Лекция 5

Сингулярни хомологии на топологично пространство. Гладки сингулярни хомологии на многообразие.

1. Симплекси. Афинна независимост.

За да определим понятието за сингулярни хомологии, трябва да се запознаем със симплекси и афинни изображения.

Определение 5.1. *Афинната обвивка $A(p_0, p_1, \dots, p_m)$ на точките $p_0, p_1, \dots, p_m$ от линейното пространство $\mathbb{R}^n$ на наредените n-торки реални числа се състои от афинните комбинации на тези точки, т.е.*

$$A(p_0, p_1, \dots, p_m) := \left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \,|\, \forall t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \right\}.$$

Определение 5.2. *Изпъкналата обвивка $C(p_0, p_1, \dots, p_m)$ на $p_0, p_1, p_m \in \mathbb{R}^n$ се определя като множеството от изпъкналите комбинации на $p_0, p_1, \dots, p_m$,*

$$C(p_0, p_1, \dots, p_m) := \left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \,|\, \forall t_i \in \mathbb{R}, \forall t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \right\}.$$

Определение 5.3. *Казваме, че точките $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими, ако векторите $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0 \in \mathbb{R}^n$ са линейно независими над $\mathbb{R}$.*

Например, всяка точка $p_0 \in \mathbb{R}^n$ е афинно независима, доколкото празното множество от вектори се счита за линейно независимо. Точките $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точно когато са различни. Точките $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими тогава и само тогава, когато не са колинеарни, а $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точно когато не са компланарни.

Определение 5.4. *Ако $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки, то тяхната изпъкнала обвивка се нарича m-симплекс и се бележи с $[p_0, p_1, \dots, p_m]$.*

Например, 0-симплексите $[p_0]$ са точки. По-нататък, 1-симплексите

$$[p_0, p_1] = \{p_0 + t_1(p_1 - p_0) \,|\, 0 \leq t_1 \leq 1\}$$

са отсечки, 2-симплексите

$$[p_0, p_1, p_2] = \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^{2} t_i(p_i - p_0) \,|\, \forall t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{2} t_i \leq 1 \right\}$$

са триъгълници, а 3-симплексите

$$[p_0, p_1, p_2, p_3] = \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^{3} t_i(p_i - p_0) \,|\, \forall t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} t_i \leq 1 \right\}$$

са плътни тетраедри.

Лема-Определение 5.5. *Следните условия са еквивалентни за* $p_0, p_1, \dots, p_m$ *от* $\mathbb{R}^n$:
(i) $p_0, p_1, \dots, p_m$ *са афинно независими;*
(ii) всяка точка p *от афинната обвивка* $A(p_0, p_1, \dots, p_m)$ *на* $p_0, p_1, \dots, p_m$ *има единствено представяне*

$$p = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \quad \text{с} \ \sum_{i=0}^{m} t_i = 1.$$

В такъв случай, реалните числа $t_0, t_1, \dots, t_m$ *се наричат барицентрични координати на точката* p *спрямо* $p_0, p_1, \dots, p_m$.

Доказателство: Нека $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки. Всяка точка $p \in A(p_0, p_1, \dots, p_m)$ има вида $p = \sum_{i=0}^m t_i p_i$ с $\sum_{i=0}^m t_i = 1$. Да допуснем, че $p = \sum_{i=0}^m s_i p_i$ за някакви $s_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^m s_i = 1$. Представяйки $p = (1 - \sum_{i=1}^m t_i) + \sum_{i=1}^m t_i p_i = p_0 + \sum_{i=1}^m t_i (p_i - p_0)$ и $p = p_0 + \sum_{i=1}^m s_i (p_i - p_0)$ получаваме равенството $\sum_{i=1}^m t_i (p_i - p_0) = \sum_{i=1}^m s_i (p_i - p_0)$. С това получаваме, че $\sum_{i=1}^m (t_i - s_i)(p_i - p_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Линейната независимост на $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0 \in \mathbb{R}^n$ изисква $t_i = s_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$. Оттам и $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^m t_i = 1 - \sum_{i=1}^m s_i = s_0$.
Обратно, да предположим, че всяка точка $p \in A(p_0, p_1, \dots, p_m)$ има единствено представяне като афинна комбинация на $p_0, p_1, \dots, p_m$, но точките $p_0, p_1, \dots, p_m$ от $\mathbb{R}^n$ не са афинно независими. Тогава векторите $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0 \in \mathbb{R}^n$ са линейно зависими. В случая $m = 1$ това означава, че $p_1 = p_0$, така че $p_0 \in A(p_0, p_1)$ се оказва с две различни представяния като афинни комбинации $t_0 p_0 + t_1 p_1$ с $t_0 + t_1 = 1$. За $m \geq 2$ линейната зависимост на $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0$ гарантира съществуването на $1 \leq j \leq m$, така че $p_j - p_0 = \sum_{i \neq j} t_i (p_i - p_0)$ е в линейната обвивка на останалите $m - 1$ вектора $p_i - p_0$, $i \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, m\}$. В резултат, $p_j = \left(1 - \sum_{i \neq j} t_i\right) p_0 + \sum_{i \neq j} t_i p_i$ придобива две различни представяния като афинни комбинации на $p_0, p_1, \dots, p_m$. Противоречието доказва, че афинната независимост е необходимо условие за единствеността на афинно представяне, Q.E.D.
Доколкото единтвеността на афинно представяне $\sum_{i=0}^m t_i p_i$ с $\sum_{i=0}^m t_i = 1$ не зависи от реда на точките $p_0, p_1, \dots, p_m$, непосредствено стигаме до заключението, че

