Лекция 8

Предснопове и асоцираност между снопове и предснопове.

1. Определение за предсноп. Предсноп от сечения на сноп.

Определение 8.1. *Фамилията*

$$\{S_U, \rho_{V,U}\}$$

от R-модули или F-алгебри S_U, индексирани с отворените подмножества U на топологично пространство X и хомоморфизмите $\rho_{V,U} : S_U \to S_V$ за отворени $V \subseteq U$ образува предсноп върху X, ако

$$\begin{tikzcd} S_U \arrow[r, "\rho_{V,U}"] \arrow[d, "\rho_{W,U}"'] & S_V \arrow[dl, "\rho_{W,V}"] \\ S_W & \end{tikzcd},$$

$\rho_{W,U} = \rho_{W,V}\rho_{V,U}$ *за* $\forall U \supseteq V \supseteq W$ *и* $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_{S_U}$ *за всяко отворено* U.

Примери 8.2. *(i) За всяко неотрицателно цяло n, сингулярните n-ковериги върху топологично пространство X образуват предсноп*

$$\{S^n(U,R), \rho_{V,U} = i^*_{V,U}\},$$

където $S^n(U,R) = Hom_R(S_n(U,R), R)$ са R-модулите на сингулярните n-ковериги върху отворените подмножества $U \subseteq X$. Да напомним, че R е комутативен пръстен с единица. За произволни отворени $V \subseteq U$, тъждественото влагане $i_{U,V} : V \to U$ индуцира хомоморфизъм $\rho_{V,U} = i^*_{U,V} : S^n(U,R) \to S^n(V,R)$. За произволни $U \supseteq V \supseteq W$ е в сила $i_{U,W} = i_{U,V}i_{V,W}$, така че $\rho_{W,U} = i^*_{U,W} = (i_{U,V}i_{V,W})^* = i^*_{V,W}i^*_{U,V} = \rho_{W,V}\rho_{V,U}$. Аналогично, $i_{U,U} = \mathrm{Id}_U$ води до $\rho_{U,U} = i^*_{U,U} = \mathrm{Id}^*_U = \mathrm{Id}_{S^n(U,R)}$.
(ii) За всяко неотрицателно цяло n е определен предснопът

$$\{S^n_\infty(U,R), \rho_{V,U} = i^*_{U,V}\}$$

на гладките сингулярни n-ковериги върху многообразие M.
(iii) Нека M е гладко многообразие, а U е отворено подмножество на M. В множеството $\mathfrak{C}^\infty(U)$ на гладките функции $f : U \to \mathbb{R}$ въвеждаме поточково събиране и умножение. За установяване на затвореността на $\mathfrak{C}^\infty(U)$ относно тези операции да фиксираме локални координати $x_1, \ldots, x_n$ върху U и да напомним, че $\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$ за $\forall f, g \in \mathfrak{C}^\infty(U)$. Сега с индукция по $k \in \mathbb{N}$, $(k-1)$-кратната диференцируемост на десните страни води до k-кратна диференцируемост на левите страни и доказва, че $f+g, fg \in \mathfrak{C}^\infty(U)$. Непосредствено се проверява, че $\mathfrak{C}^\infty(U)$ удовлетворява аксиомите за $\mathbb{R}$-алгебра, така че фамилията $\{\mathfrak{C}^\infty(U), \rho_{VU}\}$ с хомоморфизмите на ограничение $\rho_{VU} : \mathfrak{C}^\infty(U) \to \mathfrak{C}^\infty(V)$ за $\forall V \subseteq U$ образува предснопа на гладките функции върху M.

Определение 8.3. *Хомоморфизъм на предснопове над някакво топологично пространство X е фамилия*

$$\{\varphi_U\} : \{S_U, \rho_{V,U}\} \longrightarrow \{S'_U, \rho'_{V,U}\}$$

от хомоморфизми $\varphi_U : S_U \to S'_U$ на R-модули или F-алгебри, които са съгласувани с хомоморфизмите на ограничение, т.е.

$$\begin{tikzcd} S_U \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_{V,U}"'] & S'_U \arrow[d, "\rho'_{V,U}"'] \\ S_V \arrow[r, "\varphi_V"] & S'_V \end{tikzcd} ,$$

$\varphi_V \rho_{V,U} = \rho'_{V,U}\varphi_U$ *за* $\forall U \supseteq V$.
Изоморфизъм на предснопове над X е хомоморфизъм на предснопове $\{\varphi_U\}$, в който всички $\varphi_U : S_U \to S'_U$ са взаимно-еднозначни.

Ако $\{\varphi_U\} : \{S_U, \rho_{V,U}\} \to \{S'_U, \rho'_{V,U}\}$ е изоморфизъм на предснопове, то умножавайки $\varphi_V \rho_{V,U} = \rho'_{V,U}\varphi_U$ отляво с φ_V^{-1} и отдясно с φ_U^{-1} получаваме, че $\rho_{V,U}\varphi_U^{-1} = \varphi_V^{-1}\rho'_{V,U}$, така че $\{\varphi_U^{-1}\} : \{S'_U, \rho'_{V,U}\} \to \{S_U, \rho_{V,U}\}$ е също изоморфизъм на снопове.

Лема-Определение 8.4. *Нека $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е сноп от R-модули или F-алгебри над топологично пространство X. Тогава:*
(i) множествата $\Gamma_o(\mathfrak{S}, U)$ на прекъснатите сечения $\sigma : U \to \mathfrak{S}$ с $\pi\sigma = \mathrm{Id}_U$ и хомоморфизмите на ограничение

$$\rho_{V,U} : \Gamma_o(\mathfrak{S}, U) \longrightarrow \Gamma_o(\mathfrak{S}, V),$$

$$\rho_{V,U}\,(\sigma|_U) := \sigma|_V \ \ \text{за} \ U \supseteq V$$

образуват предснопа на прекъснатите сечения на $\mathfrak{S}$;
(ii) множествата $\Gamma(\mathfrak{S}, U)$ на непрекъснатите сечения $\sigma : U \to \mathfrak{S}$ с $\pi\sigma = \mathrm{Id}_U$ и хомоморфизмите на ограничение

$$\rho_{V,U} : \Gamma(\mathfrak{S}, U) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}, V),$$

$$\rho_{V,U}\,(\sigma|_U) := \sigma|_V \quad \text{за} \ U \supseteq V$$

образуват предснопа на непрекъснатите сечения на $\mathfrak{S}$. Понякога този предсноп се нарича асоциран с $\mathfrak{S}$.

Доказателство: Множествата $\Gamma_o(\mathfrak{S}, U)$ образуват R-модули или F-алгебри относно поточковите операции $(\sigma+\tau)(x) := \sigma(x)+\tau(x)$, $(r\sigma)(x) = r\sigma(x)$ и съответно $(\sigma\tau)(x) := \sigma(x)\tau(x)$ за $\sigma, \tau : U \to \mathfrak{S}$, $x \in U$. Съгласно затвореността на $\mathfrak{S}_x$ относно тези операции, получаваме $\pi(\sigma+\tau) = \mathrm{Id}_U$, $\pi(r\sigma) = \mathrm{Id}_U$, $\pi(\sigma\tau) = \mathrm{Id}_U$. Вземайки предвид непрекъснатостта на операциите в $\mathfrak{S}$, стигаме до извода, че $\Gamma(\mathfrak{S}, U)$ са също R-модули. При това,

$$\rho_{V,U}\left((\sigma+\tau)\,|_U\right) = (\sigma+\tau)|_V = \sigma|_V + \tau|_V = \rho_{V,U}\,(\sigma|_U) + \rho_{V,U}\,(\tau|_U)\,,$$

$$\rho_{V,U}\,(r\sigma|_U) = r\sigma|_V = r\rho_{V,U}\,(\sigma|_U) \quad \text{и}$$

$$\rho_{V,U}\,(\sigma\tau|_U) = \sigma\tau|_V = \sigma|_V\tau|_V = \rho_{V,U}\,(\sigma|_U)\,\rho_{V,U}\,(\tau|_U)\,,$$

така че ограниченията $\rho_{V,U}$ са хомоморфизми. Да отбележим, че хомоморфизмите на ограничение $\rho_{VU}(\sigma_U) := \sigma|_V$ за произволни $V \subseteq U$, $\sigma_U \in \Gamma(\mathfrak{S}, U)$ са индуцирани от влаганията $i_{UV} : V \to U$, т.е. $\rho_{VU}(\sigma_U) := \sigma_U i_{UV} : V \to \mathfrak{S}$. Още повече, ρ_{VU} изобразява $\Gamma(\mathfrak{S}, U)$ в $\Gamma(\mathfrak{S}, V)$. Очевидно $\rho_{W,U} = \rho_{W,V}\rho_{V,U}$ за $\forall U \supseteq V \supseteq W$ и $\rho_{U,U} = \mathrm{Id}_U$, Q.E.D.

2. Сноп, асоцииран с предсноп.

Бихме искали по всеки зададен предсноп $\{S_U, \rho_{V,U}\}$ от R-модули или F-алгебри да построим сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ от R-модули или F-алгебри, чийто асоцииран предсноп от сечения $\{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho_{V,U} = i^*_{U,V}\}$ съвпада с $\{S_U, \rho_{V,U}\}$. За целта, слоевете $\mathfrak{S}_x := \pi^{-1}(x)$ на $\mathfrak{S}$ трябва да се получат чрез "слепване"на всички S_U с $x \in U$ над точката x. Алгебричната конструкция на такова "слепване"се нарича директна граница.

