Лекция 9

Съответствие между къси точни редици от ко-верижни (верижни) комплекси и дълги точни редици от кохомологии (хомологии). Змиеобразна лема.

1. Змиеобразна лема

За доказателството на основното за този въпрос Твърдение е необходима следната

Лема 9.1. (Змиеобразна Лема) *Нека*

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & C_1 & \end{tikzcd}$$

е комутативна диаграма от R-модули с точни редове. Тогава съществува точна редица

$$Ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} Ker(g) \xrightarrow{\beta_2} Ker(h) \xrightarrow{\partial}$$

$$CoKer(f) \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} CoKer(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} CoKer(h)\ .$$

При това, ако $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2$ *е мономорфизъм, то и ограничението* $Ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} Ker(g)$ *е мономорфизъм. Ако* $B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$ *е епиморфизъм, то и индуцираното изображение* $CoKer(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} CoKer(h)$ *е епиморфизъм.*

Доказателство: Доколкото $Ker(f)$ е подмодул на A_2, хомоморфизмът $\alpha_2 : A_2 \to B_2$ се ограничава до хомоморфизъм $\alpha_2 : Ker(f) \to B_2$. Съгласно комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"] & B_2 \arrow[d, "g"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \end{tikzcd}, \qquad (9.1)$$

за $\forall a \in Ker(f)$ следва, че $g\alpha_2(a) = \alpha_1 f(a) = \alpha_1(0) = 0$ или $\alpha_2 Ker(f) \subseteq Ker(g)$. Аналогично, $\beta_2 : B_2 \to C_2$ задава коректно изображение на R-модули $\beta_2 : Ker(g) \to Ker(h)$. Точността на $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \longrightarrow 0$ дава, в частност, $\beta_2\alpha_2 = 0$ като изображение $A_2 \to C_2$. Оттук следва, че $\beta_2\alpha_2 = 0$ като изображение $Ker(f) \to Ker(h)$ или

$$Ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} Ker(g) \xrightarrow{\beta_2} Ker(h)$$

е комплекс. Квадратите

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{A_2}"'] & Ker(g) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} Ker(g) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] & Ker(h) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C_2}"'] \\ B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

са комутативни, защото вертикалните изображения са тъждествени. По определението за ко-ядро, съществува естествен епиморфизъм $A_1 \to A_1/Im(f) =: CoKer(f)$. Хомоморфизмът на R-модули $\alpha_1 : A_1 \to B_1$ индуцира

$$\overline{\alpha_1} : CoKer(f) = A_1/Im(f) \longrightarrow B_1/Im(g) = CoKer(g)$$

по правилото

$$\overline{\alpha_1}(a_1 + Im(f)) := \alpha_1(a_1) + Im(g).$$

Това определение е коректно, защото за $\forall a \in Im(f)$ е в сила $\alpha_1(a) = \alpha_1 f(a_2) = g\alpha_2(a_2) \in Im(g)$ съгласно комутативността на диаграмата (9.1). Аналогично, определяме

$$\overline{\beta_1} : CoKer(g) = B_1/Im(g) \longrightarrow C_1/Im(h) = CoKer(h),$$

$$\overline{\beta_1}(b_1 + Im(g)) := \beta_1(b_1) + Im(h)$$

и проверяваме, че $\overline{\beta_1}$ е коректно зададено. Редицата

$$\begin{tikzcd} CoKer(f) \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] & CoKer(g) \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] & CoKer(h) \end{tikzcd}$$

е комплекс, защото $\overline{\beta_1}\,\overline{\alpha_1}(a_1+Im(f)) = \overline{\beta_1}(\alpha_1(a_1)+Im(g)) = \beta_1\alpha_1(a_1)+Im(h) = Im(h)$ за $\forall a_1 \in A_1$, съгласно $\beta_1\alpha_1 = 0$. Диаграмата

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\pi_f"'] & B_1 \arrow[d, "\pi_g"'] \\ CoKer(f) \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] & CoKer(g) \end{tikzcd}$$

е комутативна, защото

$$\overline{\alpha_1}\pi_f(a_1) = \overline{\alpha_1}(a_1 + Im(f)) = \alpha_1(a_1) + Im(g) = \pi_g\alpha_1(a_1).$$

