Лекция 6

Ко-верижни комплекси и кохомологии. Сингулярни кохомологии и гладки сингулярни кохомологии.

1. Определения.

Определение 6.1. *Фамилията* $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *от леви (десни)* R*-модули* C^n *и* R*-модулни хомоморфизми* $d^n : C^n \to C^{n+1}$ *образува ко-верижен комплекс, ако* $d^{n+1}d^n \equiv 0$ *за* $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots .$$

Определение 6.2. *Ако* $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *е ко-верижен комплекс от* R*-модули, то елементите на* R*-подмодулите*

$$Z^n(C^\bullet) := Ker(d^n) = \{c \in C^n \,|\, d^n(c) = 0_{C^{n+1}}\}$$

на C^n *се наричат ко-цикли, а елементите на* R*-подмодулите*

$$B^n(C^\bullet) := Im(d^{n-1}) = \{d^{n-1}(c) \,|\, c \in C^{n-1}\}$$

на C^n *се наричат ко-граници.*

Възоснова на $d^n d^{n-1} \equiv 0$, ко-границите $B^n(C^\bullet)$ се съдържат в ко-циклите $Z^n(C^\bullet)$, така че можем да определим

Определение 6.3. *Кохомологиите на ко-верижен комплекс* $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *от* R*-модули са фактор-модулите*

$$H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)//B^n(C^\bullet) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Лема-Определение 6.4. *Нека* R *е комутативен пръстен с единица.*
(i) Ако $\{(S_n(X,R), \partial_n)\}_{n\geq 0}$ *е сингулярният верижен комплекс на топологично пространство* X*, то*

$$S^n(X,R) := Hom_R(S_n(X,R), R)$$

са R*-модули, а*

$$d^n : S^n(X,R) \longrightarrow S^{n+1}(X,R),$$
$$d^n(f) := f\partial_{n+1} \quad \text{за } \forall f \in S^n(X,R)$$

са хомоморфизми на R*-модули, които образуват така наречения сингулярен ко-верижен комплекс* $\{(S^n(X,R), d^n)\}_{n\geq 0}$ *на* X*.*
(ii) Ако $\{(S_n^\infty(M,R), \partial_n)\}_{n\geq 0}$ *е гладкият сингулярен верижен комплекс на гладко многообразие* M*, то*

$$S^n_\infty(M,R) := Hom_R(S^\infty_n(M,R), R)$$

са R*-модули, а*

$$d^n : S^n_\infty(M,R) \longrightarrow S^n_\infty(M,R),$$
$$d^n(f) := f\partial_{n+1} \quad \text{за } \forall f \in S^n_\infty(M,R)$$

са хомоморфизми на R*-модули, образуващи така наречения гладък сингулярен ко-верижен комплекс* $\{(S^n_\infty(M,R), d^n)\}_{n\geq 0}$ *на* M*.*

Доказателство: Ще докажем само (i), доколкото разглежданията за (ii) са напълно аналогични. В Твърдение 9 (ii) от Въпрос 3 проверихме, че $S^n(X,R) := Hom_R(S_n(X,R),R)$ е R-модул относно поточковото събиране

$$(\varphi+\psi)(\gamma_n) := \varphi(\gamma_n)+\psi(\gamma_n)$$

за $\varphi,\psi \in Hom_R(S_n(X,R),R)$, $\gamma_n \in S_n(X,R)$ и поточковото умножение

$$(r\varphi)(\gamma_n) := r\varphi(\gamma_n)$$

с $r \in R$. Да напомним, че комутативността на пръстена R беше съществена за R-модулността на $r\varphi$. Композицията $f\partial_{n+1}S_{n+1}(X,R) \to R$ на R-модулните хомоморфизми ∂_{n+1} и f е хомоморфизъм на R-модули, така че $f\partial_{n+1} \in S^{n+1}(X,R)$. Така определените изображения $d^n : S^n(X,R) \to S^{n+1}(X,R)$ са хомоморфизми на R-модули, доколкото

$$d^n(f+g) = (f+g)\partial_{n+1} = f\partial_{n+1} + g\partial_{n+1} = d^n(f) + d^n(g)$$

и

$$d^n(rf) = (rf)\partial_{n+1} = r(f\partial_{n+1}) = rd^n(f)$$

за произволни $f,g \in S^n(X,R)$ и $r \in R$. Остава да проверим, че $d^n d^{n-1}(\varphi) = d^n(\varphi\partial_n) = \varphi\partial_n\partial_{n+1} \equiv 0$, за да твърдим, че $\{(S^n(X,R),d^n)\}_{n\geq 0}$ е ко-верижен комплекс от R-модули, Q.E.D.