Определение 8.5. *Множеството J е частично наредено, ако за някои $j, k \in J$ е определена релация $j \leq k$, която изпълнява свойствата:*
(i) рефлексивност, т.е. $j \leq j$ за $\forall j \in J$;
(ii) анти-симетричност - ако $j \leq k$ и $k \leq j$, то $j = k$;
(iii) транзитивност - ако $j \leq k$ и $k \leq l$, то $j \leq l$.

Определение 8.6. *Насочена система от индекси е частично наредено множество J, в което за $\forall j, k \in J$ съществува $l \in J$, така че $l \leq j$ и $l \leq k$.*

Лема 8.7. *Ако J е насочена система от индекси, то за произволни $j_1, \dots, j_m \in J$ съществува $j \in J$, така че $j \leq j_1, \dots, j \leq j_m$.*

Доказателство: Ще работим с индукция по m. За $m = 1$ твърдението е очевидно с $j := j_1$. За $m = 2$ съответното твърдение е включено в определението за насочена система от индекси. За произволно $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ да отбележим, че съществува $j' \in J$ с $j' \leq j_1$ и $j' \leq j_2$. Към системата $j', j_3, \dots, j_m \in J$ от $m - 1$ индекса прилагаме индукционното предположение и получаваме съществуването на $j \in J$ с $j \leq j' \leq j_1$, $j \leq j' \leq j_2$, $j \leq j_3, \dots, j \leq j_m$, Q.E.D.

Определение 8.8. *Насочена система от R-модули или F-алгебри е фамилия $\{A_j, \rho_{k,j}\}$ от R-модули или F-алгебри A_j, индексирани с насочена система от индекси J, така че за всички $j \leq k$ от J съществуват хомоморфизми $\rho_{j,k} : A_k \to A_j$, удовлетворяващи комутативните диаграми*

$$\begin{tikzcd}
A_l \arrow[r, "\rho_{k,l}"] \arrow[d, "\rho_{j,l}"'] & A_k \arrow[dl, "\rho_{j,k}"] \\
A_j &
\end{tikzcd}$$

за $\forall j \leq k \leq l$ и с $\rho_{j,j} = \mathrm{Id}_{A_j}$ за $\forall j \in J$.

Лема-Определение 8.9. *За всяка насочена система $\{A_j, \rho_{j,k}\}$ от R-модули или F-алгебри съществува единствен с точност до изоморфизъм R- модул или F-алгебра L и хомоморфизми $a_j : A_j \to L$, така че*

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "a_k"] \arrow[d, "\rho_{j,k}"'] & L \\
A_j \arrow[ur, "a_j"'] &
\end{tikzcd}$$

и за произволен R-модул или F-алгебра B с хомоморфизми $f_j : A_j \to B$, затварящи комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "\rho_{j,k}"'] & B \\
A_j \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

за $\forall k \geq j$, *съществува единствен хомоморфизъм* $f : L \to B$, *така че*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "a_j"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ L \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

за $\forall j \in J$.
Така определеният R*-модул или* F*-алгебра* L *се нарича директна граница на* A_j *и се бележи с* $\lim_{\to} A_j$.

Доказателство: Съществуване. Нека $L := \left(\coprod_{j \in J} A_j \right) / K$ е фактор-модулът или фактор-алгебрата на ко-произведението $\coprod_{j \in J} A_j$ по подмодула, съответно, идеала K, породен от елементите $x_k - \rho_{j,k}(x_k)$ за $\forall x_k \in A_k$, $\forall k \geq j$. Тук и навсякъде по-нататък отъждествяваме $x_k \in A_k$ с техните образи в $\coprod_{j \in J} A_j$. В случая на F-алгебри A_j, $j \in J$, фактор-пръстенът $L = \left(\coprod_{j \in J} A_j \right) / K$ съдържа в центъра си подпръстена $F^o := \cup_{j \in J} \left[(F_j + K) / K \right] \simeq F$. По-точно, по определението за насочена система от индекси, за произволни $j_1, j_2 \in J$ съществува $i \in J$, така че $i \leq j_1$ и $i \leq j_2$. Следователно $x_{j_s} + K = \rho_{i,j_s}(x_{j_s}) + K$ за $s = 1, 2$, откъдето $(x_{j_1} + K) - (x_{j_2} + K) = x_{j_1} - x_{j_2} + K = \rho_{i,j_1}(x_{j_1}) - \rho_{i,j_2}(x_{j_2}) + K \in (F_i + K)/K$ и $(x_{j_1} + K)(x_{j_2} + K) = x_{j_1} x_{j_2} + K = \rho_{i,j_1}(x_{j_1}) \rho_{i,j_2}(x_{j_2}) + K \in (F_i + K)/K$. С това проверихме, че F^o е подпръстен на L. Този подпръстен се съдържа в центъра на L, защото

$$(x_i + K) \left(\sum_{s=1}^{l} a_{j_s} + K \right) = (\rho_{i,j}(x_j) + K) \left(\sum_{s=1}^{l} \rho_{i,j_s}(a_{j_s}) + K \right) =$$

$$\rho_{i,j}(x_j) \left(\sum_{s=1}^{l} \rho_{i,j_s}(a_{j_s}) \right) + K = \left(\sum_{s=1}^{l} \rho_{i,j_s}(a_{j_s}) \right) \rho_{i,j}(x_j) + K = \left(\sum_{s=1}^{l} a_{j_s} + K \right) (x_j + K)$$

за $\forall x_j \in F_j$, $\forall a_{j_s} \in A_{j_s}$ и $i \leq j$, $i \leq j_s$ за $\forall 1 \leq s \leq l$.
В качеството си на хомоморфизми на F-алгебри, $\rho_{kj} : A_j \to A_k$ се ограничават до изоморфизми $\rho_{kj} : F_j \to F_k$ на полетата $F_j \subseteq Z(A_j)$, $F_k \subseteq Z(A_k)$ за всички $j \geq k$. Освен това, понятието насочена система $\{A_j, \rho_{kj}\}$ от F-алгебри изисква изоморфизмите $\varphi_j : F_j \to F$ да са съгласувани с ρ_{kj}, т.е.

$$\begin{tikzcd} F_j \arrow[d, "\rho_{kj}"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ F_k \arrow[r, "\varphi_k"] & F \end{tikzcd}$$

за $\forall j \geq k$. Твърдим, че

$$\varphi : F^o = \cup_{j \in J} \left[(F_j + K) / K \right] \longrightarrow F,$$

$$\varphi(x_j + K) := \varphi_j(x_j) \quad \text{ за } \forall x_j \in F_j$$

е изоморфизъм на пръстени, така че F^o е изоморфен екземпляр на полето F, съдържащ се в центъра $Z(L)$ и L е F-алгебра. Наистина, за събирането или умножението $\circ$ в L имаме

$$\varphi((x_i + K) \circ (x_j + K)) = \varphi((\rho_{li}(x_i) + K) \circ (\rho_{lj}(x_j) + K)) = \varphi(\rho_{li}(x_i) \circ \rho_{lj}(x_j) + K) =$$

$$\varphi_l(\rho_{li}(x_i) \circ \rho_{lj}(x_j)) = \varphi_l \rho_{li}(x_i) \circ \varphi_l \rho_{lj}(x_j) = \varphi_i(x_i) \circ \varphi_j(x_j) = \varphi(x_i + K) \circ \varphi(x_j) + K)$$

за $l \leq i$, $l \leq j$. При това, φ е взаимно-еднозначно, защото за $\forall x \in F$ съществува еднозначно определено $\varphi_j^{-1}(x) \in F_j$ и $\varphi_i^{-1}(x) + K = \varphi_j^{-1}(x) + K$, доколкото

за всяко $l \leq i$, $l \leq j$ е в сила $\varphi_l \rho_{li} \varphi_i^{-1}(x) = \varphi_i \varphi_i^{-1}(x) = x$. Следователно $\rho_{li}\varphi_i^{-1}(x) = \varphi_l^{-1}(x)$ и $\varphi_i^{-1}(x) + K = \rho_{li}\varphi_i^{-1}(x) + K = \varphi_l^{-1}(x) + K$.
Композициите на каноничните мономорфизми $A_j \to \coprod_{j \in J} A_j$ с естествения епиморфизъм $\pi_K : \coprod_{j\in J} A_j \to \left(\coprod_{j\in J} A_j\right)/K = L$ дават хомоморфизми $a_j : A_j \to L$. Непосредствено проверяваме, че

$$\begin{tikzcd} A_l \arrow[d, "\rho_{j,l}"'] \arrow[dr, "a_l"] & \\ A_j \arrow[r, "a_j"] & L \end{tikzcd},$$

$a_j \rho_{j,k} = a_k$ за $k \geq j$. Наистина, $(a_j\rho_{j,l} - a_l)(x_l) = \pi_K \rho_{j,l}(x_l) - \pi_K(x_l) = \pi_K(\rho_{j,l}(x_l) - x_l) = 0_L$ за $\forall x_l \in A_l$, така че $a_j\rho_{j,l} - a_l = 0$.
Нека сега $f_j : A_j \to B$ са хомоморфизми, съгласувани с $\rho_{j,k}$, т.е.

