Лекция 7

Снопове

1. Определение и пример.

Преди да се запознаем със снопове да отбележим, че ако A е асоциативен пръстен с единица, съдържащ в центъра си

$$Z(A) := \{z \in A \,|\, za = az, \forall a \in A\}$$

поле F_1, изоморфно на поле F, то A е линейно пространство над F_1 и A се нарича F-алгебра. Ако A е F-алгебра и A_1 е подпръстен на A, съдържащ F_1, то F_1 централизира A_1, така че A_1 е също F-алгебра, наречена F-подалгебра на A. Ако A е F-алгебра,$F \simeq F_1 \subseteq Z(A)$, а I е идеал в пръстена A с тривиално сечение $I \cap F_1 = \{0_A\}$, то фактор-пръстенът A/I съдържа $(F_1 + I)/I \simeq F_1/(F_1 \cap I) = F_1/\{0_A\} = F_1 \simeq F$ в центъра си и представлява F-алгебра, наречена фактор-алгебра на A.
Нека A_1 и A_2 са F-алгебри, съдържащи в центровете си полетата $F_1 \subseteq Z(A_1)$ и $F_2 \subseteq Z(A_2)$, изоморфни на F. Тогава всеки хомоморфизъм на пръстени $f : A_1 \to A_2$, изобразяващ изоморфно F_1 върху F_2, може да се разглежда като F-линейно изображение и се нарича хомоморфизъм на F-алгебри. Ядрото $Ker(f)$ на хомоморфизъм на F-алгебри е идеал на пръстена A_1 с тривиално сечение $Ker(f) \cap F_1 = \{0_{A_1}\}$. Следователно $A_1/Ker(f)$ е фактор-алгебра на A_1. Аналогично, подпръстенът $Im(f)$ на A_2 съдържа $F_2 = f(F_1)$, така че $Im(f)$ е F-подалгебра на A_2. Изоморфизмът на пръстени $\overline{f} : A_1/Ker(f) \to Im(f)$ изобразява тъждествено полето $(F_1 + I)/I \simeq F_1$ върху полето F_2, така че $\overline{f}$ е изоморфизъм на F-алгебри. Изобщо, за произволна F-алгебра A и произволен идеал $I \triangleleft A$ с $I \cap F_1 = \{0_A\}$ естественият епиморфизъм $\pi : A \to A/I$ изобразява тъждествено полето $F \simeq F_1 \subseteq Z(A)$ върху полето $F_1 \simeq (F_1 + I)/I \subseteq Z(A/I)$ и представлява епиморфизъм на F-алгебри.

Определение 7.1. *Непрекъснато изображение $f : X \to Y$ на топологични пространства се нарича отворено, ако f трансформира всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ в отворено подмножество $f(U) \subseteq Y$.*
Локален хомеоморфизъм е такова непрекъснато отворено изображение $f : X \to X$, че всяка точка $x \in X$ има околност $U_x \subseteq X$, върху която f се ограничава до хомеоморфизъм $f : U_x \to f(U_x)$ върху отворено подмножество $f(U_x) \subseteq Y$.

Ако $f : X \to Y$ е локален хомеоморфизъм върху Y, то за всяка точка $y \in Y$ и всяка точка $x \in f^{-1}(y)$ съществува околност $V_y \subseteq Y$ на y, така че f е обратимо върху V_y и $f^{-1} : V_y \to f^{-1}(V_y)$ е хомеоморфизъм върху околност $f^{-1}(V_y) \subseteq X$ на x. За целта е достатъчно да изберем $V_y := f(U_x)$ за околността $U_x \subseteq X$ на x, върху която $f : U_x \to f(U_x)$ е хомеоморфизъм.

Определение 7.2. *Сноп от R-модули или F-алгебри е топологично пространство $\mathfrak{S}$ с локален хомеоморфизъм $\pi : \mathfrak{S} \to X$ върху X, наречен проекция, така че всеки слой $\mathfrak{S}_x := \pi^{-1}(x)$ е R-модул или, съответно, F-алгебра и алгебричните операции в $\mathfrak{S}$ са непрекъснати.*

За да поясним последното условие да разгледаме затвореното подмножество

$$\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}) := \{(s_1,s_2)\in\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\,|\,\pi(s_1)=\pi(s_2)\}$$

на $\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}$. Изваждането на сечения е непрекъснато, ако изображението

$$\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathfrak{S},$$

$$(s_1,s_2)\mapsto s_1-s_2$$

е непрекъснато относно топологията на $\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})$, индуцирана от топологията на произведение върху $\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}$. Аналогично, за всяко фиксирано $\lambda\in R$ или $\lambda\in F$ изискваме

$$\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{S},$$

$$s\mapsto\lambda s$$

да е непрекъснато изображение. В случая на сноп от F-алгебри, предполагаме допълнително, че

$$\Delta(\mathfrak{S}\times\mathfrak{S})\longrightarrow\mathfrak{S}$$

$$(s_1,s_2)\mapsto s_1s_2$$

е непрекъснато.
За по-нататъшните ни разглеждания е нужно да напомним понятието за база на топология.