Аналогично се проверява комутативността на

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\pi_g"'] & C_1 \arrow[d, "\pi_h"'] \\ CoKer(g) \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] & CoKer(h) \end{tikzcd} .$$

По този начин получаваме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(f) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{A_2}"'] & Ker(g) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] & Ker(h) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C_2}"'] & \\
 & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\pi_f"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\pi_g"'] & C_1 \arrow[d, "\pi_h"'] & \\
 & CoKer(f) \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] & CoKer(g) \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] & CoKer(h) &
\end{tikzcd},$$

в която първият и четвъртият ред са комплекси, а вторият и третият ред са точни редици.

Трябва да определим свързващ хомоморфизъм $\partial : Ker(h) \to CoKer(f)$. За целта преминаваме през R-модулите C_2, B_2, B_1, A_1, откъдето идва името Змиевидна Лема. По-точно, $\forall c \in Ker(h)$ може да се разглежда като $c \in C_2$ и съгласно епиморфността на β_2 да се представи във вида $c = \beta_2(b)$ за някое $b \in B_2$. Тогава $\beta_1 g(b) = h\beta_2(b) = h(c) = 0$ показва, че $g(b) \in Ker(\beta_1)$. Точността на редицата $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$ в B_1 означава, че $Im(\alpha_1) = Ker(\beta_1)$. Следователно съществува $a \in A_1$ с $\alpha_1(a) = g(b)$. Полагаме $\partial(c) := \pi_f(a) = a + Im(f)$. Да отбележим, че $b \in B_2$ е определено с точност до $b_0 \in Ker(\beta_2) = Im(\alpha_2)$, така че $b_0 = \alpha_2(a_0)$ за някое $a_0 \in A_2$. Комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[d, "g"'] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1
\end{tikzcd}$$

дава $g(b_0) = g\alpha_2(a_0) = \alpha_1 f(a_0)$, така че $\partial(c)$ е определено с точност до $\pi_f f(a_0) = Im(f)$. По-нататък, при фиксирани $c \in Ker(h)$ и $b \in B_2$ с $c = \beta_2(b)$, елементът $a \in A_1$ с $\alpha_1(a) = g(b)$ е определен с точност до $Ker(\alpha_1) = 0$. Това доказва коректността на определението $\partial(c) := \pi_f(a) = a + Im(f)$.

Дотук получихме редица

$$Ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} Ker(g) \xrightarrow{\beta_2} Ker(h) \xrightarrow{\quad\partial\quad} \tag{9.2}$$

$$CoKer(f) \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} CoKer(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} CoKer(h)\ ,$$

която е комплекс, стига $\partial\beta_2|_{Ker(g)} = 0$ и $\overline{\alpha_1}\partial = 0$. Наистина, ако $b \in Ker(g)$, то $\partial\beta_2(b) = a + Im(f)$, където $\alpha_1(a) = g(b) = 0$. Доколкото α_1 е мономорфизъм, оттук следва $a = 0$ и $\partial\beta_2|_{Ker(g)} = 0$. За $\overline{\alpha_1}\partial = 0$ да отбележим, че ако $c \in C_2$ е от вида $c = \beta_2(b)$ за някое $b \in B_2$, а $g(b) = \alpha_1(a)$ за $a \in A_1$, то $\overline{\alpha_1}\partial(c) = \overline{\alpha_1}(a + Im(f)) = \overline{\alpha_1}\pi_f(a) = \pi_g\alpha_1(a) = \pi_g g(b) = 0$.

Остава да докажем точността на комплекса (9.2) във всички вътрешни членове. Точността в $Ker(g)$ изисква проверката на $Ker\left(\beta_2|_{Ker(g)}\right) \subseteq Im\left(\alpha_2|_{Ker(f)}\right)$. Наистина, ако $b \in B_2$ и $g(b) = 0$, $\beta_2(b) = 0$, то съществува $a \in A_2$ с $\alpha_2(a) = b$. Твърдим, че $a \in Ker(f)$, защото $\alpha_1 f(a) = g\alpha_2(a) = g(b) = 0$ и α_1 е мономорфизъм.