Определение 6.5. *Ко-циклите $Z^n(X,R) := Ker(d^n)$ на сингулярния ко-верижен комплекс $\{(S^n(X,R),d^n)\}_{n\geq 0}$ се наричат сингулярни ко-цикли. Ко-границите $B^n(X,R) := Im(d^{n-1})$ на $\{(S^n(X,R),d^n)\}_{n\geq 0}$ се наричат сингулярни ко-граници, а фактор-модулите*

$$H^n(X,R) := Z^n(X,R)/B^n(X,R)$$

носят името сингулярни кохомологии на топологичното пространство X. Ако M е многообразие, то ко-циклите $Z^n_\infty(M,R) := Ker(d^n)$ на гладкия сингулярен ко-верижен комплекс на M се наричат гладки сингулярни ко-цикли, а ко-границите $B^n_\infty(M,R) := Im(d^{n-1})$ се наричат гладки сингулярни ко-граници. Фактор-модулите

$$H^n_\infty(M,R) := Z^n_\infty(M,R)/B^n_\infty(M,R)$$

носят името гладки сингулярни кохомологии на M.

За пълнота да определим

Определение 6.6. *Нека $\{(C^n,d^n_C)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D^n,d^n_D)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са ко-верижни комплекси от R-модули. Фамилията $f^\bullet = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ от хомоморфизми на R-модули $f^n : C^n \to D^n$ образува морфизъм на тези ко-верижни комплекси, ако*

$$\begin{tikzcd} C^n \arrow[r, "d^n_C"] \arrow[d, "f^n"'] & C^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\ D^n \arrow[r, "d^n_D"] & D^{n+1} \end{tikzcd},$$

$d^n_D f^n = f^{n+1} d^n_C$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Всеки морфизъм $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ на ко-верижни комплекси от R-модули индуцира хомоморфизми

$$f^n : Z^n(C^\bullet) \longrightarrow Z^n(D^\bullet)$$

на ко-циклите, доколкото за всяко $z \in Z^n(C^\bullet)$ е в сила $d^n_D f^n(z) = f^{n+1}d^n_C(z) = f^{n+1}(0) = 0$. Аналогично, f^n се ограничават до хомоморфизми

$$f^n : B^n(C^\bullet) \longrightarrow B^n(D^\bullet),$$

съгласно $f^n d_C^{n-1}(c) = d_D^{n-1} f^{n-1}(c) \in B^n(D^\bullet)$ за всяко $c \in C^{n-1}$. Композицията $\pi_D^n f^n : Z^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ с естествения епиморфизъм $\pi_D^n : Z^n(D^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ с ядро $B^n(D^\bullet)$ се пропусква през $H^n(C^\bullet)$, защото $Ker(\pi_C^n) = B^n(C^\bullet) \subseteq Ker(\pi_D^n f^n|_{Z^n(C^\bullet)})$, т.е. $\pi_D^n f^n d_C^{n-1}(c) = \pi_D^n d_D^{n-1} f^{n-1}(c) = 0 \in H^n(D^\bullet)$. С това получаваме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} Z^n(C^\bullet) \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\pi_C^n"'] & Z^n(D^\bullet) \arrow[d, "\pi_D^n"] \\ H^n(C^\bullet) \arrow[r, "H(f^n)"] & H^n(D^\bullet) \end{tikzcd},$$

където $H(f^n)(z + B^n(C^\bullet)) = f^n(z) + B^n(D^\bullet)$ е еднозначно определено от f^n.
Ако $f^\bullet : \{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \{(D^n, \delta^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $g^\bullet : \{(D^n, \delta^n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \{(E^n, \varepsilon^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са морфизми на ко-верижни комплекси от R-модули, то тяхната композиция

$$g^\bullet f^\bullet : \{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{(E^n, \varepsilon^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

е морфизъм на ко-верижни комплекси, индуциращ хомоморфизмите

$$H((g^\bullet f^\bullet)^n) = H(g^n)H(f^n) : H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^n(E^\bullet).$$