Лема-Определение 7.3. *Нека $(U_\beta)_{\beta\in B}$ е такова покритие на $X=\cup_{\beta\in B}U_\beta$, че за всяка точка $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ съществува множество U_γ от тази фамилия с условието $x\in U_\gamma\subseteq U_\alpha\cap U_\beta$. Тогава празното множество $\emptyset$ и всевъзможните обединения $\cup U_\beta$ на множества от тази фамилия задават топология върху X.*
Фамилията $(U_\beta)_{\beta\in B}$ се нарича база на така определената топология.

Доказателство: Трябва да проверим, че $\emptyset$ и $\cup U_\beta$ изпълняват условията за фамилия от отворени множества. По предположение, $X=\cup U_\beta$ се покрива от U_β. Всевъзможни обединения на $\cup U_\beta$ са множества от същия вид. Остава да докажем, че

$$(\cup U_{\beta_1})\cap\ldots\cap(\cup U_{\beta_k}) = \cup(U_{\beta_1}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$$

се представят като обединения на U_β. За целта е достатъчно да установим, че за всяка точка $x\in U_{\beta_1}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$ съществува множество U_{γ_x} от фамилията, така че $x\in U_{\gamma_x}\subseteq U_{\beta_1}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$. Това ще ни даде възможност да представим $U_{\beta_1}\cap\ldots\cap U_{\beta_k} = \cup_{x\in U_{\beta_1}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}}U_{\gamma_x}$. Ще работим с индукция по $k\geq 2$. По предположение, за всяка точка x от $U_{\beta_1}\cap U_{\beta_2}$ съществува U_{γ_x}, така че $x\in U_{\gamma_x}\subseteq U_{\beta_1}\cap U_{\beta_2}$. Ако $x\in U_{\beta_1}\cap U_{\beta_2}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$, то по същото предположение съществува $U_{\beta'}$ с $x\in U_{\beta'}\subseteq U_{\beta_1}\cap U_{\beta_1}$. Тогава $x\in U_{\beta'}\cap U_{\beta_3}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$ принадлежи на сечението на $k-1$ множества от фамилията и по индукционно предположение съществува U_{γ_x} с $x\in U_{\gamma_x}\subseteq U_{\beta'}\cap U_{\beta_3}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}\subseteq U_{\beta_1}\cap U_{\beta_2}\cap U_{\beta_3}\cap\ldots\cap U_{\beta_k}$, Q.E.D.

Задача 7.4. *Нека $(U_\beta)_{\beta\in B}$ е фамилия от отворени подмножества на топологично пространство X. Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:*
(i) $(U_\beta)_{\beta\in B}$ е база за топологията на X, т.е. всяко отворено подмножество $U\subseteq X$ е обединение на множества U_β от фамилията и за произволна точка $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ съществува U_γ с $x\in U_\gamma\subseteq U_\alpha\cap U_\beta$;
(ii) всяко отворено подмножество $U\subseteq X$ е обединение $U=\cup U_\beta$ на множества от тази фамилия и за произволна точка x на произволно отворено подмножество $U\subseteq X$ съществува U_β от фамилията, така че $x\in U_\beta\subseteq U$.

ПРИМЕР 7.5. *Нека $(U_\beta)_{\beta\in B}$ е база на топология върху X, а S е R-модул или F-алгебра. Тогава фамилията $(U_\beta \times s)$ за произволни $\beta \in B$ и $s \in S$ е база на топология върху $\mathfrak{S} := X \times S$ и $\mathfrak{S}$ е сноп над X с проекция*

$$\pi : \mathfrak{S} = X \times S \longrightarrow S,$$

$$\pi(x, s) = x$$

и послойни операции в S.
Снопът $\mathfrak{S} = X \times S$ се нарича постоянен сноп върху X със слой S.

Доказателство: От това, че $(U_\beta)_{\beta\in B}$ е база на топологията върху X имаме $\cup_\beta U_\beta = X$, така че $\cup_{\beta\in B} \cup_{s\in S} U_\beta \times s = X \times S = \mathfrak{S}$. За произволна точка $(x, s) \in (U_\alpha \times s) \cap (U_\beta \times s)$ съществува U_γ, така че $x \in U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$, откъдето $(x, s) \in U_\gamma \times s \subseteq (U_\alpha \times s) \cap (U_\beta \times s)$. Следователно $U_\beta \times s$ образуват база на топология върху $\mathfrak{S} = X\times S$. Относно така определената топология проекцията $\pi : X\times S \to X, \pi(x, s) = x$ е непрекъсната, защото за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ имаме $U = \cup U_\beta$ с $\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\cup U_\beta) = \cup\pi^{-1}(U_\beta) = \cup \cup_{s\in S} U_\beta \times s$. Аналогично, π е отворено, защото $\pi(\cup U_\beta \times s) = \cup U_\beta$. Още повече, π е локален хомеоморфизъм, защото за всяка точка $(x, s) \in \mathfrak{S} = X \times S$ съществува $U_\beta \ni x$, а оттам и околност $U_\beta \times s$ на (x, s) върху $\mathfrak{S}$, така че $\pi : U_\beta \times s \to U_\beta$ е хомеоморфизъм. Остава да проверим непрекъснатостта на алгебричните операции. Нека $\mu_r : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $\mu_r(x, s) := (x, rs)$ умножение с $r \in R$ или $r \in F$. Тогава всяко отворено подмножество $\cup_{\beta,s}U_\beta \times s \subseteq \mathfrak{S}$ има отворен праобраз

$$\mu_r^{-1}(\cup_{\beta,s}U_\beta \times s) = \cup_{\beta,s}(U_\beta \times s) = \cup_{\beta,s}U_\beta \times \mu_r^{-1}(s) \subseteq \mathfrak{S}.$$