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[d, "\rho_{j,k}"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ A_j \arrow[r, "f_j"] & B \end{tikzcd},$$

$f_j \rho_{j,k} = f_k$ за $\forall k \geq j$. Тогава по универсалното свойство на ко-произведението $\coprod_{j\in J} A_j$ съществува единствен хомоморфизъм $\widetilde{f} : \coprod_{j\in J} A_j \to B$, затварящ комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r] \arrow[d, "f_j"'] & \coprod\limits_{j\in J} A_j \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

за $\forall j \in J$. Твърдим, че K се съдържа в ядрото на $\widetilde{f}$. Наистина, $\widetilde{f}|_{A_j} = f_j$, така че $\widetilde{f}(x_k - \rho_{j,k}(x_k)) = \widetilde{f}(x_k) - \widetilde{\rho}_{j,k}(x_k) = f_k(x_k) - f_j\rho_{j,k}(x_k) = 0$ съгласно $f_j\rho_{j,k} = f_k$ за $\forall k \geq j$. Следователно $\widetilde{f}$ има единствено пропускване до хомоморфизъм $f : \left(\coprod_{j\in J} A_j\right)/K = L \to B$, така че

$$\begin{tikzcd} \coprod\limits_{j\in J} A_j \arrow[d, "\pi_K"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ L \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}.$$

Остава да проверим комутативността на диаграмите

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "a_j"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ L \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd},$$

$fa_j = f_j$ за $\forall j \in J$. За целта да отбележим, че $fa_j(x_j) = f\pi_K(x_j) = \widetilde{f}(x_j) = f_j(x_j)$. С това установихме, че $L = \left(\coprod_{j\in J} A_j\right)/K$ изпълнява необходимите свойства.

Единственост. Нека L и L' изпълняват условията от лемата. Тогава универсалното свойство на L предоставя комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "a_j"'] \arrow[dr, "a'_j"] & \\ L \arrow[r, "f"] & L' \end{tikzcd} ,$$

а универсалното свойство на дава

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "a'_j"'] \arrow[dr, "a_j"] & \\ L' \arrow[r, "f'"] & L \end{tikzcd} .$$

Съединявайки тези диаграми получаваме

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[d, "a_j"'] \arrow[dr, "a_j"] & \\ L \arrow[r, "f'f"] & L \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A'_j \arrow[d, "a'_j"'] \arrow[dr, "a'_j"] & \\ L' \arrow[r, "ff'"] & L' \end{tikzcd}$$

съгласно $f'fa_j = f'a'_j = a_j$ и $ff'a'_j = fa_j = a'_j$. Оттук, използвайки единствеността на хомоморфизмите $L \to L$ и $L' \to L'$ от тези диаграми, стигаме до заключението, че $f'f = \mathrm{Id}_L$ и $ff' = \mathrm{Id}_{L'}$. С други думи, $f : L \to L'$ и $f' : L' \to L$ са изоморфизми на R-модули или F-алгебри, Q.E.D.

Лема 8.10. *Нека $\{S_U, \rho_{V,U}\}$ е предсноп над топологично пространство X, $\widetilde{\mathfrak{S}}$ е непресичащо се обединение $\widetilde{\mathfrak{S}} := \cup_{U\subseteq X} U \times S_U$ по всички отворени подмножества $U \subseteq X$, а*

$$\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathfrak{S}} = \cup_{U\subseteq X} U \times S_U \longrightarrow X,$$

$$\widetilde{\pi}(x, s) := x$$

е проекцията върху X. Тогава фамилията $\{V \times s\}_{V\subseteq U, s\in S_U}$ е база на топология върху $\widetilde{\mathfrak{S}}$, относно която $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathfrak{S}} \to X$ е локален хомеоморфизъм и алгебричните операции в $\widetilde{\mathfrak{S}}$ са непрекъснати.

Доказателство: Посочените подмножества $U \times s$ покриват $\widetilde{\mathfrak{S}}$, доколкото $\widetilde{\mathfrak{S}} = \cup_{U\subseteq X} \cup_{s\in S_U} U \times s$. Множествата $V_1 \times s_1$ и $V_2 \times s_2$ се пресичат точно когато съществува отворено подмножество $U \subseteq X$, съдържащо V_1 и V_2, а $s_1 = s_2 \in S_U$. Следователно $\{V \times s\}_{UV\subseteq XU, s\in S_U}$ образува база на топология върху $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

Проекцията $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathfrak{S}} \to X$ е непрекъсната, доколкото за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ праобразът $\widetilde{\pi}^{-1}(U) = \cup_{V\subseteq U} V \times S_V = \cup_{V\subseteq U} \cup_{s\in S_V} V \times s$ е отворен в $\widetilde{\mathfrak{S}}$. Аналогично, $\widetilde{\pi}$ е отворено, защото за всяко отворено подмножество $\cup_U \cup_{s\in S_U} U \times s$ на $\widetilde{\mathfrak{S}}$ образът $\widetilde{\pi}\left(\cup_U \cup_{s\in S_U} U \times s\right) = \cup U$ е отворен в X. Накрая, $\widetilde{\pi}$ е локален хомеоморфизъм, защото всяка точка $(x, s) \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ принадлежи на някое от множествата $U \times S_U$ и има околност $U \times s$ в $\widetilde{\mathfrak{S}}$, върху която $\widetilde{\pi} : U \times s \to U$ е хомеоморфизъм.

За непрекъснатостта на операциите в $\widetilde{\mathfrak{S}}$, нека $r \in R$ или $r \in F$, а $\mu_{r,S_U} : U \times S_U \to U \times S_U$, $\mu_{r,S_U}(x, s) := (x, rs)$ са умноженията с r върху S_U. Тогава умножението $\widetilde{\mu_r} : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \widetilde{\mathfrak{S}}$ с r върху слоя на $\widetilde{\pi}$ се задава чрез ограниченията $\widetilde{\mu_r}|_{U\times S_U} := \mu_{r,S_U}|_{U\times S_U}$. Всяко отворено подмножество $\cup_{U,s} U \times s \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$ има отворен праобраз

$$\widetilde{\mu_r}\,(\cup_{U,s}U \times s) = \cup_{U,s}\mu_{r,S_U}^{-1}(U \times s) = \cup_{U,s}\cup_{s' \in \mu_{r,S_U}^{-1}} U \times s' \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}.$$

За непрекъснатостта на послойното събиране или умножение $\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}$ в $\widetilde{\mathfrak{S}}$, да разгледаме диагонала

$$\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}) := \{((x,s_1),(x,s_2)) \in \widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}} \,|\, s_1,s_2 \in S_U, x \in U\}$$

и изображението

$$\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}} : \Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{S}},$$

$$\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}((x,s_1),(x,s_2)) := (x, s_1 \circ_{S_U} s_2) \quad \text{за } x \in U,\ s_1,s_2 \in S_U,$$

където $\circ_{S_U} : S_U \to S_U$ е съответната операция в S_U. За произволно отворено подмножество $\cup_{U,s}U \times s \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$ да отбележим, че

$$\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}^{-1}(\cup_{U,s}U \times s) = \cup_{U,s} \circ_{S_U}^{-1}(U \times s) =$$

$$\cup_{U,s}\Delta\left(\cup_{s_1 \circ_{S_U} s_2 = s}(U \times s_1) \times (U \times s_2)\right) = \Delta\left(\cup_{U,s}\cup_{s_1 \circ_{S_U} s_2 = s}(U \times s_1) \times (U \times s_2)\right)$$

е отворено подмножество на $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$, доколкото $\cup_{U,s}\cup_{s_1 \circ_{S_U} s_2 = s}(U \times s_1) \times (U \times s_2)$ е отворено в $\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}$ относно топологията на произведение, а отворените подмножества на $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$ са сеченията $V \cap \Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$ с отворените $V \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}$. Това доказва непрекъснатостта на $\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}$, Q.E.D.

Лема 8.11. *В произволен предсноп $\{S_U, \rho_{V,U}\}$ над топологично пространство X, подфамилиите*

$$\{S_U, \rho_{V,U}\}_{x \in U},$$

индексирани с околностите на фиксирана точка $x \in X$ образуват насочени системи от R-модули или F-алгебри, така че съществуват еднозначно определени с точност до изоморфизъм директни граници

$$\mathfrak{S}_x := \varinjlim S_U$$

и хомоморфизми $a_U^x : S_U \to \mathfrak{S}_x$ за $\forall U \ni x$.

Доказателство: Достатъчно е да установим, че околностите U_x на фиксирана точка $x \in X$ образуват насочена система от индекси относно теоретико-множественото включване. Наистина, гореспоменатата фамилия е частично наредено множество, защото $U_x \subseteq U_x$ за всяка околност $x \in U_x \subseteq X$. От $U_x \subseteq V_x$ и $V_x \subseteq U_x$ следва $U_x = V_x$, а от $U_x \supseteq V_x$ и $V_x \supseteq W_x$ получаваме $U_x \supseteq W_x$. Накрая, за произволни околности U_x и V_x на x върху X съществува околност $U_x \cap V_x \subseteq U_x$, $U_x \cap V_x \subseteq UV_x$, Q.E.D.

Твърдение 8.12. *Нека $\{S_U, \rho_{V,U}\}$ е предсноп върху топологично пространство X, а*

$$a : \widetilde{\mathfrak{S}} = \cup_{U \subseteq X} U \times S_U \longrightarrow \mathfrak{S} := \cup_{x \in X}\mathfrak{S}_x,$$

$$a(x,s) := a_U^x(s) \quad \text{за } a_U^x : S_U \longrightarrow \mathfrak{S}_x,\ (x,s) \in U \times S_U$$

в означенията на Лема 8.10 и Лема 8.11. Тогава фактор-топологията върху $\mathfrak{S}$, индуцирана от a и проекцията

$$\pi : \mathfrak{S} = \cup_{x \in X}\mathfrak{S}_x \longrightarrow X,$$

$$\pi(s_x) = x \quad \text{за } \forall s_x \in \mathfrak{S}_x,$$

превръщат $\mathfrak{S}$ в сноп над X.