Проверката на това, че $g^\bullet f^\bullet = \{g^n f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм на ко-верижни комплекси е напълно аналогична на тази за композиция на морфизми на верижни комплекси, направена във Въпрос 2. Съгласно $(g^\bullet f^\bullet)^n = g^n f^n$ непосредствено пресмятаме, че

$$H(g^n f^n)(c + B^n(C^\bullet)) = g^n f^n(c) + B^n(E^\bullet) =$$

$$H(g^n)(f^n(c) + B^n(D^\bullet)) = H(g^n)H(f^n)(c + B^n(C^\bullet))$$

за $\forall c \in Z^n(C^\bullet)$.
Да отбележим също, че тъждественият морфизъм $f^\bullet : C^\bullet \to C^\bullet$, $f^n = \mathrm{Id}_{C^n}$ на ко-верижен комплекс $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ индуцира тъждествените хомоморфизми на кохомологиите $H(f^n) = \mathrm{Id}_{H^n(C^\bullet)}$, доколкото

$$H(f^n)(c + B^n(C^\bullet)) = f^n(c) + B^n(C^\bullet) = c + B^n(C^\bullet)$$

за $\forall c \in Z^n(C^\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Изоморфизъм на ко-верижни комплекси $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D^n, \delta^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм на ко-верижни комплекси $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ с взаимно-еднозначни $f^n : C^n \to D^n$ за всички $n \in \mathbb{Z}$. Непосредствено се проверява, че ако $f^\bullet = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е изоморфизъм на ко-верижни комплекси, то $(f^\bullet)^{-1} : \{(f^n)^{-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм, а оттам и изоморфизъм на ко-верижни комплекси. Всеки изоморфизъм $f^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ на ко-верижни комплекси индуцира изоморфизми $H(f^n) : H^n(C^\bullet) \to H^n(D^\bullet)$ на кохомологиите, защото

$$H((f^n)^{-1})H(f^n) = H((f^n)^{-1} f^n) = H(\mathrm{Id}_{C^n}) = \mathrm{Id}_{H^n(C^\bullet)},$$

$$H(f^n)H((f^n)^{-1}) = H(f^n (f^n)^{-1}) = H(\mathrm{Id}_{D^n}) = \mathrm{Id}_{H^n(D^\bullet)}$$

за $\forall n \in \mathbb{Z}$. С други думи, $H(f^n)$ са взаимно-еднозначни хомоморфизми на R-модули и техните обратни $H(f^n)^{-1} = H((f^n)^{-1})$.

2. Съгласуваност с непрекъснати (гладки) изображения.

Твърдение 6.7. *Нека R е комутативен пръстен с единица.*

(i) Всяко непрекъснато изображение $f : X \to Y$ на топологични пространства индуцира морфизъм на сингулярните ко-верижни комплекси

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = S^{-1}(Y,R) & \xrightarrow{d_Y^{-1}} & S^0(Y,R)\dots & & \dots S^n(Y,R) & \xrightarrow{d_Y^n} & S^{n+1}(Y,R)\dots \\ \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} \\ 0 = S^{-1}(X,R) & \xrightarrow{d_X^{-1}} & S^0(X,R)\dots & & \dots S^n(X,R) & \xrightarrow{d_X^n} & S^{n+1}(X,R)\dots \end{array},$$

откъдето и R-модулни хомоморфизми

$$H(f^n) : H^n(Y,R) \longrightarrow H^n(X,R).$$

на съответните сингулярни кохомологии.
(ii) Ако $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ са непрекъснати изображения на топологични пространства, то тяхната композиция $gf : X \to Z$ индуцира композицията $(gf)^\bullet = f^\bullet g^\bullet : S^\bullet(Z,R) \to S^\bullet(X,R)$ на морфизмите $g^\bullet : S^\bullet(Z,R) \to S^\bullet(Y,R)$ и $f^\bullet : S^\bullet(Y,R) \to S^\bullet(X,R)$ на сингулярните ко-верижни комплекси. Оттук $H((gf)^n) = H(f^n)H(g^n) : H^n(Z,R) \to H^n(X,R)$.
(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : X \to X$ на топологично пространство индуцира тъждествения морфизъм $\mathrm{Id}^\bullet = (\mathrm{Id}^n)_{n=0}^\infty$, $\mathrm{Id}^n = \mathrm{Id}_{S^n(X,R)}$ на сингулярния ко-верижен комплекс $S^\bullet(X,R)$ а оттам и тъждествените хомоморфизми $H(\mathrm{Id}^n) = \mathrm{Id}_{H^n(X,R)}$ на сингулярните кохомологии.

