер в ζ и съгласно Следствие 13.7, D е област на холоморфност, Q.E.D.

Изпъкналостта на областта D е достатъчно, но не и необходимо условие за това D да е област на холоморфност.

Лема 13.8. *Ако $D_1 \subset \mathbb{C}^m$ и $D_2 \subset \mathbb{C}^n$ са области на холоморфност, то Декартовото произведение $D_1 \times D_2$ е област на холоморфност в $\mathbb{C}^{m+n}$.*

Доказателство: Ако D_1 е област на холоморфност на функцията $f : D_1 \to \mathbb{C}$, а D_2 е област на холоморфност на функцията $g : D_2 \to \mathbb{C}$, то $D_1 \times D_2$ е област на холоморфност на функцията

$$F : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$F(z,w) = f(z)g(w).$$

При допускане на противното съществува точка $(p,q) \in D_1 \times D_2$ и положително реално число $r > \rho((p,q), \partial(D_1 \times D_2))$, така че F се продължава холоморфно в кълбото $B((p,q), r) \subset \mathbb{C}^{m+n}$. Нека $(\zeta, \eta) \in \partial(D_1 \times D_2)$ е точка, в която се достига

$$\rho((p,q), \partial(D_1 \times D_2)) = ||(p,q) - (\zeta,\eta)|| = ||(p-\zeta, q-\eta)|| = \sqrt{||p-\zeta||^2 + ||q-\eta||^2}.$$

Тогава $(\zeta,\eta) \in B((p,q), r)$ и F се продължава в (ζ, η). Но

$$\partial(D_1 \times D_2) = \left(\partial D_1 \times \overline{D_2}\right) \cup \left(\overline{D_1} \times \partial D_2\right),$$

така че $\zeta \in \partial D_1$ или $\eta \in \partial D_2$. Ако $\zeta \in \partial D_1$, то разстоянието $\rho(p, \partial D_1) = ||p-\zeta||$ и затова $f : D_1 \to \mathbb{C}$ няма холоморфно продължение в ζ. В случая $\eta \in \partial D_2$ е изпълнено $\rho(q, \partial D_2) = ||q-\eta||$ и g не е определена в η, защото $\rho(b, \partial D_2) = ||b-\eta||$. Противоречието установява, че $D_1 \times D_2$ е област на холоморфност на $F(z,w) = f(z)g(w)$, Q.E.D.

Както вече отбелязахме, всяка област в $\mathbb{C}$ е област на холоморфност. Ако $D_1 \subset \mathbb{C}$ не е изпъкнала област, а $D_2 \subset \mathbb{C}$ е произволна област, то $D_1 \times D_2$ е неизпъкнала област на холоморфност.

Да напомним, че изпъкналата обвивка $CH(M)$ на подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ е сечението $CH(M) = \cap_{C \supseteq M} C$ на всички изпъкнали подмножества $C \subseteq \mathbb{R}^n$, съдържащи M. Твърдим, че множеството

$$C_o(M) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i p_i \,\middle|\, p_i \in M, t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

на изпъкналите комбинации на точки от M съвпада с изпъкналата обвивка $CH(M)$. За целта е достатъчно да проверим изпъкналостта на $C_o(M)$, защото тогава $C_o(M) \subseteq CH(M)$. От друга страна, всяко изпъкнало $C \supseteq M$ съдържа изпъкналите комбинации $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i p_i$ на $p_1, \ldots, p_k \in M$. Затова $CH(M) \supseteq C_o(M)$ и $CH(M) = C_o(M)$. За изпъкналостта на $C_o(M)$ трябва да проверим, че заедно с произволни две свои точки $p = \sum\limits_{i=1}^{k} t_i p_i \in C_o(M)$ и $q = \sum\limits_{j=1}^{l} r_j q_j \in C_o(M)$, множеството $C_o(M)$ съдържа цялата отсечка, определена от тях. По-точно, за произволно реално $0 \leq s \leq 1$ точката

$$sp + (1-s)q = \sum_{i=1}^{k} s t_i p_i + \sum_{j=1}^{l} (1-s) r_j q_j \in C_o(M),$$

доколкото

$$\sum_{i=1}^{k} s t_i + \sum_{j=1}^{l} (1-s) r_j = s \left(\sum_{i=1}^{k} t_i \right) + (1-s) \left(\sum_{j=1}^{l} r_j \right) = s.1 + (1-s).1 = s + (1-s) = 1.$$

Следователно $C_o(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало подмножество, съдържащо M и изпъкналата обвивка $CH(M) = C_o(M)$.