За точността в $Ker(h)$ е нужно $Ker(\partial) \subseteq Im\left(\beta_2|_{Ker(g)}\right)$. По определението на ∂, за $\forall c \in Ker(h)$ съществува $b \in B_2$, така че $c = \beta_2(b)$. По-нататък, $g(b) = \alpha_1(a)$ за някое $a \in A_1$ и $\partial(c) := a + Im(f)$. Ако $a = f(a_0)$ за $a_0 \in A_2$, то $g(b) = \alpha_1 f(a_0) = g\alpha_2(a_0)$ или $g[b - \alpha_2(a_0)] = 0$. С други думи, за всяко $c \in Ker(\partial)$ имаме $c = \beta_2(b) = \beta_2[b - \alpha_2(a_0)]$ с $b - \alpha_2(a_0) \in Ker(g)$ съгласно $\beta_2\alpha_2 = 0$.
Комплексът (9.2) е точен в $CoKer(f)$ стига $Ker(\overline{\alpha_1}) \subseteq Im(\partial)$. Ако $a + Im(f) \in Ker(\overline{\alpha_1})$, то $\alpha_1(a + Im(f)) = \alpha_1(a) + Im(g) = Im(g)$, откъдето $\alpha_1(a) \in Im(g)$. Следователно съществува $b \in B_2$, така че $\alpha_1(a) = g(b)$. В резултат, $\partial\beta_2(b) = \pi_f(a) = a + Im(f) \in Im(\partial)$.
Относно точността в $CoKer(g)$ е необходимо установяването на $Ker\left(\overline{\beta_1}\right) \subseteq Im(\overline{\alpha_1})$. По-точно, ако $\beta_1(b) \in Im(h)$ за $b \in B_1$ то $\beta_1(b) = h(c)$ за $c \in C_2$. Благодарение на точността на редицата $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$, имаме $Im(\alpha_1) = Ker(\beta_1)$. Понеже $\beta_2 : B_2 \to C_2$ е епиморфизъм, съществува $b_2 \in B_2$, така че $c = \beta_2(b_2)$. Съгласно комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd}
B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"'] & C_2 \arrow[d, "h"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & C_1
\end{tikzcd}$$

имаме $\beta_1(b) = h(c) = h\beta_2(b_2) = \beta_1 g(b_2)$, т.е. $\beta_1[b - g(b_2)] = 0$. Сега от $b - g(b_2) \in Ker(\beta_1) = Im(\alpha_1)$ следва съществуването на $a \in A_1$, така че $b - g(b_2) = \alpha_1(a)$. С други думи, $b + Im(g) = g(b_2) + \alpha_1(a) + Im(g) = \alpha_1(a) + Im(g) = \overline{\alpha_1}(a + Im(f)) \in Im(\overline{\alpha_1})$.
Ако $\alpha_2 : A_2 \to B_2$ е мономорфизъм, то и ограничението $\alpha_2 : Ker(f) \to Ker(g)$ е мономорфизъм.
Ако $\beta_1 : B_1 \to C_1$ е епиморфизъм, то за всяко $c \in C_1$ елементите $c + Im(h)$ имат вида $\beta_1(b) + Im(h) = \overline{\beta_1}(b + Im(g))$ за някое $b \in B_1$, Q.E.D.

2. Точни редици от ко-верижни (верижни) комплекси и кохомологии (хомологии)

ТВЪРДЕНИЕ 9.2. *(i) Всяка къса точна редица*

$$0 \longrightarrow M^\bullet \xrightarrow{\mu^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{\nu^\bullet} P^\bullet \longrightarrow 0$$

от ко-верижни комплекси отговаря на дълга точна редица

$$\dots H^k(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^k)} H^k(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^k)} H^k(P^\bullet) \xrightarrow{\partial^k} H^{k+1}(M^\bullet) \dots$$

от кохомологии.
(ii) Всяка къса точна редица

$$0 \longrightarrow M_\bullet \xrightarrow{\mu_\bullet} N_\bullet \xrightarrow{\nu_\bullet} P_\bullet \longrightarrow 0$$

от верижни комплекси отговаря на дълга точна редица

$$\dots H_k(M_\bullet) \xrightarrow{H(\mu_k)} H_k(N_\bullet) \xrightarrow{H(\nu_k)} H_k(P_\bullet) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(M_\bullet) \dots$$

от хомологии.