Да означим с $\circ_{\mathfrak{S}}$ послойното изваждане или умножение и да разгледаме $\circ_{\mathfrak{S}} : \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \to \mathfrak{S}$. Тогава

$$\circ_{\mathfrak{S}}^{-1}(\cup_{\beta,s}U_\beta\times s) = \cup_{\beta,s}\circ_{\mathfrak{S}}^{-1}(U_\beta\times s) = \cup_{\beta,s}\Delta\left\{(U_\beta \times s') \times (U_\beta \times s'') \mid \circ_{\mathfrak{S}} (s', s'') = s\right\}.$$

Обединението $\cup_{s',s'',\circ_{\mathfrak{S}}(s',s'')=s}(U_\beta\times s')\times(U_\beta\times s'')$ е отворено върху Декартовото произведение $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ и неговото сечение $\Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})$ с диагонала е отворено в $\Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})$. Следователно $\circ_{\mathfrak{S}}$ е непрекъснато и $\mathfrak{S} = X \times S$ е сноп върху X, Q.E.D.

2. Хомоморфизми на снопове. Подснопове.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. *Морфизъм на снопове от R-модули или F-алгебри над фиксирано топологично пространство X е непрекъснато отворено изображение $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, което е съгласувано с проекциите $\pi_1 : \mathfrak{S} \to X$ и $\pi_2 : \mathfrak{T} \to X$, т.е.*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd},$$

$\pi_2 f = \pi_1$.

ЛЕМА 7.7. *Всеки морфизъм на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ над топологично пространство X е локален хомеоморфизъм.*

Доказателство: Да изберем произволна точка $s \in \mathfrak{S}$ и да означим с t образа на s под действие на f. Доколкото $\pi_1 : \mathfrak{S} \to X$ е локален хомеоморфизъм, съществува околност $U_s \subseteq \mathfrak{S}$ на s, върху която $\pi_1 : U_s \to \pi_1(U_s)$ е хомеоморфизъм. Аналогично, съществува околност $V_t \subseteq \mathfrak{T}$ на t, така че $\pi_2 : V_t \to \pi_2(V_t)$ е хомеоморфизъм. Да изберем околността $W_s := U_s\cap\pi_1^{-1}\pi_2(V_t)$ на s върху $\mathfrak{S}$ и да разгледаме ограничението $\pi_2 f|_{W_s} = \pi_1|_{W_s}$. (Тук $\pi_2(V_t)$ е отворено в X, защото π_2 е отворено изображение, а $\pi_1^{-1}\pi_2(V_t)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$, понеже

π_1 е непрекъснато изображение.) Отвореното изображение π_1 трансформира W_s върху отвореното подмножество $\pi_1(W_s) = \pi_1(U_s) \cap \pi_2(V_t)$ на X, където π_2^{-1} е коректно определен хомеоморфизъм върху образа си. Следователно

$$\pi_2^{-1}|_{\pi_1(W_s)}\pi_1|_{W_s} = \pi_2^{-1}|_{\pi_1(W_s)}(\pi_2 f)|_{W_s} = f|_{W_s}$$

е хомеоморфизъм върху образа си като композиция на хомеоморфизми. Това установява, че f е локален хомеоморфизъм, Q.E.D.
Комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd}$$

показва, че произволен морфизъм на снопове изобразява всеки слой $\mathfrak{S}_x := \pi_1^{-1}(x)$ на $\mathfrak{S}$ в слоя $\mathfrak{T}_x := \pi_2^{-1}(x)$ на $\mathfrak{T}$ над същата точка $x \in X$. Наистина, за $\forall s \in \pi_1^{-1}(x) = \mathfrak{S}_x$ е в сила $\pi_2 f(s) = \pi_1(s) = x$, така че $f(s) \in \pi_2^{-1}(x) = \mathfrak{T}_x$.

Определение 7.8. *Хомоморфизъм на снопове от R-модули или F-алгебри е морфизъм на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, който се ограничава до хомоморфизми на R-модули, съответно, F-алгебри*

$$f_x := f|_{\mathfrak{S}_x} : \mathfrak{S}_x = \pi_1^{-1}(x) \longrightarrow \pi_2^{-1}(x) = \mathfrak{T}_x$$

върху всички слоеве.
Взаимно-еднозначните хомоморфизми на снопове $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ се наричат изоморфизми на снопове.