Казваме, че снопът $\mathfrak{S}$ е асоциран с предснопа $\{S_U, \rho_{V,U}\}$.

Доказателство: Да отбележим, че изображението a е коректно зададено, доколкото $\widetilde{\mathfrak{S}}$ е определено като непресичащо се обединение на $U \times S_U$ по всички отворени подмножества $U \subseteq X$ и всяка точка $(x,s) \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ принадлежи на единствено произведение $U \times S_U$. Още повече, $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ е изображение на топологичното пространство $\widetilde{\mathfrak{S}}$ върху множеството $\mathfrak{S}$. Наистина, всеки елемент на $\mathfrak{S}$ принадлежи на $\mathfrak{S}_x = \lim_{\to} S_U = \coprod_{x\in U} S_U/K_x$ за някоя точка $x \in X$ и има вида $s_x = s_{U_1} + \ldots + s_{U_m} + K_x$ за някои $s_{U_j} \in S_{U_j}$, $x \in U_j$. Тук K_x е R-подмодулът или F-подалгебрата на $\coprod_{x\in U} S_U$, породена от елементите $s_U - \rho_{V,U}(s_U)$ за $\forall U \supseteq V \ni x$, $s_U \in S_U$. Съгласно Лема 8.7, съществува околност U на x върху X, така че $U \subseteq U_j$ за всички $1 \leq j \leq m$. Тогава $s_{U_j} - \rho_{U,U_j}(s_{U_j}) = \kappa_j \in K_x$, откъдето

$$s_x = \sum_{j=1}^{m} [\rho_{U,U_j}(s_{U_j}) + \kappa_j] + K_x = \sum_{j=1}^{m} \rho_{U,U_j}(s_{U_j}) + K_x = s_U + K_x$$

за $s_U := \sum_{j=1}^{m} \rho_{U,U_j}(s_{U_j}) \in S_U$. От последното представяне става ясно, че $s_x = a_U^x(s_U) = a(x, s_U)$ за $(x, s_U) \in U \times S_U \subset \widetilde{\mathfrak{S}}$. Следователно $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ изобразява $\widetilde{\mathfrak{S}}$ върху $\mathfrak{S}$ и въведената в Лема 8.10 топология върху $\widetilde{\mathfrak{S}}$ индуцира еднозначно определена фактор-топология върху $\mathfrak{S}$. Непосредствено се убеждаваме в наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & \mathfrak{S} \arrow[dl, "\pi"] \\
X &
\end{tikzcd},$$

съгласно $\pi a(x,s) = \pi a_U^x(s) = x = \widetilde{\pi}(x,s)$ за $\forall (x,s) \in \widetilde{\mathfrak{S}}$. За проверка на непрекъснатостта на π, да отбележим, че произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ има отворен праобраз $\widetilde{\pi}^{-1}(U) \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$, благодарение на непрекъснатостта на $\widetilde{\pi}$. Поточно, замествайки $\widetilde{\pi} = \pi a$ получаваме, че $(\pi a)^{-1}(U) = a^{-1}\pi^{-1}(U)$ е отворено в $\widetilde{\mathfrak{S}}$. Съгласно определението за фактор-топология, $\pi^{-1}(U)$ е отворено в $\mathfrak{S}$. За да установим, че π е отворено изображение, да изберем отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{S}$ и да отбележим, че неговият отворен праобраз $a^{-1}(V) \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$ се изобразява в отворено подмножество $\widetilde{\pi} a^{-1}(V) = \pi a a^{-1}(V) = \pi(V) \subseteq X$, съгласно отвореността на $\widetilde{\pi}$. Още повече, $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е локален хомеоморфизъм. За целта да напомним от Лема 8.10, че $\widetilde{\pi}$ е локален хомеоморфизъм, така че всяка точка $(x,s) \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ има околност $W_{(x,s)} \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$, върху която $\widetilde{\pi}$ се ограничава до хомеоморфизъм $\widetilde{\pi} : W_{(x,s)} \to \widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$. В комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
W_{(x,s)} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & a(W_{(x,s)}) \arrow[dl, "\pi"] \\
\widetilde{\pi}(W_{(x,s)}) &
\end{tikzcd}$$

с взаимно-еднозначно $\widetilde{\pi} = \pi a$, ограниченията $a|_{W_{(x,s)}}$ и $\pi|_{a(W_{(x,s)})}$ са взаимно-еднозначни. Още повече, π е непрекъснато и отворено, откъдето следва равенството $a(W_{(x,s)}) = \pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$ и $\pi : a(W_{(x,s)}) \to \widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$ е хомеоморфизъм. Сега за всяка точка $s_x \in \mathfrak{S}$ избираме праобраз $(x,s) \in a^{-1}(s_x)$ и околност $W_{(x,s)}$ на (x,s) върху $\widetilde{\mathfrak{S}}$, така че $\widetilde{\pi}|_{W_{(x,s)}}$ е хомеоморфизъм. Тогава $\pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$ е околност на $s_x \in \pi^{-1}(x) = \pi^{-1}\widetilde{\pi}(x,s)$ в $\mathfrak{S}$, върху която π се ограничава до хомеоморфизъм $\pi : \pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{(x,s)}) \to \widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$. Следователно $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е локален хомеоморфизъм.

От определението за фактор-топология върху $\mathfrak{S}$ посредством изображението $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ върху $\mathfrak{S}$ следва непрекъснатостта на a. Твърдим, че a е отворено. За целта да разгледаме произволно отворено подмножество $W \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}}$ и да го представим като (евентуално пресичащо се) обединение $W = \cup_{(x,s)\in W} W_{(x,s)}$ на околности $W_{(x,s)}$ на (x,s) в W, върху които $\widetilde{\pi}$ се ограничава до хомеоморфизми $\widetilde{\pi} : W_{(x,s)} \to \widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$. След ляво умножение на $\pi a|_{W_{(x,s)}} = \widetilde{\pi}|_{W_{(x,s)}}$ с $\pi^{-1}|_{\widetilde{\pi}(W_{(x,s)})}$ получаваме $a|_{W_{(x,s)}} = \pi^{-1}\widetilde{\pi}|_{W_{(x,s)}}$. В резултат,

$$a(W) = a\left(\cup_{(x,s)\in W} W_{(x,s)}\right) = \cup_{(x,s)\in W} a(W_{(x,s)}) = \cup_{(x,s)\in W} \pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{(x,s)})$$

се оказва отворено подмножество на $\mathfrak{S}$.

По определение, директните граници $\mathfrak{S}_x := \lim_{\to} S_U$ по околностите U на x върху X са R-модули или, съответно, F-алгебри. Остава да докажем непрекъснатостта на операциите в $\mathfrak{S}$. За целта да напомним непрекъснатостта на алгебричните операции в $\widetilde{\mathfrak{S}}$, установена в Лема 8.10. Умноженията $\widetilde{\mu_r} : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \widetilde{\mathfrak{S}}$ и $\mu_r : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ с $r \in R$ или $r \in F$ са свързани посредством комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[r, "\widetilde{\mu_r}"] \arrow[d, "a"'] & \widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[d, "a"'] \\ \mathfrak{S} \arrow[r, "\mu_r"] & \mathfrak{S} \end{tikzcd} .$$

Наистина, за всяка точка $(x, s_U) \in U \times S_U$ е в сила

$$a\widetilde{\mu_r}(x, s_U) = a(x, rs_U) = a_U^x(rs_U) = ra_U^x(s_U) = \mu_r a(x, s_U).$$

За произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{S}$ твърдим, че $\mu_r^{-1}(U) \subseteq \mathfrak{S}$ е отворено. Съгласно определението за фактор-топология върху $\mathfrak{S}$, достатъчно е да отбележим, че $a^{-1}\mu_r^{-1}(U) = (\mu_r a)^{-1}(U) = (a\widetilde{\mu_r})(U) = \widetilde{\mu_r}^{-1} a^{-1}(U)$ е отворено подмножество на $\widetilde{\mathfrak{S}}$, съгласно непрекъснатостта на a (или все едно, определението за фактор-топология върху $\mathfrak{S}$) и непрекъснатостта на $\widetilde{\mu_r}$. Аналогично, за събирането или умножението $\circ_{\mathfrak{S}}$ в $\mathfrak{S}$ е в сила комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}) \arrow[r, "\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}"] \arrow[d, "(a,a)"'] & \widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[d, "a"'] \\ \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \arrow[r, "\circ_{\mathfrak{S}}"] & \mathfrak{S} \end{tikzcd} .$$

С други думи, за произволна точка $((x, s_U), (x, s'_U)) \in \Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$, $x \in U$ от диагонала $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$ е изпълнено

$$a \circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}} ((x, s_U), (x, s'_U)) = a(x, s_U \circ_{S_U} s'_U) = a_U^x(s_U \circ_{S_U} s'_U) = a_U^x(s_U) \circ_{\mathfrak{S}_x} a_U^x(s'_U) =$$
$$\circ_{\mathfrak{S}}(a_U^x(s_U), a_U^x(s'_U)) = \circ_{\mathfrak{S}}(a(x, s_U), a(x, s'_U)) = \circ_{\mathfrak{S}}(a, a)((x, s_U), (x, s'_U)),$$

където $\circ_{S_U} : S_U \times S_U \to S_U$ е съответната операция в S_U. За произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{S}$ твърдим, че $\circ_{\mathfrak{S}}^{-1}(U)$ е отворено в $\Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})$. Наистина, $(a,a)^{-1} \circ_{\mathfrak{S}}^{-1} (U) = (\circ_{\mathfrak{S}}(a,a))^{-1}(U) = (a\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}})^{-1}(U) = \circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}^{-1} a^{-1}(U)$ е отворено подмножество на $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$, съгласно непрекъснатостта на a и $\circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}$. Твърдим, че (a,a) се ограничава до отворено изображение

$$(a,a) : \Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}) \to \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}).$$