Доказателство: Ще проверим само (i), защото разглежданията за (ii) са аналогични. По предположение, за всяко цяло k имаме комутативни диаграми с точни редове

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r, "\mu^{k-1}"] \arrow[d, "d_M^{k-1}"'] & N^{k-1} \arrow[r, "\nu^{k-1}"] \arrow[d, "d_N^{k-1}"'] & P^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_P^{k-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^k \arrow[r, "\mu^k"] & N^k \arrow[r, "\nu^k"] & P^k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

Прилагайки Змиеобразната Лема 9.1 в пълния и вариант, получаваме точната редица

$$0 \longrightarrow Z^{k-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\mu^{k-1}} Z^{k-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\nu^{k-1}} Z^{k-1}(P^\bullet) \xrightarrow{\partial}$$

$$M^k/B^k(M^\bullet) \xrightarrow{\overline{\mu^k}} N^k/B^k(N^\bullet) \xrightarrow{\overline{\nu^k}} P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow 0 \ .$$

Сега от точната редица

$$M^k/B^k(M^\bullet) \xrightarrow{\overline{\mu^k}} N^k/B^k(N^\bullet) \xrightarrow{\overline{\nu^k}} P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow 0 \ ,$$

индуцираните диференциали $\overline{d_M^k} : M^k/B^k(M^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(M^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(M^\bullet)$, $\overline{d_N^k} : N^k/B^k(N^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(N^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(N^\bullet)$, $\overline{d_P^k} : P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(P^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(P^\bullet)$, които са коректно определени съгласно $B^k(*) \subseteq Ker(d_*^k)$ и точната редица

$$0 \longrightarrow Z^{k+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\mu^{k+1}} Z^{k+1}(N^\bullet) \xrightarrow{\nu^{k+1}} Z^{k+1}(P^\bullet) \xrightarrow{\partial}$$

сглобяваме диаграмата с точни редове

$$\begin{tikzcd}
 & M^k/B^k(M^\bullet) \arrow[r, "\overline{\mu^k}"] \arrow[d, "\overline{d_M^k}"'] & N^k/B^k(N^\bullet) \arrow[r, "\overline{\nu^k}"] \arrow[d, "\overline{d_N^k}"'] & P^k/B^k(P^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_P^k}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^{k+1}(M^\bullet) \arrow[r, "\mu^{k+1}"] & Z^{k+1}(N^\bullet) \arrow[r, "\nu^{k+1}"] & Z^{k+1}(P^\bullet) &
\end{tikzcd} .$$

Нейните два квадрата са комутативни, доколкото $\mu^\bullet$ и $\nu^\bullet$ са морфизми на ко-верижни комплекси и комутират с диференциалите, т.е. $d_N^k \mu^k = \mu^{k+1} d_M^k$ и $d_P^k \nu^k = \nu^{k+1} d_N^k$. Оттук

$$\overline{d_N^k}\,\overline{\mu^k}\left(m^k + B^k(M^\bullet)\right) = \overline{d_N^k}\left(\mu^k(m^k) + B^k(N^\bullet)\right) = d_N^k \mu^k(m^k) =$$

$$\mu^{k+1} d_M^k(m^k) = \mu^{k+1}\overline{d_M^k}\left(m^k + B^k(M^\bullet)\right)$$

за $\forall m^k + B^k(M^\bullet)$ дава $\overline{d_N^k}\,\overline{\mu^k} = \mu^{k+1}\overline{d_M^k}$. Проверката на $\overline{d_P^k}\,\overline{\nu^k} = \nu^{k+1}\overline{d_N^k}$ е аналогична. Прилагането на Змиеобразната Лема 9.1 към тази комутативна диаграма с точни редове дава точната редица

$$H^k(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^k)} H^k(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^k)} H^k(P^\bullet) \xrightarrow{\partial^k}$$

$$H^{k+1}(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^{k+1})} H^{k+1}(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^{k+1})} H^{k+1}(P^\bullet) \ .$$