Лема 7.9. *Ако $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е изоморфизъм на снопове, то $f^{-1} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ е изоморфизъм на снопове.*

Доказателство: Преди всичко, $f^{-1} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ е непрекъснато изображение, защото всяко отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{S}$ има отворен праобраз $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \subseteq \mathfrak{T}$, съгласно отвореността на $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$. Аналогично, f^{-1} е отворено, защото всяко отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{T}$ има отворен образ $f^{-1}(V) \subseteq \mathfrak{S}$, благодарение на непрекъснатостта на f. По-нататък, за всяко $t \in \mathfrak{T}$ и $s = f^{-1}(t) \in \mathfrak{S}$ знаем, че $\pi_1 f(t) = \pi_1(s) = \pi_2 f(s) = \pi_2 f f^{-1}(t) = \pi_2(t)$, доколкото $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е морфизъм на снопове и удовлетворява комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

Следователно $f^{-1} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ затваря комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{T} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \mathfrak{S} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

С това установихме, че $f^{-1} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ е морфизъм на снопове. Равенството $\pi_1 f^{-1} = \pi_2$ гарантира, че f^{-1} се ограничава до изображения $(f^{-1})_x : \mathfrak{T}_x \to \mathfrak{S}_x$ на съответните слоеве. Следователно $f_x : \mathfrak{S}_x \to \mathfrak{T}_x$ са изоморфизми на R-модули или F-алгебри за $\forall x \in X$. В резултат, $f_x^{-1} = (f^{-1})_x : \mathfrak{T}_x \to \mathfrak{S}_x$ се оказват изоморфизми на RR-модули или F-алгебри, така че $f^{-1} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$ е изоморфизъм на снопове, Q.E.D.

Лема-Определение 7.10. *Ако $\mathfrak{S}'$ е отворено подмножество на сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ и всеки слой $\mathfrak{S}_x = \pi^{-1}(x)$ на $\mathfrak{S}$ пресича $\mathfrak{S}'$ в R-подмодул или, съответно, F-подалгебра $\mathfrak{S}'_x := \mathfrak{S}' \cap \mathfrak{S}_x$, то $\mathfrak{S}'$ е сноп с индуцираните от $\mathfrak{S}$ топология и алгебрични операции.*
Снопът $\mathfrak{S}'$ се нарича подсноп на $\mathfrak{S}$.

Доказателство: Ако $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ е фамилията на отворените подмножества на $\mathfrak{S}$, то $(U_\alpha \cap \mathfrak{S}')_{\alpha \in A}$ изпълнява ролята на фамилия от отворени подмножества на $\mathfrak{S}'$. За целта да отбележим, че $\emptyset \cap \mathfrak{S}' = \emptyset$ и $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'$ са от тази фамилия, както и произволни обединения $\cup_{\beta \in B}(U_\beta \cap \mathfrak{S}') = (\cup_{\beta \in B} U_\beta) \cap \mathfrak{S}'$ и крайни сечения $\cap_{j=1}^k (U_{\beta_j} \cap \mathfrak{S}') = (\cap_{j=1}^k U_{\beta_j}) \cap \mathfrak{S}'$. Да означим с π_0 ограничението $\pi|_{\mathfrak{S}'}$. Тогава за всяко отворено подмножество $V \subseteq X$, праобразът $\pi_0^{-1}(V) = \pi^{-1}(V) \cap \mathfrak{S}'$ е отворен в $\mathfrak{S}'$, съгласно непрекъснатостта на π. Това установява непрекъснатостта на π_0. Аналогично, за всяко отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{S}$ образът $\pi_0(U \cap \mathfrak{S}') = \pi(U \cap \mathfrak{S}')$ е отворен в X, доколкото $U \cap \mathfrak{S}'$ е отворено в $\mathfrak{S}$ и $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е отворено изображение. Следователно π_0 е отворено изображение. При това, всяка точка $s' \in \mathfrak{S}'$ има такава околност $U_{s'}$ върху $\mathfrak{S}$, че $\pi : U_{s'} \to \pi(U_{s'})$ е хомеоморфизъм върху образа си. В резултат, $\pi_0 = \pi : U_{s'} \cap \mathfrak{S}' \to \pi_0(U_{s'} \cap \mathfrak{S}')$ е хомеоморфизъм на околността $U_{s'} \cap \mathfrak{S}'$ на s' върху $\mathfrak{S}'$. Това установяв, че $\pi_0 : \mathfrak{S}' \to X$ е локален хомеоморфизъм. По предположение, всеки слой $\mathfrak{S}'_x := \mathfrak{S}_x \cap \mathfrak{S}'$ е R-подмодул или F-подалгебра на $\mathfrak{S}_x$. Алгебричните операции в $\mathfrak{S}'$ са непрекъснати като ограничение на непрекъснатите операции на $\mathfrak{S}$ върху отворените подмножества $\Delta(\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}') = \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}') \subseteq \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S})$, съответно $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$. Това доказва, че $\mathfrak{S}'$ е сноп, Q.E.D.

3. Сечения на сноп.

Определение 7.11. *Прекъснато сечение на сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ над отворено подмножество $U \subseteq X$ е изображение $\sigma : U \to \mathfrak{S}$, такова, че $\pi\sigma = \mathrm{Id}_U$.*
Още повече, ако $\sigma : U \to \mathfrak{S}$ е непрекъснато изображение, то σ се нарича просто сечение (или непрекъснато сечение на $\mathfrak{S}$.)
Прекъснатите и непрекъснатите сечения $\sigma : X \to \mathfrak{S}$ се наричат глобални.