Нека $\mathcal{L}$ е множеството на афинно-линейните функции $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + a_o \not\equiv a_o$ на n реални променливи $x = (x_1, \ldots, x_n)$. За произволно подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f \in \mathcal{L}$ полагаме

$$||f||_M = \sup_{x \in M} f(x).$$

Определяме линейната обвивка

$$\mathcal{L}(M) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq ||f||_M \text{ за } \forall f \in \mathcal{L} \}.$$

Съгласно линейността на $f(x) - f(0^n)$ за $\forall f \in \mathcal{L}$, полупространствата

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq ||f||_M \}$$

са изпъкнали. Оттам и сечението им $\mathcal{L}(M)$ е изпъкнало. Геометрично, $\mathcal{L}(M)$ е затвореният многостен, отсечен от онези хиперравнини в $\mathbb{R}^n$, спрямо които M е изцяло в едно от полупространствата. Върховете на $\mathcal{L}(M)$ са от затворената обвивка $\overline{M}$, така че $\mathcal{L}(M) = C_o(\overline{M})$.

Ако $W \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнала област и $M \subseteq \overline{M} \subset W$ е компактно вложено подмножество, то $\mathcal{L}(M) = C_o(\overline{M}) \subset W$. В качеството си на затворено подмножество, $\overline{\mathcal{L}(M)} = \mathcal{L}(M) \subset W$.

Обобщавайки компактната вложеност на $\mathcal{L}(M) \subset W$ за всяко компактно вложено $M \subseteq \overline{M} \subseteq W$ в изпъкнала област $W \subset \mathbb{R}^n$, определяме понятието холоморфно изпъкнала област в $\mathbb{C}^n$.

Определение 13.9. *Холоморфно изпъкналата обвивка $H(M)$ на множество $M \subset D$ е*

$$H(M) = \{z \in D \,|\, |f(z)| \leq ||f||_M \quad \text{за } \forall f \in \mathcal{O}(D)\},$$

където $\mathcal{O}(D)$ е пръстенът на холоморфните в областта D функции, а $||f||_M = \sup\limits_{z \in M} |f(z)|$.

Определение 13.10. (А. Картан, П. Тулен - 1932г.) *Областта D е холоморфно изпъкнала, ако всяко компактно вложено подмножество $K \subseteq \overline{K} \subset D$ има компактно вложена холоморфно изпъкнала обвивка $H(K) \subset \overline{H(K)} \subset D$.*

Да отбележим, че всяко затворено $K \subset D$ е ограничено, защото областта D няма безкрайни вътрешни точки. Следователно всички затворени подмножества на D са компактни. Твърдим, че областта $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е холоморфно изпъкнала тогава и само тогава, когато всеки компакт $K \subset D$ има компактна холоморфно изпъкнала обвивка $H(K) \subset D$. Наистина, ако $K \subset D$ е компакт с компактно вложена холоморфно изпъкнала обвивка $H(K) \subseteq \overline{H(K)} \subset D$, то $H(K) = \overline{H(K)}$. По-точно, $H(K) = H_o(K) \cap D$ за затвореното

$$H_o(K) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |f(z)| \leq ||f||_K \ \text{ за } \ \forall f \in \mathcal{O}(D)\},$$

така че $\overline{H(K)} = H_o(K) \cap \overline{D}$ се съдържа в D точно когато съвпада с $H(K)$. Оттук $H(K) = \overline{H(K)}$ е затворено и ограничено, а оттам компактно. Обратно, ако $K \subset \overline{K} \subset D$ е компактно вложено подмножество и компактът $\overline{K}$ има компактна холоморфно изпъкнала обвивка $H(\overline{K}) = H_o(\overline{K}) \cap D = H_o(K) \cap D = H(K)$, то $H(\overline{K}) = H_o(\overline{K}) \cap D = H_o(K) \cap D = H(K)$, то $H(K) = \overline{H(K)} \subset D$ е компактно вложено в D.