Доказателство: (i) За произволно $\varphi \in S^n(Y,R)$ определяме $f^n(\varphi) := \varphi f_n$ като изображение на $S_n(X,R)$ в R. В качеството си на композиция на R-модулни хомоморфизми, $f^n(\varphi) \in Hom_R(S_n(X,R),R)$. С това получаваме съответствие $f^n : S^n(Y,R) \to S^n(X,R)$. Непосредствено се проверява, че f^n са хомоморфизми на R-модули, доколкото

$$f^n(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)f_n = \varphi f_n + \psi f_n = f^n(\varphi) + f^n(\psi)$$

за $\varphi,\psi \in S^n(Y,R) = Hom_R(S_n(Y,R),R)$ и

$$f^n(r\varphi) = (r\varphi)f_n = r(\varphi f_n) = rf^n(\varphi)$$

за $\forall r \in R$. Остава да установим, че $f^{n+1}d_Y^n = d_X^n f^n$. Наистина, за произволно $\varphi \in S^n(Y,R)$ е изпълнено

$$f^{n+1}d_Y^n(\varphi) = f^{n+1}(\varphi\partial_{n+1}^Y) = \varphi\partial_{n+1}^Y f_{n+1} = \varphi f_n \partial_{n+1}^X = d_X^n(\varphi f_n) = d_X^n f^n(\varphi),$$

защото $f_n : S_n(X,R) \to S_{n-1}(Y,R)$ образуват морфизъм на сингулярните верижни комплекси и

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1}(X,R) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & S_n(X,R) \\ \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ S_{n+1}(Y,R) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y} & S_n(Y,R) \end{array},$$

$f_n\partial_{n+1}^X = \partial_{n+1}^Y f_{n+1}$. Следователно $f^n : S^n(Y,R) \to S^n(X,R)$ образуват морфизъм на сингулярните ко-верижни комплекси. Вече отбелязахме, че всеки морфизъм на ко-верижни комплекси индуцира хомоморфизми на съответните кохомологии.
(ii) Достатъчно е да отбележим, че за $\forall\varphi \in S^n(Z,R)$ е в сила

$$(gf)^n(\varphi) = \varphi(gf)_n = \varphi g_n f_n = f^n(\varphi g_n) = f^n g^n(\varphi),$$

доколкото морфизмът $(gf)_\bullet : S_\bullet(X,R) \to S_\bullet(Z,R)$ на сингулярните верижни комплекси е композиция на морфизмите $f_\bullet : S_\bullet(X,R) \to S_\bullet(Y,R)$ и $g_\bullet : S_\bullet(Y,R) \to S_\bullet(Z,R)$. Оттук $(gf)^\bullet = f^\bullet g^\bullet$ и $H((gf)^n) = H(f^n g^n) = H(f^n)H(g^n)$.

(iii) По определение, $\mathrm{Id}^n : S^n(X,R) \to S^n(X,R)$ действа по правилото $\mathrm{Id}^n(\varphi) = \varphi \mathrm{Id}_n = \varphi$ върху $\forall \varphi \in S^n(X,R)$, доколкото $\mathrm{Id}_\bullet = \{\mathrm{Id}_{S_n(X,R)}\}_{n=0}^\infty$. С други думи, $\mathrm{Id}^n = \mathrm{Id}_{S^n(X,R)}$, откъдето $H(\mathrm{Id}^n) = \mathrm{Id}_{H^n(X,R)}$ за $\forall n \geq 0$, Q.E.D.