Като пример да отбележим, че за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ и всеки елемент $s \in S$ постоянният сноп $\mathfrak{S} = X \times S$ има сечение $\sigma_{U,s} : U \to \mathfrak{S}$, $\sigma_{U,s}(x) := (x, s)$. Непосредствено се проверява, че $\pi\sigma_{U,s}(x) = \pi(x, s) = x$ за $\forall x \in U$, така че $\pi\sigma_{U,s} = \mathrm{Id}_U$. Освен това $\sigma_{U,s}^{-1}(\cup U_\beta \times s') = \cup \sigma_{U,s}^{-1}(U_\beta \times s') = \cup \sigma_{U,s}^{-1}(U_\beta \times s) = \cup U_\beta$ е отворено в X за всяко отворено $\cup U_\beta \times s' \subseteq \mathfrak{S}$.

Лема 7.12. *Ако сеченията $\sigma_1 : U \to \mathfrak{S}$ и $\sigma_2 : U \to \mathfrak{S}$ на сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ съвпадат в точка $x \in U$, $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, то $\sigma_1|_{U_x} = \sigma_2|_{U_x}$ за околност U_x на x върху U.*

Доказателство: Нека W_s е околност на $s = \sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ върху $\mathfrak{S}$, такава че $\pi : W_s \to \pi(W_s)$ е хомеоморфизъм върху отворено подмножество $\pi(W_s) \subseteq U$. Тогава $V_i := \sigma_i^{-1}(W_s)$ са отворени подмножества на U, съдържащи x. Непосредствено се вижда, че ограниченията $\pi : \sigma_i(V_i) \to V_i$ обръщат сеченията $\sigma_i : V_i \to \sigma_i(V_i) \subseteq W_s$, доколкото $\pi\sigma_i|_{V_i} = \mathrm{Id}_{V_i}$ и $\sigma_i\pi|_{\sigma_i(V_i)} = \mathrm{Id}_{\sigma_i(V_i)}$. В резултат, $U_x := V_1 \cap V_2$ е такава околност на x върху U_x, че $\sigma_i(U_x) \subseteq W_s$. Вземайки предвид хомеоморфността на $\pi : W_s \to \pi(W_s)$ и равенството $\pi\sigma_i|_{U_x} = \mathrm{Id}_{U_x}$, получаваме, че ограниченията

$$\pi : \sigma_i(U_x) \longrightarrow U_x,$$

$$\pi\sigma_i(y) = y$$

са хомеоморфизми. Следователно $\sigma_i|_{U_x} = \left[\pi|_{\sigma_i(U_x)}\right]^{-1}$ съвпадат за $i = 1, 2$, Q.E.D.

Лема 7.13. *За произволен сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ от R-модули или F-алгебри изображението*

$$\sigma_0 : X \longrightarrow \mathfrak{S},$$

$$\sigma_0(x) := 0_{\pi^{-1}(x)},$$

съпоставящо на всяка точка $x \in X$ нулевия елемент на слоя $\mathfrak{S}_x = \pi^{-1}(x)$ над x, е глобално сечение.
Сечението $\sigma_0 : X \to \mathfrak{S}$ се нарича нулево сечение на $\pi : \mathfrak{S} \to X$.

Доказателство: Непосредствено проверяваме, че $\pi\sigma_0(x) = \pi(0_{\pi^{-1}(x)}) = x$ за $\forall x \in X$. За непрекъснатостта на σ_0 трябва да установим, че произволно отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{S}$ има отворен праобраз $\sigma_0^{-1}(V) \subseteq X$. За целта да отбележим, че за всяка точка $s = 0_{\pi^{-1}(x)} \in V$ и всяка околност U_x на $x \in X$ върху X, изображението $\sigma_0 : U_x \to \sigma_0(U_x)$ е обратно на $\pi : \sigma_0(U_x) \to U_x$ съгласно $\pi\sigma_0|_{U_x} = \mathrm{Id}_{U_x}$ и $\sigma_0\pi|_{\sigma_0(U_x)} = \mathrm{Id}_{\sigma_0(U_x)}$. Следователно $\sigma_0(U_x)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$ и $V_s := \sigma_0(U_x) \cap V$ е околност на $s = 0_{\pi^{-1}(x)}$ върху V с отворен праобраз $\sigma_0^{-1}(V_s) = \sigma_0^{-1}(\sigma_0(U_x) \cap V) = \pi(\sigma_0(U_x) \cap V) = \pi(V_s)$. Вземайки предвид включванията

$$\sigma_0^{-1}(V) = \sigma_0^{-1}(\sigma_0(X) \cap V) \subseteq \sigma_0^{-1}\left(\cup_{0_{\pi^{-1}(x)} \in V} V_{0_{\pi^{-1}(x)}}\right) \subseteq \sigma_0^{-1}(V),$$

стигаме до извода, че

$$\sigma_0^{-1}(V) = \sigma_0^{-1}\left(\cup_{0_{\pi^{-1}(x)} \in V} V_{0_{\pi^{-1}(x)}}\right) =$$

$$\cup_{0_{\pi^{-1}(x)} \in V} \sigma_0^{-1}\left(V_{0_{\pi^{-1}(x)}}\right) = \cup_{0_{\pi^{-1}(x)} \in V} \pi(V_{0_{\pi^{-1}(x)}})$$

е отворено подмножество на X, Q.E.D.