Изпъкналата обвивка относно подклас $F \subset \mathcal{O}(D)$ се нарича F-изпъкнала обвивка на множество M и се означава с $H_F(M)$. Ако F е класът на $\mathbb{R}$-линейните функции, то понятието F-изпъкналост съвпада с понятието геометрична изпъкналост. Ако F е класът на полиномиалните или рационални функции, говорим за полиномиална или рационална изпъкналост. Колкото е по-голям класът F, толкова повече условия се налагат върху F-изпъкналите обвивки. Затова, с разширяване на класа F се намаляват F-изпъкналите обвивки и се увеличава броя на F-изпъкналите области. В частност, всички изпъкнали области са полиномиално изпъкнали и всички полиномиално изпъкнали области са холоморфно изпъкнали.

Теорема 22. (Теорема 1 на Картан-Тулен) *Ако областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е холоморфно изпъкнала, то тя е област на холоморфност.*

Доказателство: Нека E е изброимо навсякъде гъсто подмножество на границата ∂D, номерирано по такъв начин, че всеки негов елемент се среща безброй много пъти. (Например, ако $E = \{e^{(m)} \,|\, m \in \mathbb{N}\}$ като множество, то E в редицата $e^{(1)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}, \ldots$.) Строим компактите K_m както в доказателството на Теорема 18(ii). Тогава всяко K_m съдържа непразно отворено подмножество K_1^o и за всяка нетъждествено нулева холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ имаме $||f||_{K_m} > 0$. Точките $z^{(m)}$ и функциите f_m избираме по следния начин. Съгласно холоморфната изпъкналост на областта D, холоморфните обвивки $H(K_m)$ на K_m се съдържат в D заедно със затворените си обвивки $\overline{H(K_m)} \subset D$. За всяка точка $z^{(m)} \in D \backslash \overline{H(K_m)}$ съществува холоморфна функция $g_m : D \to \mathbb{C}$, така че $|g_m(z^{(m)})| > ||g_m||_{K_m}$. Избираме $z^{(m)} \in [D \setminus \overline{H(K_m)}] \cap B\left(\zeta^{(m)}, \frac{1}{m}\right)$. Полагаме

$$f_m(z) = \frac{g_m(z)}{||g_m||_{K_m}} \qquad \text{за } \forall m \in \mathbb{N}.$$

След това продължаваме разсъжденията както в доказателството на Теорема 18(ii) и получаваме, че функцията

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (f_m(z))^{p_m}$$

е холоморфна в D и расте неограничено при приближаване на коя и да е точка на E. Следователно D е област на холоморфност, Q.E.D.
Следващата Лема за едновременно продължение използва така наречената метрика на полидиск, която се индуцира от нормата

$$||z||_{\sup} = \sup_{1 \leq j \leq n} |z_j| \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Непосредствено се вижда, че

$$||z||_{\sup} \leq ||z|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2} \leq \sqrt{n}||z||_{\sup} \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

откъдето и

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||z|| \leq ||z||_{\sup} \leq ||z|| \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

По този начин, метриките $\rho(x,y) = ||x-y||$ и $\rho_{\sup}(x,y) = ||x-y||_{\sup}$ за $x, y \in \mathbb{C}^n$ определят една и съща сходимост в $\mathbb{C}^n$ и са еквивалентни. В частност, $\rho(x,y)$ и $\rho_{\sup}(x,y)$ задават една и съща топология върху $\mathbb{C}^n$.