Наистина, всяко отворено подмножество на $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}})$ е от вида $\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}) \cap V$ за отворено подмножество $V \subseteq \widetilde{\mathfrak{S}} \times \widetilde{\mathfrak{S}}$. Непосредствено се вижда, че $(a,a)(\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}} \times$

$\widetilde{\mathfrak{S}})\cap V) \subseteq \Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})\cap(a,a)(V)$. Обратно, $\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})\cap(a,a)V \subseteq (a,a)(\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}}\times\widetilde{\mathfrak{S}})\cap V)$, защото a изобразява $\widetilde{\mathfrak{S}}$ в $\mathfrak{S}$ и всеки елемент от ядрото на хомоморфизъм на директна граница се анулира в някаква околност $x \in W' \subseteq W$. Следователно $(a,a)(\Delta(\widetilde{\mathfrak{S}}\times\widetilde{\mathfrak{S}})\cap V) = \Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})\cap(a,a)(V)$ е отворено подмножество на $\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})$, защото $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ е отворено а оттам и $(a,a) : \widetilde{\mathfrak{S}}\times\widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}\times\mathfrak{S}$ е отворено относно топологиите на произведение. В резултат, $\circ_{\mathfrak{S}}^{-1}(U) = (a,a)[(a,a)^{-1} \circ_{\widetilde{\mathfrak{S}}}^{-1} (U)]$ е отворено подмножество на $\Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})$, Q.E.D.
Следващото твърдение установява, че съответствието между снопове и предснопове е съгласувано с хомоморфизмите на тези обекти.

Твърдение 8.13. *(i) Всеки хомоморфизъм на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ над топологично пространство X индуцира хомоморфизъм*

$$\{f_U\} : \{\Gamma_0(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU}\} \longrightarrow \{\Gamma_0(\mathfrak{T}, U), \rho'_{VU}\},$$

$$f_U(\sigma_U) := f\sigma_U \quad \text{за } \sigma_U \in \Gamma_0(\mathfrak{S}, U)$$

на съответните предснопове от прекъснати сечения, който се ограничава до хомоморфизъм

$$\{f_U\} : \{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{T}, U), \rho'_{VU}\}$$

на предсноповете от (непрекъснати) сечения.
(ii) Всеки хомоморфизъм

$$\{\varphi_U\} : \{S_U, \rho_{VU}\} \longrightarrow \{T_U, \rho'_{VU}\}$$

на предснопове над топологично пространство X индуцира хомоморфизъм на асоциираните снопове

$$\varphi : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{T},$$

$$\varphi(a_U^x(s_U)) := b_U^x(\varphi_U(\sigma_U)),$$

където $a_U^x : S_U \to \mathfrak{S}_x = \lim_{\to} S_U$ и $b_U^x : T_U \to \mathfrak{T}_x = \lim_{\to} T_U$ са каноничните хомоморфизми на съответните директни граници.

Доказателство: (i) Всяко прекъснато сечение $\sigma_U : U \to \mathfrak{S}$ определя изображение $f\sigma_U : U \to \mathfrak{T}$. Да напомним, че хомоморфизмът на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е съгласуван с проекциите $\pi_1 : \mathfrak{S} \to X$ и $\pi_2 : \mathfrak{T} \to X$, т.е.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

Следователно $\pi_2 f\sigma_U = \pi_1\sigma_U = \mathrm{Id}_U$ и $f_U(\sigma_U) = f\sigma_U \in \Gamma_0(\mathfrak{T}, U)$. Ще проверим, че $f_U : \Gamma_0(\mathfrak{S}, U) \to \Gamma_0(\mathfrak{T}, U)$ са хомоморфизми на R-модули или F-алгебри. Наистина,

$$f_U(r\sigma_U) = f(r\sigma_U) = r(f\sigma_U) = rf_U(\sigma_U)$$

за $\forall r \in R$ или $\forall r \in F$ и $\forall \sigma_U \in \Gamma_0(\mathfrak{S}, U)$, доколкото f се ограничава до хомоморфизъм на R-модули или F-алгебри върху всеки слой на $\mathfrak{S}$. Аналогично, за събирането или умножението $\circ_{\mathfrak{S}}$ в $\mathfrak{S}$, съответно, $\circ_{\mathfrak{T}}$ в $\mathfrak{T}$ имаме

$$f_U(\sigma_U \circ_{\mathfrak{S}} \tau_U) = f(\sigma_U \circ_{\mathfrak{S}} \tau_U) = f(\sigma_U) \circ_{\mathfrak{T}} f(\tau_U) = f_U(\sigma_U) \circ_{\mathfrak{T}} f_U(\tau_U),$$

където под операциите върху сечения се разбират операциите върху образите на точка под тяхното действие.
Трябва да установим съвместимостта на така определените хомоморфизми $f_U : \Gamma_0(\mathfrak{S}, U) \to \Gamma_0(\mathfrak{T}, U)$ с хомоморфизмите на ограничение $\rho_{VU} : \Gamma_0(\mathfrak{S}, U) \to$

$\Gamma_0(\mathfrak{S}, V)$ и $\rho'_{VU} : \Gamma_0(\mathfrak{T}, U) \to \Gamma_0(\mathfrak{T}, V)$. По-точно, твърдим комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} \Gamma_0(\mathfrak{S}, U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_{VU}"'] & \Gamma_0(\mathfrak{T}, U) \arrow[d, "\rho'_{VU}"'] \\ \Gamma_0(\mathfrak{S}, V) \arrow[r, "f_V"] & \Gamma_0(\mathfrak{T}, V) \end{tikzcd} .$$

За $\forall \sigma_U \in \Gamma_0(\mathfrak{S}, U)$ проверяваме непосредствено, че

$$\rho'_{VU} f_U(\sigma_U) = \rho'_{VU} f \sigma_U = (f\sigma_U)|_V = f\left(\sigma_U|_V\right) = f\rho_{VU}(\sigma_U) = f_V(\rho_{VU}(\sigma_U)).$$

С горните разглеждания доказахме, че така зададената фамилия от хомоморфизми

$$\{f_U\} : \{\Gamma_0(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU}\} \longrightarrow \{\Gamma_0(\mathfrak{T}, U), \rho'_{VU}\}$$

е хомоморфизъм на предсноповете от прекъснати сечения. Да отбележим, че всяко непрекъснато сечение $\sigma_U \in \Gamma(\mathfrak{S}, U)$ се трансформира в непрекъснато сечение $f_U(\sigma_U) = f\sigma_U \in \Gamma(\mathfrak{T}, U)$, доколкото хомоморфизмът на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е непрекъснат. Следователно хомоморфизмът на предсноповете от прекъснатите сечения се ограничава до хомоморфизъм на предсноповете от непрекъснатите сечения.

(ii) Да разгледаме непресичащите се обединения $\widetilde{\mathfrak{S}} := \cup_{U\subseteq X} U \times S_U$ и $\widetilde{\mathfrak{T}} := \cup_{U\subseteq X} U \times T_U$ по всички отворени подмножества $U \subseteq X$ и изображението

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathfrak{S}} = \cup_{U\subseteq X} U \times S_U \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{T}} = \cup_{U\subseteq X} U \times T_U,$$

$$\widetilde{\varphi}(x, s) := (x, \varphi_U(s)) \quad \text{за } (x, s) \in U \times S_U.$$

Относно топологията на $\widetilde{\mathfrak{S}}$ с база $\{U \times s\}_{U,s}$ и топологията на $\widetilde{T}$ с база $\{U \times t\}_{U,t}$, където U пробягва отворените подмножества на X, $s \in S_U$, $t \in T_U$, изображението $\widetilde{\varphi}$ е непрекъснато и отворено. Наистина, $\widetilde{\varphi}^{-1}\left(\cup_{U,t} U \times t\right) = \cup_{U,t} U \times \varphi_U^{-1}(t) = \cup_{U,t} \cup_{s\in\varphi_U^{-1}(t)} U \times s$ е отворено в $\widetilde{\mathfrak{S}}$ и $\widetilde{\varphi}\left(\cup_{U,s} U \times s\right) = \cup_{U,s} U \times \varphi_U(s)$ е отворено в $\widetilde{\mathfrak{T}}$. Да напомним, че снопът $\mathfrak{S}$, асоциран с предснопа $\{S_U, \rho_{VU}\}$ се определя като послойна директна граница на $\widetilde{\mathfrak{S}}$. По-точно, фамилиите от естествени епиморфизми на директните граници образуват непрекъснато и отворено изображение $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$, съгласувано с проекциите,

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\widetilde{\pi_1}"'] & \mathfrak{S} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ X & \end{tikzcd}$$

(виж Твърдение 8.12). Аналогично, да разгледаме комутативната диаграма от локални хомеоморфизми

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{T}} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\widetilde{\pi_2}"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Търсим непрекъснато и отворено изображение $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, съгласувано с проекциите $\pi_1 : \mathfrak{S} \to X$, $\pi_2 : \mathfrak{T} \to X$ и ограничаващо се до хомоморфизми