Лема 7.14. *Всяко сечение $\sigma : U \to \mathfrak{S}$ на сноп $\pi : \mathfrak{S} \to X$ над отворено подмножество $U \subseteq X$ е отворено изображение.*

Доказателство: Трябва да установим, че всяко отворено подмножество $U_0 \subseteq U$ има отворен образ $\sigma(U_0) \subseteq \mathfrak{S}$. За целта да отбележим, че всяка точка $\sigma(x) \in \mathfrak{S}$ с $x \in U_0$ има околност V_x върху $\mathfrak{S}$, така че $\pi : V_x \to \pi(V_x)$ е хомеоморфизъм. В резултат получаваме непрекъснато сечение $\pi^{-1} : \pi(V_x) \to V_x$ на $\mathfrak{S}$ над околността $\pi(V_x)$ на $\pi\sigma(x) = x$ върху X. Доколкото $\pi^{-1}\pi\sigma(x) = \sigma(x)$, по Лема 7.12 съществува околност U_x на x върху U_0, така че $\sigma|_{U_x} = \pi^{-1}|_{U_x}$. В резултат получаваме

$$\sigma(U_0) = \cup_{x \in U_0} \sigma(x) \subseteq \cup_{x \in U_0} \sigma(U_x) \subseteq \sigma(U_0),$$

откъдето $\sigma(U_0) = \cup_{x \in U_0} \sigma(U_x) = \cup_{x \in U_0} \pi^{-1}(U_x)$. Вземайки предвид, че U_x са отворени и $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е непрекъснато, стигаме до заключението, че $\sigma(U_0)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$, Q.E.D.
Преди да формулираме следващото твърдение да отбележим в качеството на несъществена модификация на Лема-Определение 7.10, че ако $\mathfrak{I}$ е отворено подмножество на сноп от F-алгебри $\pi : \mathfrak{S} \to X$, така че всеки слой $\mathfrak{S}_x = \pi^{-1}(x)$ пресича $\mathfrak{I}$ в идеал $\mathfrak{I}_x := \mathfrak{S}_x \cap \mathfrak{I}$ на $\mathfrak{S}$ с $\mathfrak{I}_x \cap F_x = \{0_{\mathfrak{S}}\}$, то казваме, че $\mathfrak{I}$ е сноп от идеали в $\mathfrak{S}$ с $\mathfrak{I}_x \cap F_x = \{0_{\mathfrak{S}}\}$ за всяко $x \in X$. Това означава, че проекцията $\pi : \mathfrak{S} \to X$ се ограничава до локален хомеоморфизъм $\pi_o : \mathfrak{I} \to X$ и послойно определените изваждане и умножение в са неперкъснати изображение.

4. Фактор-сноп.

Твърдение 7.15. *(i) Ако $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове от R-модули, то ядрото*

$$Ker(f) := \{s \in \mathfrak{S} \mid f(s) = 0_{\pi_1(s)}\}$$

е подсноп на $\pi_1 : \mathfrak{S} \to X$, а образът

$$Im(f) := \{f(s) \mid s \in \mathfrak{S}\}$$

е подсноп на $\pi_2 : \mathfrak{T} \to X$.
(ii) Ако $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове от F-алгебри, то ядрото

$$Ker(f) := \{s \in \mathfrak{S} \mid f(s) = 0_{\pi_1(s)}\}$$

е подсноп от идеали в $\mathfrak{S}$, пресичащи тривиално F, а образът

$$Im(f) := \{f(s) \mid s \in \mathfrak{S}\}$$

е подсноп от F-алгебри в $\mathfrak{T}$.

Доказателство: Ако $\sigma_0 : X \to \mathfrak{T}$ е нулевото сечение на $\mathfrak{T}$, то $Ker(f) = f^{-1}\sigma_0(X)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{S}$, доколкото σ_0 е отворено изображение съгласно Лема 7.14 и f е непрекъснато по определение. От своя страна, $Im(f) = f(\mathfrak{S})$ е отворено подмножество на $\mathfrak{T}$, защото f е отворено.
В случая на снопове от R-модули, $Ker(f)_x := Ker(f) \cap \mathfrak{S}_x$ са подмодули на $\mathfrak{S}_x := \pi_1^{-1}(x)$, а $Im(f)_x := Im(f) \cap \mathfrak{T}_x$ са подмодули на $\mathfrak{T}_x := \pi_2^{-1}(x)$ за $\forall x \in X$. По определение, това означава, че $Ker(f)$ е подсноп на $\mathfrak{S}$ и $Im(f)$ е подсноп на $\mathfrak{T}$.
Ако $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ са снопове от F-алгебри, то $Ker(f)_x := Ker(f) \cap \mathfrak{S}_x$ са идеали в $\mathfrak{S}_x$ с $Ker(f)_x \cap F_x = \{0_{\pi_1^{-1}(x)}\}$, а $Im(f)_x := Im(f) \cap \mathfrak{T}_x$ са F-подалгебри. Следователно $Ker(f)$ е сноп от идеали, а $Im(f)$ е подсноп на $\mathfrak{T}$, Q.E.D.

Лема-Определение 7.16. *Ако $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ е фамилията на отворените подмножества на топологичното пространство X, а $f : X \to Y$ е изображение върху множеството Y, то съществува еднозначно определена фактор-топология върху Y, чиито отворени подмножества са онези $(V_\beta)_{\beta \in B}$, които имат отворени праобрази $f^{-1}(V_\beta) \subseteq X$.*
Относно така въведената топология $f : X \to Y$ е непрекъснато изображение.