Определение 13.11. *Ако $K \subset \mathbb{C}^n$ е подмножество, а $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ е реално положително число, то ρ-раздуването на K е обединението*

$$K^{\rho} = \cup_{a \in K} \mathcal{P}(a, \rho^n)$$

на полидисковете $\mathcal{P}(a, \rho^n)$ с център $a \in K$ и поли-радиус $\rho^n = (\rho, \dots, \rho) \in \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$.

Лема 13.12. (Лема за едновременно продължение) *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е област, $K \subseteq \overline{K} \subset D$ е компактно вложено подмножество, а*

$$\rho = \rho_{\sup}(K, \partial D) = \inf_{z \in K, \zeta \in \partial D} ||z - \zeta||_{\sup}$$

е разстоянието от K до границата ∂D относно метриката на полидиск. Тогава всяка холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ се продължава холоморфно върху ρ-раздуването $H(K)^{\rho}$ на холоморфно изпъкналата обвивка $H(K)$ на K.

Докаазтелство: Изобщо, $H(K)$ може да съдържа строго K и разстоянието от $H(K)$ of ∂D може да е строго по-малко от ρ. В резултат, ρ-раздуването $H(K)^{\rho} = \cup_{a \in H(K)} \mathcal{P}(a, \rho^n)$ не се съдържа в D и твърдението на лемата не е тривиално.
Достатъчно е да докажем, че произволна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ се продължава холоморфно в полидиск $\mathcal{P}(a, \rho^n)$ с фиксиран център $a \in H(K)$ и радиус $\rho = \rho_{\sup}(K, \partial D)$. В достатъчно малка околност на a върху D, холоморфната функция f се разлага в ред на Тейлър

$$f(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a)(z-a)^k. \tag{13.3}$$

По определението за холоморфно изпъкнала обвивка,

$$\left| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \right| \leq \left|\left| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \right|\right|_K = \sup_{z \in K} \left| \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z) \right|$$

съгласно $a \in H(K)$ и холоморфността на $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} : D \to \mathbb{C}$ за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$. Ако $z \in K$ и $0 < r < \rho$, то върху полидиска $\mathcal{P}(z, r^n) \subset \overline{\mathcal{P}(z, r^n)} \subset D$ имаме неравенствата на Коши

$$\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z)\right| \leq \frac{||f||_{T^n(z,r^n)}}{r^{|k|}}.$$

Торовете $T^n(z, r^n)$ се съдържат в затворената обвивка $\overline{K^r} \subset D$ на r-раздуването $K^r = \cup_{z \in K} \mathcal{P}(z, r^n)$ на K, така че

$$||f||_{T^n(z,r^n)} \leq ||f||_{K^r} \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a)\right| \leq \frac{1}{k!}\left|\left|\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}\right|\right|_K \leq \frac{||f||_{K^r}}{r^{|k|}} \quad \text{за } \forall 0 < r < \rho.$$

Сега за $\forall 0 < r_1 < r$ и $\forall z \in \mathcal{P}(a, r_1^n)$ оттук следва, че

$$\left|\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a)(z-a)^k\right| \leq \left(\frac{r_1}{r}\right)^{|k|} ||f||_{K^r}$$

е ограничено от $|k|$-тия член на геометрична прогресия с частно $0 < \frac{r_1}{r} < 1$. Следователно редът (13.3) е равномерно сходящ към холоморфна функция в полидиска $\mathcal{P}(a, r_1^n)$ за произволно $0 < r_1 < r < \rho$. Избирайки r и r_1 достатъчно близо до ρ получаваме равномерната сходимост на (13.3) в $\mathcal{P}(a, \rho^n)$, а оттам и наличието на холоморфно продължение $f : \mathcal{P}(a, \rho^n) \to \mathbb{C}$ на $f : D \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 23. (Теорема 2 на Картан-Тулен) *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е област на холоморфност, то D е холоморфно изпъкнала.*