$\varphi : \mathfrak{S}_x \to \mathfrak{T}_x$ на всички слоеве. Определянето на φ се извършва така, че да изпълнява комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{S}} = \cup_{U\subseteq X} U \times S_U \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "a"'] & \cup_{U\subseteq X} U \times T_U = \widetilde{\mathfrak{T}} \arrow[d, "b"] \\ \mathfrak{S} = \cup_{x\in X} \mathfrak{S}_x \arrow[r, "\varphi"] & \cup_{x\in X} \mathfrak{T}_x = \mathfrak{T} \end{tikzcd}.$$

В означенията от Твърдение 8.12, всяко $s \in \mathfrak{S}_x$ е от вида $s = a_U^x(s_U)$ за някое отворено подмножество $U \subseteq X$, съдържащо x и $s_U \in S_U$. Полагаме

$$\varphi(s_U) := b_U^x \varphi(x, s_U) = b_U^x \varphi_U(s_U) \in \mathfrak{T}_x.$$

Коректността на това определение изисква проверката на $b_U^x \varphi_U(s_U) = b_{U'}^x \varphi_{U'}(s_{U'})$ за произволно отворено подмножество $x \in U' \subseteq X$. Нека V е отворено подмножество на X с $x \in V \subseteq U \cap U'$. Ако $\rho'_{VU} : T_U \to T_V$ е съответният хомоморфизъм на ограничение на $\{T_U, \rho'_{VU}\}$, то $b_U^x \varphi_U(s_U) = b_V^x \rho'_{VU} \varphi_U(s_U) = b_V^x \varphi_V \rho_{VU}(s_U)$ съгласно $b_U^x = b_V^x \rho'_{VU}$ и комутирането $\rho'_{VU}\varphi_U = \varphi_V \rho_{VU}$ на хомоморфизмите φ_U с хомоморфизмите на ограничение. Да напомним, че $a_U^x = a_V^x \rho_{VU}$, така че от $a_U^x(s_U) = a_{U'}^x(s_{U'})$ следва, че $a_V^x \rho_{VU}(s_U) = a_V^x \rho_{VU'}(s_{U'})$. Ако $K_x^{\mathfrak{S}}$ е ядрото на естествения епиморфизъм $\coprod_{x\in U} S_U \to \mathfrak{S}_x$, а $K_x^{\mathfrak{T}}$ е ядрото на естествения епиморфизъм $\coprod_{x\in U} T_U \to \mathfrak{T}_x$, то $\rho_{VU'}(s_{U'}) = \rho_{VU}(s_U) + k_x^{\mathfrak{S}}$ за $k_x^{\mathfrak{S}} \in K_x^{\mathfrak{S}}$ и $\varphi_V \rho_{VU'}(s_{U'}) = \varphi_V \rho_{VU}(s_U) + \widetilde{\varphi}\left(k_x^{\mathfrak{S}}\right)$. Произволен пораждащ $s_U - \rho_{VU}(s_U)$ на $K_x^{\mathfrak{S}}$ се трансформира от $\widetilde{\varphi}$ в пораждащия $\widetilde{\varphi}(s_U - \rho_{VU}(s_U)) = \varphi_U(s_U) - \varphi_V \rho_{VU}(s_U) = \varphi_U(s_U) - \rho'_{VU}\varphi_U(s_U)$ на $K_x^{\mathfrak{T}}$. Следователно $\widetilde{\varphi}\left(K_x^{\mathfrak{S}}\right) \subseteq K_x^{\mathfrak{T}}$ и $b_V^x \varphi_V \rho_{VU'}(s_{U'}) = b_V^x \varphi_V \rho_{VU}(s_U)$. Това доказва коректността на определението на φ. Непосредствено се вижда, че φ трансформира слоя $\mathfrak{S}_x$ на $\mathfrak{S}$ над $x \in X$ в слоя $\mathfrak{T}_x$ на $\mathfrak{T}$ над x, така че $\pi_2 varphi = \pi_1$. От диаграмата

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathfrak{S}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "a"'] & \widetilde{\mathfrak{T}} \arrow[d, "b"] \\ \mathfrak{S} \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{T} \end{tikzcd}$$

следва непрекъснатостта и отвореността на φ. По-точно, всяко отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{T}$ има отворен праобраз $\varphi^{-1}(V)$, доколкото във фактор-топологията, определена от a върху $\mathfrak{S}$ отвореността на $\varphi^{-1}(V)$ е еквивалентна на отвореността на $a^{-1}\varphi^{-1}(V) = (\varphi a)^{-1}(V) = (b\widetilde{\varphi})^{-1}(V) = \widetilde{\varphi}^{-1} b^{-1}(V)$ в $\widetilde{\mathfrak{S}}$. Последното множество е отворено съгласно непрекъснатостта на b и $\widetilde{\varphi}$. Аналогично, всяко отворено $U \subseteq \mathfrak{S}$ се изобразява върху отвореното подмножество $\varphi(U) = \varphi a a^{-1}(U) = b\widetilde{\varphi} a^{-1}(U) \subseteq \mathfrak{T}$, защото $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ е непрекъснато изображение върху $\mathfrak{S}$, а $\widetilde{\varphi}$ и b са отворени. С това установихме, че $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е морфизъм на снопове.

Накрая да отбележим, че φ се ограничава до хомоморфизми $\varphi : \mathfrak{S}_x \to \mathfrak{T}_x$ на слоевете, доколкото в определението $\varphi(a_U^x(s_U)) = b_U^x \varphi_U(s_U)$ участват хомоморфизмите a_U^x, b_U^x и φ_U. По-точно, за събирането или умножението $\circ$ е в сила

$$\varphi\left(a_U^x(s_U) \circ_{\mathfrak{S}} a_U^x(s'_U)\right) = \varphi\left(a_U^x(s_U \circ_{S_U} s'_U)\right) = b_U^x \varphi_U(s_U \circ_{S_U} s'_U) =$$

$$b_U^x\left(\varphi_U(s_U) \circ_{T_U} \varphi_U(s'_U)\right) = b_U^x \varphi_U(s_U) \circ_{\mathfrak{T}} b_U^x \varphi_U(s'_U) = \varphi\left(a_U^x(s_U)\right) \circ_{\mathfrak{T}} \varphi\left(a_U^x(s'_U)\right).$$

Аналогично, за умножението с $r \in R$ или $r \in F$ имаме

$$\varphi\left(r a_U^x(s_U)\right) = \varphi\left(a_U^x(r s_U)\right) = b_U^x \varphi_U(r s_U) =$$

$$b_U^x\left(r\varphi_U(s_U)\right) = rb_U^x\varphi_U(s_U) = r\varphi\left(a_U^x(s_U)\right), \quad \text{Q.E.D.}$$

3. Взаимна-еднозначност между асоциране снопове и предснопове

Твърдение 8.14. *Нека $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е сноп над X, $\{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU} = i_{UV}^*\}$ е предснопът от сеченията на $\mathfrak{S}$, а $\pi : \mathfrak{S}' \to X$ е снопът, асоциран с предснопа $\{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU} = i_{UV}^*\}$. Тогава $\mathfrak{S}'$ е изоморфен на $\mathfrak{S}$.*

Доказателство: В означенията от Твърдение 8.12, всеки елемент на $\mathfrak{S}' = \cup_{x\in X}\mathfrak{S}'_x$ е от вида $s'_x = a_U^x(\sigma_U) \in \mathfrak{S}'_x$ за някакво отворено подмножество $U \subseteq X$, съдържащо x и (непрекъснато) сечение $\sigma_U : U \to \mathfrak{S}$ на $\mathfrak{S}$. Определяме изображението

$$f : \mathfrak{S}' = \cup_{x\in X}\mathfrak{S}'_x \longrightarrow \cup_{x\in X}\mathfrak{S}_x = \mathfrak{S},$$
$$f(s'_x) = f(a_U^x(\sigma_U)) := \sigma_U(x).$$

За проверка на коректността на f да отбележим, че за произволна друга околност V на x върху X и произволно сечение $\sigma_V : V \to \mathfrak{S}$, изпълняващо условието $a_U^x(\sigma_U) = a_V^x(\sigma_V)$ имаме

$$a_{U\cap V}^x\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U) = a_U^x(\sigma_U) = a_V^x(\sigma_V) = a_{U\cap V}^x\rho_{U\cap V,V}(\sigma_V),$$

съгласно определението за директна граница. Ако K_x е ядрото на естествения епиморфизъм $\coprod_{x\in U}\Gamma(\mathfrak{S}, U) \to \mathfrak{S}'_x$, то $\tau_{U\cap V} := \rho_{U\cap V,U}(\sigma_U) - \rho_{U\cap V,V}(\sigma_V) \in K_x$. По определение, K_x се поражда (като R-модул или, съответно, F-алгебра) от елементите $\sigma_{W_1} - \rho_{W_2,W_1}(\sigma_{W_1})$ на $\coprod_{x\in U}\Gamma(\mathfrak{S}, U)$ за произволни отворени $W_2 \subseteq W_1$ и сечения $\sigma_{W_1} : W_1 \to \mathfrak{S}$. Доколкото $\left[\sigma_{W_1} - \rho_{W_2,W_1}(\sigma_{W_1})\right](x) = \sigma_{W_1}(x) - (\rho_{W_2,W_1}\sigma_{W_1})(x) = \sigma_{W_1}(x) - \sigma_{W_1}(x) = 0_{\mathfrak{S}_x}$, всички елементи на K_x се анулират в x. В частност,

$$0_{\mathfrak{S}_x} = \tau_{U\cap V}(x) = [\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U)](x) - [\rho_{U\cap V,V}(\sigma_V)](x) = \sigma_U(x) - \sigma_V(x),$$

така че $f(a_U^x(\sigma_U)) = \sigma_U(x) = \sigma_V(x) = f(a_V^x(\sigma_V))$ за $a_U^x(\sigma_U) = a_V^x(\sigma_V)$. Непосредствено се проверява комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathfrak{S} \arrow[dl, "\pi"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

съгласно $\pi f(a_U^x(\sigma_U)) = \pi\sigma_U(x) = x = \pi'(a_U^x(\sigma_U))$ за $\forall a_u^x(\sigma_U) \in \mathfrak{S}'_x$. Да отбележим също, че f изобразява $\mathfrak{S}'$ върху $\mathfrak{S}$, защото за $\forall s \in \mathfrak{S}$ с $\pi(s) = x$ съществува околност V_s на s върху $\mathfrak{S}$, така че $\pi : V_s \to U_x := \pi(V_s)$ е хомеоморфизъм. Следователно $\sigma_{U_x} := \pi^{-1} : U_x \to V_s$ е непрекъснато сечение на $\pi : \mathfrak{S} \to X$ с $f\left(a_{U_x}^x(\sigma_{U_x})\right) = \sigma_{U_x}(x) = s$.