Да припомним, че граничният оператор ∂^k трансформира произволен елемент $p^k + B^k(P^\bullet) \in H^k(P^\bullet)$ в

$$\partial^{k+1}\left(p^k + B^k(P^\bullet)\right) = m^{k+1} + B^{k+1}(M^\bullet)$$

за

$$p^k + B^k(P^\bullet) = H(\nu^k)\left(n^k + B^k(N^\bullet)\right)$$

и $\overline{d_N^k}\left(n^k + B^k(N^\bullet)\right) = d_N^k(n^k) = \mu^{k+1}(m^{k+1})$, Q.E.D.

3. Съгласуваност с морфизмите на къси и дълги точни редици

Съответствието между къси точни редици от ко-верижни (верижни) комплекси и дълги точни редици от кохомологии (хомологии) е съгласувано с морфизмите на тези обекти. По-точно:

Твърдение 9.3. *(i) Всяка комутативна диаграма с точни редове*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^\bullet \arrow[r, "\mu^\bullet"] \arrow[d, "f_M^\bullet"'] & N^\bullet \arrow[r, "\nu^\bullet"] \arrow[d, "f_N^\bullet"'] & P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_P^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{M}^\bullet \arrow[r, "\widetilde{\mu}^\bullet"] & \widetilde{N}^\bullet \arrow[r, "\widetilde{\nu}^\bullet"] & \widetilde{P}^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

отговаря на комутативна диаграма от кохомологии с точни редове

$$\begin{tikzcd}
\ldots H^k(M^\bullet) \arrow[r, "H(\mu^k)"] \arrow[d, "H(f_M^k)"'] & H^k(N^\bullet) \arrow[r, "H(\nu^k)"] \arrow[d, "H(f_N^k)"'] & H^k(P^\bullet) \arrow[r, "\partial^k"] \arrow[d, "H(f_P^k)"'] & H^{k+1}(M^\bullet)\ldots \arrow[d, "H(f_M^{k+1})"'] \\
\ldots H^k(\widetilde{M}^\bullet) \arrow[r, "H(\widetilde{\mu}^k)"] & H^k(\widetilde{N}^k) \arrow[r, "H(\widetilde{\nu^k})"] & H^k(\widetilde{P}^\bullet) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^k"] & H^{k+1}(\widetilde{M}^\bullet)\ldots
\end{tikzcd} .$$

(ii) Всяка комутативна диаграма от верижни комплекси с точни редове

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_\bullet \arrow[r, "\mu_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet^M"'] & N_\bullet \arrow[r, "\nu_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet^N"'] & P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f_\bullet^P"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{M}_\bullet \arrow[r, "\widetilde{\mu}_\bullet"] & \widetilde{N}_\bullet \arrow[r, "\widetilde{\nu}_\bullet"] & \widetilde{P}_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

отговаря на комутативна диаграма от хомологии с точни редове

$$\begin{tikzcd}
\ldots H_k(M_\bullet) \arrow[r, "H(\mu_k)"] \arrow[d, "H(f_k^M)"'] & H_k(N_\bullet) \arrow[r, "H(\nu_k)"] \arrow[d, "H(f_k^N)"'] & H_k(P_\bullet) \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "H(f_k^P)"'] & H_{k-1}(M_\bullet)\ldots \arrow[d, "H(f_{k-1}^M)"'] \\
\ldots H_k(\widetilde{M}_\bullet) \arrow[r, "H(\widetilde{\mu}_k)"] & H_k(\widetilde{N}_\bullet) \arrow[r, "H(\widetilde{\nu}_k)"] & H_k(\widetilde{P}_\bullet) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_k"] & H_{k-1}(\widetilde{M}_\bullet)\ldots
\end{tikzcd} .$$