Следствие 5.6. *Афинната независимост на точките* $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ *не зависи от техния ред.*

Лема 5.7. *Ако* $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ *са афинно независими точки, то афинната обвивка*

$$A(p_0, p_1, \dots, p_m) = l_{\mathbb{R}}(p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0) + p_0$$

е транслацията на m*-мерното линейно пространство*

$$l_{\mathbb{R}}(p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i (p_i - p_0) \,|\, r_i \in \mathbb{R} \right\}$$

с p_0. *В частност, за всяко* $0 \leq i \leq m$ *съществува взаимно-еднозначно изображение*

$$\kappa_i : A(p_0, p_1, \dots, p_m) \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\kappa_i \left(\sum_{j \neq i} t_j (p_j - p_i) + p_i \right) := (t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m).$$

Доказателство: Всяка точка на $A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ има вида

$$\sum_{i=0}^{m} t_i p_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{m} t_i\right) p_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i p_i = \sum_{i=1}^{m} t_i (p_i - p_0) + p_0$$

и принадлежи на линейната обвивка на $p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0$, транслирана с p_0. Обратно, всяка точка на $l_{\mathbb{R}}(p_1 - p_0, \ldots, p_m - p_0) + p_0$ се представя като $\sum_{i=1}^{m} t_i(p_i - p_0) + p_0 = (1 - \sum_{i=1}^{m} t_i)\, p_0 + \sum_{i=1}^{m} t_i p_i = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i$ с $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$ и попада в $A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$.

Съгласно Лема-Определение 5.5, реалните коефициенти $t_0, \ldots, t_{i-1}, 1-\sum_{j\neq i} t_j$, $t_{i+1}, \ldots, t_m$ от представянето $p = \sum_{j=0}^{m} t_j p_j = \sum_{j\neq i} t_j (p_j - p_i) + p_i$ с $\sum_{j=0}^{m} t_j = 1$ на точка $p \in A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ са единствени, така че

$$\kappa_i \left(\sum_{j=0}^{m} t_j p_j\right) = \kappa_i \left(\sum_{j\neq i} t_j (p_j - p_i) + p_i\right) := (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_m)$$

е коректно определено взаимно-еднозначно изображение, Q.E.D.

2. Афинни изображения.

Определение 5.8. *Ако $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки, то изображението*

$$T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

на тяхната афинна обвивка се нарича афинно, ако

$$T\left(\sum_{i=0}^{m} t_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i T(p_i)$$

за всяка точка $\sum_{i=0}^{m} t_i p_i \in A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ с $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$.

По определение, всяко афинно изображение $T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \to \mathbb{R}^k$ взема стойности в афинната обвивка на $T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)$ и може да се разглежда като

$$T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)).$$

Още повече, T се ограничава до изображение

$$T : [p_0, p_1, \ldots, p_m] \longrightarrow C(p_0, p_1, \ldots, p_m).$$

Твърдение 5.9. *Нека $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки. Тогава всяко изображение на множества*

$$\tau : \{p_0, p_1, \ldots, p_m\} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

се продължава до единствено афинно изображение

$$T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

с $T(p_i) = \tau(p_i)$ за $\forall 0 \leq i \leq m$.

Доказателство: Да определим $T\left(\sum_{i=0}^{m} t_i p_i\right) := \sum_{i=0}^{m} t_i \tau(p_i)$ за произволна точка $\sum_{i=0}^{m} t_i p_i \in A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ с $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$. Тогава, в частност, $T(p_i) = \tau(p_i)$ за всяко $0 \leq i \leq m$, така че $T\left(\sum_{i=0}^{m} t_i p_i\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i T(p_i)$ и T е афинно изображение. Ако $T' : A(p_0, p_1, ldots, p_m) \to \mathbb{R}^k$ е афинно изображение с $T'(p_i) = \tau(p_i)$, то за всяко $p = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i \in A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ с $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$ е в сила $T'(p) = \sum_{i=0}^{m} t_i T'(p_i) = \sum_{i=0}^{m} t_i \tau(p_i) = T(p)$. Следователно T' съвпада с T и афинното продължение T на τ е единствено, Q.E.D.