За установяване на непрекъснатостта на $f : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ да разгледаме отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{S}$. За всяка точка $s \in V$ да изберем $s' \in f^{-1}(s)$ и околност $W_{s'}$ на s' върху $\mathfrak{S}'$, така че $\widetilde{\pi} : W_{s'} \to \widetilde{\pi}(W_{s'})$ е хомеоморфизъм. Следователно в комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
W_{s'} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\widetilde{\pi}"'] & f(W_{s'}) \arrow[dl, "\pi"] \\
\widetilde{\pi}(W_{s'}) &
\end{tikzcd}$$

изображенията $f : W_{s'} \to f(W_{s'})$ и $\pi : f(W_{s'}) \to \widetilde{\pi}(W_{s'})$ са взаимно-еднозначни. В резултат, $V_s := f(W_{s'}) = \pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{s'})$ се оказва отворено подмножество на $\mathfrak{S}$, благодарение на отвореността на $\widetilde{\pi}$ и непрекъснатостта на π. Освен това $W_{s'} = f^{-1}(V_s)$ и за всяка околност V'_s на s върху V_s праобразът $f^{-1}(V'_s) = \widetilde{\pi}^{-1}\pi(V'_s)$ е отворен в $\mathfrak{S}'$ съгласно отвореността на π и непрекъснатостта на $\widetilde{\pi}$. По този начин, след разбиване на V в обединение $V = \cup_{s\in V}(V_s \cap V)$ получаваме, че

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\cup_{s\in V} V_s \cap V\right) = \cup_{s\in V} f^{-1}(V_s \cap V)$$

е отворено подмножество на $\mathfrak{S}'$. Аналогично се проверява, че $f : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ е отворено изображение. По-точно, за произволно отворено подмножество $W \subseteq \mathfrak{S}'$ и произволна точка $s' \in W$ съществува околност $W_{s'}$ на s' върху W, така че $\widetilde{\pi} : W_{s'} \to \widetilde{\pi}(W_{s'})$ е хомеоморфизъм. Съгласно $\widetilde{\pi} = \pi f$ стигаме до извода, че $f : W_{s'} \to f(W_{s'})$ и $\pi : f(W_{s'}) \to \widetilde{\pi}(W_{s'})$ са взаимно-еднозначни изображения. В частност, $f(W_{s'}) = \pi^{-1}\widetilde{\pi}(W_{s'})$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$, благодарение на отвореността на $\widetilde{\pi}$ и непрекъснатостта на π. След представяне на W като обединение $W = \cup_{s'\in W} W_{s'}$ забелязваме, че

$$f(W) = f\left(\cup_{s'\in W} W_{s'}\right) = \cup_{s'\in W} f(W_{s'})$$

е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$. Това установява, че $f : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$ е морфизъм на снопове.

Твърдим, че f се ограничава до хомоморфизми $f : \mathfrak{S}'_x \to \mathfrak{S}_x$ на съответните слоеве. Наистина, за произволно $r \in R$ или $r \in F$ и произволен елемент $a^x_U(\sigma_U) \in \mathfrak{S}'_x$ имаме

$$f(ra^x_U(\sigma_U)) = f(a^x_u(r\sigma_U)) = (r\sigma_U)(x) = r[\sigma_U(x)] = rf(a^x_U(\sigma_U)).$$

За съгласуваността на събирането или умножението $\circ_{\mathfrak{S}}$ в $\mathfrak{S}$ и, съответно, $\circ_{\mathfrak{S}'}$ в $\mathfrak{S}'$ да отбележим, че произволни $a^x_U(\sigma_U), a^x_V(\tau_V) \in \mathfrak{S}'_x$ се представят във вида $a^x_{U\cap V}\left(\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U)\right)$ и $a^x_{U\cap V}\left(\rho_{U\cap V,V}(\tau_V)\right)$, съгласно дефиниционните съотношения на хомоморфизмите a^x_U от определението за директна граница. Следователно

$$f\left(a^x_U(\sigma_U) \circ_{\mathfrak{S}'} a^x_V(\tau_V)\right) = f\left(a^x_{U\cap V}\left(\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U)\right) \circ_{\mathfrak{S}'} a^x_{U\cap V}\left(\rho_{U\cap,V}(\tau_V)\right)\right) =$$
$$f\left(a^x_{U\cap V}\left(\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U) \circ_{\mathfrak{S}} \rho_{U\cap V,V}(\tau_V)\right)\right) = \left[\rho_{U\cap V,U}(\sigma_U) \circ_{\mathfrak{S}} \rho_{U\cap V,V}(\tau_V)\right](x) =$$
$$\sigma_U(x) \circ_{\mathfrak{S}} \tau_V(x) = f\left(a^x_U(\sigma_U)\right) \circ_{\mathfrak{S}} f\left(a^x_V(tau_V)\right).$$

Остава да докажем, че f е взаимно-еднозначно върху съответните слоеве, а оттам и взаимно-еднозначно $f : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}$. Достатъчно е да установим, че за $\forall s \in \mathfrak{S}_x$ съществува околност U на x върху X и сечение $\sigma_U : U \to \mathfrak{S}$, така че $f\left(a^x_U(\sigma_U)\right) = \sigma_U(x) = s$ за $a^x_U(\sigma_U) \in \mathfrak{S}'_x$. Наистина, за всяка друга околност V на x върху X и сечение $\sigma_V : V \to \mathfrak{S}$ с $f\left(a^x_V(\sigma_V)\right) = \sigma_V(x) = s = \sigma_U(x)$ съществува околност W на x върху X, така че $W \subseteq U \cap V$ (виж Лема 7.12). Следователно $a^x_U(\sigma_U) = a^x_W\rho_{W,U}(\sigma_U) = a^x_W\rho_{WV}(\sigma_V = a^x_V(\sigma_V)$, съгласно съгласуваността на a^x_U с хомоморфизмите на ограничение ρ_{WU}. Накрая, от произволна околност $V_s \subseteq \mathfrak{S}$ на $s \in \mathfrak{S}_x$, върху която проекцията $\pi : \mathfrak{S} \to X$ се ограничава до хомеоморфизъм $\pi : V_s \to \pi(V_s)$, получаваме околност $U := \pi(V_s) \subseteq X$ на $x = \pi(s) \in \pi(V_s) = U$, доколкото π е отворено изображение. Още повече, $\sigma_U := \pi^{-1} : U = \pi(V_s) \to V_s$ е непрекъснато изображение с $\pi\sigma_U = \mathrm{Id}_U$, така че $\sigma_U \in \Gamma(\mathfrak{S}, U)$ и $f\left(a^x_U(\sigma_U)\right) = \sigma_U(x) = \pi^{-1}(x) = s$, Q.E.D.

Пример 8.15. *За произволен пръстен R и нулевия хомоморфизъм $\mathbb{O} : R \to R$, $\mathbb{O}(r) := 0_R$ върху $\forall r \in R$, предснопът $\{S_U = R, \rho_{VU} = \mathbb{O}\}$ над произволно топологично пространство X е асоциран с нулевия сноп $\mathfrak{S}^o := \cup_{x\in X}\{0_R\}_x$, така че предснопът $\{\Gamma(\mathfrak{S}^o, U) = \{0_R\}, \rho_{VU} = \mathbb{O}\}$ се различава от $\{S_U = R, \rho_{VU} = \mathbb{O}\}$.*

Определение 8.16. *Предснопът $\{S_U, \rho_{VU}\}$ над топологично пространство X се нарича пълен, ако върху всяко отворено подмножество $U = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ на X са изпълнени следните две условия:*

(i) (единственост) *от* $\rho_{U_\alpha,U}f = \rho_{U_\alpha,U}g$ *за* $f,g \in S_U$ *и всички* $\alpha \in A$ *следва* $f = g$;
(ii) (съществуване) *за всяка фамилия* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *от елементи* $f_\alpha \in S_{U_\alpha}$ *с* $\rho_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\alpha}(f_\alpha) = \rho_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\beta}(f_\beta)$ *за* $\forall\alpha,\beta \in A$ *съществува* $f \in S_U$ *с* $\rho_{U_\alpha,U}(f) = f_\alpha$ *за* $\forall\alpha \in A$.