Доказателство: Трябва да проверим, че $V_\beta \subseteq Y$ с отворени $f^{-1}(V_\beta) \subseteq X$ изпълняват свойствата на отворените подмножества на топология. Празното подмножество $\emptyset \subset Y$ има празен праобраз $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и принадлежи на разглежданата фамилия $(V_\beta)_{\beta \in B}$. Цялото множество Y е също от фамилията, защото $f^{-1}(Y) = X$ е отворено в X. Ако $f^{-1}(V_\gamma)$ са отворени в X за всички $\gamma \in \Gamma \subseteq B$, то $f^{-1}(\cup_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma = \cup_{\gamma \in \Gamma} f^{-1}(V_\gamma)$ е отворено в X, така че разглежданата фамилия е затворена относно произволни обединения. Накрая, за $V_{\beta_1}, \ldots V_{\beta_n}$ от тази фамилия праобразът $f^{-1}(\cap_{i=1}^k V_{\beta_i}) = \cap_{i=1}^k f^{-1}(V_{\beta_i})$ е отворен в X, така че $(V_\beta)_{\beta \in B}$ задава топология върху Y, Q.E.D.

Лема-Определение 7.17. *(i)Нека $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е сноп от R-модули, $\mathfrak{S}'$ е подсноп на $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T} := \cup_{x \in X} \mathfrak{S}_x / \mathfrak{S}'_x$ е непресичащо се обединение на фактор-модулите $\mathfrak{S}_x / \mathfrak{S}'_x$, а $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е фамилията от естествените хомоморфизми $\mathfrak{S}_x \to \mathfrak{S}_x / \mathfrak{S}'_x$. Тогава $\mathfrak{T}$ е сноп от R-модули относно фактор-топологията, индуцирана от τ и проекцията $\overline{\pi} : \mathfrak{T} \to X$, $\overline{\pi}(s + \mathfrak{S}'_x) := x$ за $\forall s \in \mathfrak{S}_x$, а $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове. Снопът $\mathfrak{T}$ се нарича фактор-сноп на $\mathfrak{S}$ относно $\mathfrak{S}'$.*
(ii) Нека $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е сноп от F-алгебри, $\pi|_{\mathfrak{I}} : \mathfrak{I} \to X$ е сноп от идеали $\mathfrak{I}_x \triangleleft \mathfrak{S}_x$ с $\mathfrak{I}_x \cap F_x = \{0_{\mathfrak{S}_x}\}$, $\mathfrak{T} := \cup_{x \in X} \mathfrak{S}_x / \mathfrak{I}_x$ е непресичащо се обединение на фактор-алгебрите $\mathfrak{S}_x / \mathfrak{I}_x$, а $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, $\tau(s) = s + \mathfrak{I}_{\pi(s)}$ за $\forall s \in \mathfrak{S}$ е фамилията от

естествените хомоморфизми. Тогава $\mathfrak{T}$ е сноп от F-алгебри относно фактор-топологията, индуцирана от τ и проекцията $\overline{\pi} : \mathfrak{T} \to X$, $\overline{\pi}(s + \mathfrak{I}_x) := x$ за $\forall s \in \mathfrak{S}_x$, а $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове от F-алгебри. Снопът $\mathfrak{T}$ се нарича фактор-сноп на $\mathfrak{S}$ относно $\mathfrak{I}$.

Доказателство: И в двата случая да отбележим наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\overline{\pi}"] \\ X & \end{tikzcd} .$$

Изображението $\overline{\pi}$ е непрекъснато, защото за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ праобразът $\pi^{-1}(U) = (\overline{\pi}\tau)^{-1}(U) = \tau^{-1}\overline{\pi}^{-1}(U)$ е отворен в $\mathfrak{S}$ съгласно непрекъснатостта на π. По определението за фактор-топология, индуцирана от τ, това означава, че $\overline{\pi}^{-1}(U)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{T}$. По-нататък, $\overline{\pi}$ е отворено, доколкото всяко $V \subseteq \mathfrak{T}$ с отворено $\tau^{-1}(V) \subseteq \mathfrak{S}$ има отворен образ $\pi\tau^{-1}(V) = \overline{\pi}\tau\tau^{-1}(V) = \overline{\pi}(V) \subseteq X$. За да докажем едновременно локалната хомеоморфност на $\overline{\pi}$ и отвореността на τ, да напомним, че всяка точка $s \in \mathfrak{S}$ има околност U_s върху $\mathfrak{S}$, така че $\pi = \overline{\pi}\tau : U_s \to \pi(U_s)$ е хомеоморфизъм. Взаимната еднозначност на $\pi|_{U_s}$ влече взаимната еднозначност на $\tau : U_s \to \tau(U_s)$ и $\overline{\pi} : \tau(U_s) \to \pi(U_s)$, така че $\overline{\pi} : \overline{\pi}^{-1}\pi(U_s) \to \pi(U_s)$ е хомеоморфизъм на отвореното подмножество $\overline{\pi}^{-1}\pi(U_s) \subseteq \mathfrak{T}$ върху отвореното подмножество $\pi(U_s) \subseteq X$. (Тук използваме, че π е отворено, а $\overline{\pi}$ е непрекъснато и отворено.) Така за всяка точка $t \in \mathfrak{T}$ избираме $s \in \tau^{-1}(t)$ и получаваме околност $\overline{\pi}^{-1}\pi(U_s)$ на $\overline{\pi}^{-1}\pi(s) = \overline{\pi}^{-1}\overline{\pi}\tau(s) = t$, върху която $\overline{\pi}$ се ограничава до хомеоморфизъм. С това се установява, че $\overline{\pi} : \mathfrak{T} \to X$ е локален хомеоморфизъм. Сега умножавайки отляво хомеоморфизма $\pi|_{U_s} = \overline{\pi}\tau|_{U_s}$ с хомеоморфизма $\overline{\pi}^{-1}|_{\pi(U_s)}$ получаваме, че $\tau|_{U_s} = \overline{\pi}^{-1}\pi|_{U_s}$ е хомеоморфизъм върху образа си като композиция на хомеоморфизми. В частност, $\tau(U_s)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{T}$, стига $\pi : U_s \to \pi(U_s)$ да е хомеоморфизъм. Произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{S}$ се представя като обединение $U = \cup_{s \in U} U_s$ на отворени подмножества $U_s \subseteq U$, върху които $\pi : U_s \to \pi(U_s)$ са хомеоморфизми. Тогава $\tau(U) = \tau(\cup_{s\in U} U_s) = \cup_{s\in U}\tau(U_s)$ е отворено подмножество на $\mathfrak{T}$ като обединение на отворените $\tau(U_s)$. Изображението $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ върху $\mathfrak{T}$ е непрекъснато съгласно определението за фактор-топология върху $\mathfrak{T}$, т.е. всяко отворено $V \subseteq \mathfrak{T}$ има отворен праобраз $\tau^{-1}(V) \subseteq \mathfrak{S}$. Следователно $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е морфизъм на снопове като непрекъснато отворено изображение, съгласувано с проекциите $\pi = \overline{\pi}\tau$.