Доказателство: Нека $K \subset D$ е подмножество със затворена обвивка $\overline{K} \subset D$, а $\rho = \rho_{\sup}(K, \partial D)$ е разстоянието от K до границата ∂D. Съгласно Лема 13.12 за едновременно продължение, всяка холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ се продължава холоморфно в ρ-раздуването $H(K)^\rho = \cup_{z \in H(K)} \mathcal{P}(z, \rho^n)$ на $H(K)$. Да допуснем, че D не е холоморфно изпъкнала област и $\overline{H(K)}$ не се съдържа в D за някакво подмножество $K \subseteq \overline{K} \subset D$. Тогава съществува точка $a \in \overline{H(K)} \cap \partial D$. Избираме редица $\{a^{(m)}\}_{m=1}^\infty \subset D$, клоняща към $a = \lim\limits_{m \to \infty} a^{(m)}$ и редица от гранични точки $\{\zeta^{(m)}\}_{m=1}^\infty \subset \partial D$, в които се достигат разстоянията $\rho_{\sup}(a^{(m)}, \partial D) = ||a^{(m)} - \zeta^{(m)}||_{\sup}$. Тогава от $\rho_{\sup}(a^{(m)}, \partial D) \leq ||a^{(m)} - a||_{\sup}$ следва

$$0 \leq \lim_{m \to \infty} ||a^{(m)} - \zeta^{(m)}||_{\sup} \leq \lim_{m \to \infty} ||a^{(m)} - a|| = 0$$

и редицата $\{\zeta^{(m)}\}_{m=1}^\infty \subset \partial D$ е сходяща към $a \in \partial D$. Ако D е област на холоморфност на $g : D \to \mathbb{C}$, то g няма холоморфно продължение в нито едно $\zeta^{(m)}$, така че g няма холоморфно продължение и в тяхната граница $a \in \overline{H(K)} \subset H(K)^\rho$. Противоречието доказва холоморфната изпъкналост на D, Q.E.D.

Като непосредствено следствие получаваме следното

ТВЪРДЕНИЕ 13.13. *Всяка област $D \subseteq \mathbb{C}$ е холоморфно изпъкнала.*

ТЕОРЕМА 24. *Област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е холоморфно изпъкнала тогава и само тогава, когато за всяко подмножество $K \subset \overline{K} \subset D$ с холоморфно изпъкнала обвивка $H(K)$ е в сила*

$$\rho_{\sup}(H(K), \partial D) = \rho_{\sup}(K, \partial D). \tag{13.4}$$

Доказателство: Ако $\rho_{\sup}(H(K), \partial D) = \rho_{\sup}(K, \partial D)$ и $K \subseteq \overline{K} \subset D$, то $H(K) \subseteq \overline{H(K)} \subseteq D$. По-точно, за $\forall a \in \partial H(K) = \overline{H(K)} \setminus H(K)$ и $\forall \zeta \in \partial D$ е в сила $||a - \zeta||_{\sup} \geq \rho_{\sup}(H(K), \partial D) = \rho_{\sup}(K, \partial D) > 0$, така че $\overline{H(K)} \subset D$. Затова (13.4) е достатъчно условие за холоморфна изпъкналост.

По Теорема 22, за всяка холоморфно изпъкнала област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ съществува холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$, която е неограничена във всяка гранична точка на D. Следователно f не се продължава в околност на нито едно гранична точка точка на D. От друга страна, $K \subseteq H(K)$ води до $\rho_{\text{sup}}(H(K), \partial D) \leq \rho_{\text{sup}}(K, \partial D) = \rho$. Допускането $\rho_{\text{sup}}(H(K), \partial D) < \rho$ изисква наличие на точка $a \in H(K)$ с $\rho_{\text{sup}}(a, \partial D) < \rho$. Тогава полидискът $\mathcal{P}(a, \rho^n)$ съдържа гранични точки на D. Съгласно Лема 13.12 за едновременно продължение, функцията f се продължава холоморфно в $\mathcal{P}(a, \rho^n)$. Противоречието доказва необходимостта на (13.4) за холоморфно изпъкнали области, Q.E.D.