Твърдение 8.17. *Нека* $\{S_U, \rho_{VU}\}$ *е предсноп над топологично пространство* X *с асоцииран сноп* $\pi : \mathfrak{S} \to X$, *а* $\{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho'_{VU} = i^*_{UV}\}$ *е предснопът от (непрекъснати) сечения на* $\mathfrak{S}$. *Тогава съществува хомоморфизъм на предснопове*

$$\{\varphi_U\} : \{S_U, \rho_{VU}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho'_{VU}\},$$

който за всяко $s_U \in S_U$ *определя изображение*

$$\varphi_U(s_U) : U \longrightarrow \mathfrak{S},$$

$$\varphi_U(s_U)(x) := a^x_U(s_U),$$

където $a^x_U : S_U \to \mathfrak{S}_x = \lim_{\to} S_U$ *са хомоморфизмите на директните граници* $\lim_{\to} S_U$ *по всички отворени* $U \subseteq X$, *съдържащи* $x \in X$.
Още повече, ако $\{S_U, \rho_{VU}\}$ *е пълен предсноп върху* X, *то така определеният хомоморфизъм на предснопове*

$$\{\varphi_U\} : \{S_U, \rho_{VU}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho'_{VU}\}$$

е изоморфизъм на предснопове.

Доказателство: За всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ да разгледаме изображението

$$\varphi_U : S_U \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}, U),$$

определено по правилото

$$\varphi_U(s_U)(x) := a^x_U(s_U)$$

за $\forall s_U \in S_U$, $\forall x \in U$. То взема стойности в $\Gamma(\mathfrak{S}, U)$, доколкото $\varphi_U(s_U)(x) = a(x, s_U)$ в означенията от Твърдение 8.12 и $a : \widetilde{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}$ е непрекъснато изображение. Освен това, $\pi\varphi_U(s_U)(x) = \pi a^x_U(s_U) = x$, така че $\varphi_U(s_U) : U \to \mathfrak{S}$ е непрекъснато сечение. Твърдим, че φ_U е хомоморфизъм на R-модули или F-алгебри. Наистина, за всяко $r \in R$ или $r \in F$ е в сила

$$\varphi_U(rs_U)(x) = a^x_U(rs_U) = ra^x_U(s_U) = r\varphi_U(s_U)(x),$$

доколкото $a^x_U : S_U \to \mathfrak{S}_x$ са хомоморфизми на R-модули или F-алгебри. Аналогично, за събирането или умножението $\circ_{S_U}$, $\circ_{\mathfrak{S}}$ имаме

$$\varphi_U(s_U \circ_{S_U} \sigma_U)(x) = a^x_U(s_U \circ_{S_U} \sigma_U) = a^x_U(s_U) \circ_{\mathfrak{S}} a^x_U(\sigma_U) =$$

$$\varphi_U(s_U)(x) \circ_{\mathfrak{S}} \varphi_U(\sigma_U(x) = [\varphi_U(s_U) \circ_{\mathfrak{S}} \varphi_U(\sigma_U)]\,(x),$$

така че φ_U са хомоморфизми. По-нататък, φ_U комутират с хомоморфизмите на ограничение, т.е.

$$\begin{array}{ccc} S_U & \xrightarrow{\varphi_U} & \Gamma(\mathfrak{S}, U) \\ {\scriptstyle \rho_{VU}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{VU}} \\ S_V & \xrightarrow{\varphi_V} & \Gamma(\mathfrak{S}, V) \end{array}$$

за $\forall V \subseteq U$. По-точно, за $\forall s_U \in S_U$ и $\forall x \in X$ пресмятаме, че

$$[\rho'_{VU}\varphi_U(s_U)](x) = \varphi_U(s_U)(x) = a^x_U(s_U) = a^x_V\rho_{VU}(s_U) = [\varphi_V\rho_{VU}(s_U)](x).$$

Това доказва общата част на твърдението.

За да установем инективността на φ_U при пълен предсноп $\{S_U, \rho_{VU}\}$, да предположим, че $\varphi_U(s_U)(x) = a^x_U(s_U) = 0_{\mathfrak{S}_x}$ за $\forall x \in U$. Във всяка фиксирана точка $x \in U$ нека K_x е ядрото на естествения епиморфизъм $\coprod_{x\in U} S_U \to \mathfrak{S}_x$. Тогава $s_U \in K_x$ се преставя като крайна сума от вида $s_U = \sum_{j=1}^m [s_{W_j} - \rho_{V_j,W_j}(s_{W_j})]s'_j$ и се ограничава до нула върху подходяща околност U_x на x върху U. След покриване на U с такива околности прилагаме условие (i) от Определение 8.16 за пълен предсноп към равенствата $\rho_{U_x,U}(s_U) = \rho_{U_x,U}(0_{S_U})$ и получаваме $s_U = 0_{S_U}$. Това доказва, че φ_U е влагане.

За сюрективността на $\varphi_U : S_U \to \Gamma(\mathfrak{S}, U)$ трябва да докажем, че за всяко непрекъснато сечение $\sigma : U \to \mathfrak{S}$ съществува $s_U \in S_U$, така че $\varphi_U(s_U)(x) = a^x_U(s_U) = \sigma(x)$ върху всички $x \in U$. За целта ще установим, че за всяка точка $x \in U$ съществува околност U_x върху U и $s_{U_x} \in S_{U_x}$, така че $a(z, s_{U_x}) = \sigma(z)$ за $\forall z \in U_x$. Първо да изберем околност $V'_{\sigma(x)}$ на $\sigma(x) \in \mathfrak{S}$ върху $\sigma(U) \ni \sigma(x)$, за която $\pi : V'_{\sigma(x)} \to U'_x := \pi(V'_{\sigma(x)})$ е хомеоморфизъм. Ясно е, че $\sigma\sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)}) \subseteq V'_{\sigma(x)}$. Обратно, $V'_{\sigma(x)} \subseteq \sigma\sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)})$, защото за $\forall v \in V'_{\sigma(x)} \subseteq \sigma(U)$ съществува $u \in U$, така че $v = \sigma(u)$ или $u \in \sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)})$. Следователно $V'_{\sigma(x)} = \sigma\sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)})$, откъдето

$$\sigma\pi|_{V'_{\sigma(x)}} = \sigma\pi|_{\sigma\sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)})} = \mathrm{Id}_{\sigma\sigma^{-1}(V'_{\sigma(x)})} = \mathrm{Id}_{V'_{\sigma(x)}}.$$

Вземайки предвид и $\pi\sigma|_{U'_x} = \mathrm{Id}_{U'_x}$, стигаме до извода, че $\sigma : U'_x \to V'_{\sigma(x)}$ и $\pi : V'_{\sigma(x)} \to U'_x$ са взаимно-обратни. От определението на директната граница $\mathfrak{S}_x := \lim_{\to} S_W = \left(\coprod_{x\in W} S_W\right)/K_x$ е ясно, че съществуват $U_x \subseteq U'_x$ и $s_{U_x} \in S_{U_x}$, така че $a(x, s_{U_x}) = \sigma(x)$. За $\forall z \in U_x$ е изпълнено $z = \widetilde{\pi}(z, s_{U_x}) = \pi a(z, s_{U_x})$. Доколкото $\sigma : U_x \to V_{\sigma(x)} := \sigma(U_x)$ играе ролята на обратно изображение на $\pi : V_{\sigma(x)} \to U_x$, оттук получаваме, че $\sigma(z) = \sigma\pi a(z, s_{U_x}) = a(z, s_{U_x})$ за $\forall z \in U_x$. По този начин построяваме покритие $U = \cup_{x\in U} U_x$ и фамилия $\{s_{U_x}\}_{x\in U}$ от елементи $s_{U_x} \in S_{U_x}$. Съгласно условието за съществуване (ii) от Определение 8.16 за пълен предсноп, достатъчно е да докажем, че $\rho_{U_x\cap U_y,U_x}(s_{U_x}) = \rho_{U_x\cap U_y,U_y}(s_{U_y})$ за $\forall x, y \in U$, за да твърдим съществуването на $s_U \in S_U$ с $\rho_{U_x,U}(s_U) = s_{U_x}$. Непосредствено се вижда, че

$$a^x_U(s_U) = a^x_{U_x}\rho_{U_x,U}(s_U) = a^x_{U_x}(s_{U_x}) = a(x, s_{U_x}) = \sigma(x),$$

така че s_U върши работа за сюрективността на φ_U. За съвпадението на

$$t_{U_x\cap U_y} := \rho_{U_x\cap U_y,U_x}(s_{U_x}) - \rho_{U_x\cap U_y,U_y}(s_{U_y})$$

с нулевия елемент $\mathbb{O}_{U_x capU_y}$ на $S_{U_x\cap U_y}$ да отбележим, че за всяка точка $z \in U_x \cap U_y$ е в сила

$$a^z_{U_x\cap U_y}(t_{U_x\cap U_y}) = a^z_{U_x\cap U_y}\rho_{U_x\cap U_y,U_x}(s_{U_x}) - a^z_{U_x\cap U_y}\rho_{U_x\cap U_y,U_y}(s_{U_y}) =$$
$$a^z_{U_x}(s_{U_x}) - a^z_{U_y}(s_{U_y}) = \sigma(z) - \sigma(z) = 0.$$

Следователно съществува околност U_z на $z \in U_x \cap U_y$ върху $U_x \cap U_y$, така че $\rho_{U_z,U_x\cap U_y}(t_{U_x\cap U_y}) = \mathbb{O}_z$ за нулевия елемент $\mathbb{O}_z = \rho_{U_z,U_x\cap U_y}(\mathbb{O}_{U_x\cap U_y})$ на S_{U_z}. Сега към покритието $U_x \cap U_y = \cup_{z\in U_x\cap U_y} U_z$ прилагаме условието за единственост (i) от Определение 8.16 за пълен предсноп и получаваме, че $t_{U_x\cap U_y} = \mathbb{O}_{U_x\cap U_y}$, Q.E.D.