Определение 5.10. *Нека $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки. Афинното изображение $T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \to \mathbb{R}^k$ се нарича неизродено, ако образите $T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m) \in \mathbb{R}^k$ са афинно независими.*

Лема 5.11. *Ако $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки, а*

$$T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m))$$

е неизродено афинно изображение, то съществува неизродено афинно обратно

$$T^{-1} : A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)) \longrightarrow A(p_0, p_1, \ldots, p_m).$$

Доказателство: Съгласно афинната независимост на точките $T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)$, изображението на множества

$$T^{-1} : \{T(p_0), T(p_1), \ldots T(p_m)\} \longrightarrow A(p_0, p_1, \ldots, p_m),$$

$$T^{-1}(T(p_i)) = p_i \quad \text{за } \forall 0 \le i \le m$$

има единствено афинно продължение

$$T^{-1} : A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)) \longrightarrow A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$$

$$\text{с } T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m} t_i T(p_i)\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i p_i.$$

Афинното изображение T^{-1} е неизродено, защото $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими по предположение. Оттук следва, че $T^{-1}T = \mathrm{Id}_{A(p_0,p_1,\ldots,p_m)}$ и $TT^{-1} = \mathrm{Id}_{A(T(p_0),T(p_1),\ldots,T(p_m))}$, така че T и T^{-1} са взаимно обратни, Q.E.D.

Лема 5.12. *Нека $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са афинно независими точки,*

$$T : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m))$$

е неизродено афинно изображение, а

$$S : A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

е произволно афинно изображение. Тогава композицията

$$ST : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

е афинно изображение.

Доказателство: Непосредствено проверяваме, че

$$ST\left(\sum_{i=0}^{m} t_i p_i\right) = S\left(\sum_{i=0}^{m} t_i T(p_i)\right) = \sum_{i=0}^{m} t_i ST(p_i)$$

за произволни $t_i \in \mathbb{R}$ с $\sum_{i=0}^{m} t_i = 1$, Q.E.D.

3. Сингулярни симплекси.

За доказване на следващото свойство на неизродените афинни изображения са необходими няколко определения:

Определение 5.13. *Топологично пространство X е множество X с фамилия $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ от подмножества на X, наречени отворени, така че:*
(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{U}$;
(ii) $\cup_{\beta \in B} U_\beta \in \mathfrak{U}$ *за произволни* $U_\beta \in \mathfrak{U}$, $B \subseteq A$;
(iii) $U_{\beta_1} \cap \ldots U_{\beta_k} \in \mathfrak{U}$ *за* $U_{\beta_i} \in \mathfrak{U}$.

Определение 5.14. *Изображението $f : X \to Y$ на топологични пространства X и Y се нарича непрекъснато, ако всяко отворено подмножество $V \subseteq Y$ има отворен праобраз $f^{-1}(V) \subseteq X$.*

Например, в $\mathbb{R}^m$ считаме за отворени произволни обединения на паралелепипеди

$$P_{a,b} := \{t \in \mathbb{R}^m \,|\, a_j < t_j < b_j \text{ за } \forall 1 \leq j \leq m\},$$

където $a, b \in \mathbb{R}^m$, $a_j < b_j$.
За произволни афинно независими точки $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$, афинната обвивка $A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ е топологично пространство, чиито отворени подмножества са обединенията на $\kappa_0^{-1}(P_{a,b})$, където $\kappa_0 : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \to \mathbb{R}^m$ е взаимно-еднозначното изображение $\kappa_0\left(p_0 + \sum_{i=1}^m t_i(p_i - p_0)\right) := (t_1, \ldots, t_m)$ от Лема 5.7. По този начин κ_0 и κ_0^{-1} се оказват непрекъснати изображения.
Върху произволен m-симплекс $\Delta^m = [p_0, p_1, \ldots, p_m]$ въвеждаме топология, обявявайки за отворени всички сечения на отворени подмножества на афинната обвивка $A(p_0, p_1, \ldots, p_m)$ с $[p_0, p_1, \ldots, p_m]$. Това ни дава основание за следната

Лема 5.15. *Всяко неизродено афинно изображение*

$$T : [p_0, p_1, \ldots, p_m] \longrightarrow [T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)]$$

е непрекъснато заедно с афинното си обратно

$$T^{-1} : [T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)] \longrightarrow [p_0, p_1, \ldots, p_m].$$