Доказателство: Достатъчно е да докажем само (i), доколкото разглежданията за (ii) са аналогични. Редовете на обявената диаграма от кохомологии са точни съгласно Твърдение 9.2. Остава да проверим комутативността на посочените три квадрата, които се повтарят периодично за различни стойности на $k \in \mathbb{Z}$. За целта, пресмятаме непосредствено, че

$$H(f_N^k)H(\mu^k)(m^k+B^k(M^\bullet)) = H(f_N^k)(\mu^k(m^k)+B^k(N^\bullet)) = f_N^k\mu^k(m^k)+B^k(\widetilde{N}^\bullet) =$$

$$\widetilde{\mu}^k f_M^k(m^k)+B^k(\widetilde{N}^\bullet) = H(\widetilde{\mu}^k)(f_M^k(m^k)+B^k(\widetilde{M}^\bullet)) = H(\widetilde{\mu})H(f_M^k)(m^k+B^k(M^\bullet)),$$

за $\forall m^k + B^k(M^\bullet) \in H^k(M^\bullet)$ съгласно предположението $f_N^k\mu^k = \widetilde{\mu}^k f_M^k$. Установяването на $H(f_P^k)H(\nu^k) = H(\widetilde{\nu}^k)H(f_N^k)$ е аналогично и се основава на $f_P^k\nu^k = \widetilde{\nu}^k f_N^k$ за $\forall k \in \mathbb{Z}$. Остава да докажем, че

$$H(f_M^{k+1})\partial^k(p^k + B^k(P^\bullet)) = \widetilde{\partial}^k H(f_P^k)(p^k + B^k(P^\bullet))$$

за $\forall p^k + B^k(P^\bullet) \in H^k(P^\bullet)$. Да напомним определението на свързващия оператор $\partial^k : H^k(P^\bullet) \to H^{k+1}(M^\bullet)$. По-точно, $\partial^k(p^k + B^k(P^\bullet)) = m^{k+1} + B^{k+1}(M^\bullet)$, където $p^k + B^k(P^\bullet) = H(\nu^k)(n^k + B^k(N^\bullet))$ и $\overline{d_N^k}(n^k + B^k(N^\bullet)) = d_N^k(n^k) = \mu^{k+1}(m^{k+1})$. Сега

$$H(f_P^k)(p^k + B^k(P^\bullet)) = H(f_P^k)H(\nu^k)(n^k + B^k(N^\bullet)) = H(\widetilde{\nu}^k)H(f_N^k)(n^k + B^k(N^\bullet))$$

показва, че $\widetilde{\partial} H(f_P^k)(p^k + B^k(P^\bullet)) = \widetilde{\partial}^k H(\widetilde{\nu}^k)H(f_N^k)(n^k + B^k(N^\bullet))$. Оттук

$$\overline{d_{\widetilde{N}}^k} H(f_N^k)(n^k + B^k(N^\bullet)) = \overline{d_{\widetilde{N}}^k}\left(f_N^k(n^k) + B^k(\widetilde{N}^\bullet)\right) = d_{\widetilde{N}}^k f_N^k(n^k) =$$
$$f_N^{k+1} d_N^k(n^k) = f_N^{k+1}\mu^{k+1}(m^{k+1}) = \widetilde{\mu}^{k+1} f_M^{k+1}(m^{k+1}),$$

вземайки предвид, че морфизмът на ко-верижни комплекси $f_N^\bullet : N^\bullet \to \widetilde{N}^\bullet$ комутира с диференциалите, $d_{\widetilde{N}}^k f_N^k = f_N^{k+1} d_N^k$, както и $f_N^{k+1}\mu^{k+1} = \widetilde{\mu}^{k+1} f_M^{k+1}$ поради комутативността на левия квадрат на дадената диаграма от ко-верижни комплекси. Сега от определението на $\widetilde{\partial}^k$ следва, че

$$\widetilde{\partial}^k H(f_P^k)(p^k + B^k(P^\bullet)) = f_M^{k+1}(m^{k+1}) + B^{k+1}(\widetilde{M}^\bullet) =$$
$$H(f_M^{k+1})(m^{k+1} + B^{k+1}(M^\bullet)) = H(f_M^{k+1})\partial^k(p^k + B^k(P^\bullet)), \quad \text{Q.E.D.}$$