За да проверим непрекъснатостта на операциите $\circ_{\mathfrak{T}}$ в $\mathfrak{T}$ използваме, че те са индуцирани от операциите $\circ_{\mathfrak{S}}$ в $\mathfrak{S}$. По-точно, в комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "\circ_{\mathfrak{S}}"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathfrak{S} \arrow[d, "\tau"'] \\ \mathfrak{T} \arrow[r, "\circ_{\mathfrak{T}}"] & \mathfrak{T} \end{tikzcd} \quad \text{или} \quad \begin{tikzcd} \Delta(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}) \arrow[r, "\circ_{\mathfrak{S}}"] \arrow[d, "{(\tau,\tau)}"'] & \mathfrak{S} \arrow[d, "\tau"'] \\ \Delta(\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}) \arrow[r, "\circ_{\mathfrak{T}}"] & \mathfrak{T} \end{tikzcd}$$

операциите $\circ_{\mathfrak{T}}$ са непрекъснати, доколкото $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е непрекъснато и отворено, а $\circ_{\mathfrak{S}}$ са непрекъснати. Следователно $\mathfrak{T}$ е сноп от R-модули или F-алгебри. Накрая $\tau : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове като фамилия от хомоморфизми $\tau_x : \mathfrak{S}_x \to \mathfrak{T}_x$, Q.E.D.

Следствие 7.18. *Ако $f : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е хомоморфизъм на снопове от R-модули или F-алгебри, то*

$$\overline{f} : \mathfrak{S}/Ker(f) \longrightarrow Im(f),$$
$$\overline{f}(s_x + Ker(f)_x) = f(s_x)$$

е изоморфизъм на снопове от R-модули или, съответно, F-алгебри.

Доказателство: За да установим комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}/Ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{\pi_1}"'] & Im(f) \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd},$$

да напомним наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{T} \arrow[dl, "\pi_2"] \\ X & \end{tikzcd},$$

която дава $\pi_2\overline{f}(s_x + Ker(f)_x) = \pi_2 f(s_x) = \pi_1(s_x)$ за $\forall s_x + Ker(f)_x \in \mathfrak{S}/Ker(f)$. За проверка на непрекъснатостта и отвореността на $\overline{f}$ да напомним наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S} \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathfrak{S}/Ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] & Im(f) \end{tikzcd}.$$

За всяко отворено подмножество $W \subseteq Im(f)$, праобразът $f^{-1}(W) = (\overline{f}\tau)^{-1}(W) = \tau^{-1}\overline{f}^{-1}(W)$ е отворен в $\mathfrak{S}$. Следователно $\overline{f}^{-1}(W)$ е отворено във фактор-топологията на $\mathfrak{S}/Im(f)$. Аналогично, за всяко отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{S}/Ker(f)$, множеството $\tau^{-1}(V) \subseteq \mathfrak{S}$ е отворено по определението за фактор-топология и $\overline{f}(V) = \overline{f}\tau\tau^{-1}(V) = f\tau^{-1}(V)$ е отворено в $Im(f)$ съгласно отвореността на f. С това установихме, че $\overline{f} : \mathfrak{S}/Ker(f) \to \mathfrak{T}$ е морфизъм на снопове. По определение, $\overline{f}$ се ограничава до изоморфизми $\overline{f}_x : \mathfrak{S}_x/Ker(f)_x \to \mathfrak{T}_x$ на слоевете, така че $\overline{f}$ е изоморфизъм на снопове, Q.E.D.