Твърдение 6.8. *Нека R е комутативен пръстен с единица.*
(i) Всяко гладко изображение $f : M \to N$ на гладки многообразия индуцира морфизъм на гладките сингулярни ко-верижни комплекси

$$\begin{tikzcd}
0 = S^{-1}_\infty(N,R) \arrow[r, "d^{-1}_N"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & S^0_\infty(N,R)\dots \arrow[d, "f^0"'] & \dots S^n_\infty(N,R) \arrow[r, "d^n_N"] \arrow[d, "f^n"'] & S^{n+1}_\infty(N,R)\dots \arrow[d, "f^{n+1}"'] \\
0 = S^{-1}_\infty(M,R) \arrow[r, "d^{-1}_M"] & S^0_\infty(M,R)\dots & \dots S^n_\infty(M,R) \arrow[r, "d^n_M"] & S^{+11}_\infty(M,R)\dots
\end{tikzcd}$$

откъдето и R-модулни хомоморфизми на гладките сингулярни кохомологии

$$H(f^n) : H^n_\infty(N,R) \longrightarrow H^n_\infty(M,R).$$

(ii) Композицията на гладките изображения $f : M \to N$ и $g : N \to$ на гладки многообразия индуцира композицията

$$(gf)^\bullet = f^\bullet g^\bullet : S^\bullet_\infty(P,R) \longrightarrow S^\bullet_\infty(M,R)$$

на морфизмите $g^\bullet : S^\bullet_\infty(P,R) \to S^\bullet_\infty(N,R)$ и $f^\bullet : S^\bullet_\infty(N,R) \to S^\infty_\infty(M,R)$ на гладките сингулярни ко-верижни комплекси, а оттам и хомоморфизмите

$$H((gf)^n) = H(f^n)H(g^n) : H^n_\infty(P,R) \longrightarrow H^n_\infty(M,R)$$

на гладките сингулярни кохомологии.
(iii)Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : M \to M$ на гладко многообразие M индуцира тъждествения морфизъм $\mathrm{Id}^\bullet = (\mathrm{Id}^n)_{n=0}^\infty$, $\mathrm{Id}^n = \mathrm{Id}_{S^n_\infty(M,R)}$ на гладкия сингулярен ко-верижен комплекс на M и тъждествените хомоморфизми $H(\mathrm{Id}^n) = \mathrm{Id}_{H^n_\infty(M,R)}$ на гладките сингулярни кохомологии

Доказателство: Да отбележим само, че за произволна гладка сингулярна ко-верига $\psi \in S^n_\infty(N,R)$, композицията $f^n(\psi) := \psi f_n$ се ограничава до гладка сингулярна ко-верига върху M, доколкото $f_n(S^\infty_n(M,R)) \subseteq S^\infty_n(N,R)$ и $\psi \in Hom_R(S^\infty_n(N,R),R)$. С това получаваме R-модулен хомоморфизъм

$$f^n : S^n_\infty(N,R) \longrightarrow S^n_\infty(M,R).$$

Останалата част от доказателството повтаря Твърдение 6.7, Q.E.D.

Следствие 6.9. *Нека R е комутативен пръстен с единица.*
(i) Всеки хомеоморфизъм $f : X \to Y$ на топологични пространства индуцира изоморфизъм

$$f^\bullet : S^\bullet(Y,R) \longrightarrow S^\bullet(X,R)$$

на съответните сингулярни ко-верижни комплекси, а оттам и R-модулни изоморфизми на сингулярните кохомологии

$$H(f^n) : H^n(Y,R) \longrightarrow H^n(X,R).$$

(ii) Всеки дифеоморфизъм $f : M \to N$ на гладки многообразия индуцира изоморфизъм

$$f^\bullet : S^\bullet_\infty(N,R) \longrightarrow S^\bullet_\infty(M,R)$$

на гладките сингулярни ко-верижни комплекси, а оттам и изоморфизми

$$H(f^n) : H^n_\infty(N,R) \longrightarrow H^n_\infty(M,R)$$

на гладките сингулярни кохомологии.

Доказателство: Ще проверим само (i), доколкото разсъждението за (ii) е аналогично. Съгласно Твърдение 6.7 (ii) и (iii) имаме

$$f^n (f^{-1})^n = (f^{-1} f)^n = (\mathrm{Id}_X)^n = \mathrm{Id}_{S^n(X,R)},$$

и

$$(f^{-1})^n f^n = (f f^{-1})^n = (\mathrm{Id}_Y)^n = \mathrm{Id}_{S^n(Y,R)}.$$

Следователно $f^n : S^n(Y, R) \to S^n(X, R)$ са изоморфизми на R-модули с $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$, така че $f^\bullet : S^\bullet(Y, R) \to S^\bullet(X, R)$ е изоморфизъм на сингулярните коверижни комплекси, Q.E.D.