Доказателство: По предположение, $p_0, p_1, \ldots, p_m$ и $T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)$ са афинно независими, така че съществуват взаимно-еднозначни изображения $\kappa_0 : A(p_0, p_1, \ldots, p_m) \to \mathbb{R}^m$ и $\kappa_0' : A(T(p_0), T(p_1), \ldots, T(p_m)) \to \mathbb{R}^m$ (виж Лема 5.7). Те се ограничават до

$$(\kappa_0')^{-1} \kappa_0 \left(\sum_{i=0}^m t_i p_i \right) = (\kappa_0')^{-1} \kappa_0 \left(\sum_{i=1}^m t_i (p_i - p_0) + p_0 \right) = (\kappa_0')^{-1} (t_1, \ldots, t_m) =$$

$$\sum_{i=1}^m t_i (T(p_i) - T(p_0)) + T(p_0) = \sum_{i=0}^m t_i T(p_i)$$

за произволни $\forall t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^m t_i = 1$. Следователно $T = (\kappa_0')^{-1} \kappa_0$ е непрекъснато изображение като композиция на непрекъснати. Аналогични разсъждения са в сила за T^{-1}, Q.E.D.

Определение 5.16. *Ако $\Delta^n = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ е n-симплекс, а X е топологично пространство, то непрекъснатите изображения*

$$\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow X$$

се наричат сингулярни n-симплекси.

Например, сингулярните 0-симплекси $\sigma_0 : \{p_0\} \to X$ се отъждествяват с образите си $x_0 = \sigma_0(p_0) \in X$. Сингулярните 1-симплекси

$$\sigma_1 : \Delta^1 = [p_0, p_1] = \{t_0 p_0 + (1 - t_0) p_1 \,|\, 0 \leq t_0 \leq 1\} \longrightarrow X$$

са пътища от $x_0 = \sigma_1(p_0) \in X$ до $x_1 = \sigma_1(p_1) \in X$ в X.

4. Сингулярен верижен комплекс.

Определение 5.17. *Нека R е асоциативен пръстен с единица, X е топологично пространство, а*

$$S_n(X, R) := \coprod_{\sigma_n} R\sigma_n$$

са свободните R-модули с базис сингулярните n-симплекси $\sigma_n : \Delta^n \to X$ за $n \geq 0$. Елементите на $S_n(X, R)$ се наричат сингулярни n-вериги. За удобство полагаме $S_{-1}(X, R) = 0$.

Оттук нататък ще представяме сингулярните n-вериги като крайни линейни комбинации $\sum_{\sigma_n} r(\sigma_n)\sigma_n$ с $r(\sigma_n) \in R$, отъждествявайки сингулярните n-симплекси σ_n с техните образи под действие на каноничните мономорфизми.

Определение 5.18. *Всеки връх p_i на n-симплекс $\Delta^n = [p_0, p_1, \dots, p_m]$ отговаря на i-тата стена*

$$[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_m] := \left\{ \sum_{j=0}^{n} t_j p_j \,|\, \forall t_j \geq 0, \sum_{j=0}^{n} t_j = 1, t_i = 0 \right\}$$

на Δ^n. Съгласно Лема-Определение5.5 (ii) и включването

$$[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n] \subseteq [p_0, p_1, \dots, p_n],$$

всяка стена $[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n]$ е $(n-1)$-симплекс и съответства на единственото неизродено афинно изображение

$$\varepsilon_i^n : [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}] \longrightarrow [p_0, p_1, \dots, p_n]$$

$$\text{с} \quad \varepsilon_i^n(p_j) := p_j \quad \text{за} \quad \forall j < i \quad \text{и} \quad \varepsilon_i^n(p_j) := p_{j+1} \quad \text{за} \quad j \geq i.$$

(виж Твърдение 5.9).

Определение 5.19. *За произволно естествено n границата на n-симплекс $\sigma_n : \Delta^n \to X$ се определя като $(n-1)$-веригата*

$$\partial_n \sigma_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_n \varepsilon_i^n \in S_{n-1}(X, R).$$

Считаме, че произволен сингулярен 0-симплекс $\sigma_0 : [p_0] \to X$ има граница $\partial_0 \sigma_0 = 0 \in S_{-1}(X, R)$.

Съгласно Лема 5.15, неизродените афинни изображения ε_i^n са непрекъснати, така че композициите $\sigma_n \varepsilon_i^n : \Delta^{n-1} \to X$ са непрекъснати и $\partial_n \sigma_n$ е сингулярна $(n-1)$-верига.
Например, за произволно естествено n, тъждественото изображение $\mathrm{Id}_n : \Delta^n \to \Delta^n$ има сингулярна граница $\partial_n \mathrm{Id}_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varepsilon_i^n$.
Съгласно универсалното свойство на свободните R-модули (виж Твърдение 13 от Въпрос 4), изображението на множества ∂_n, съпоставящо на всеки сингулярен n-симплекс неговата граница има единствено продължение до хомоморфизъм на R-модули

$$\partial_n : S_n(X, R) \longrightarrow S_{n-1}(X, R),$$

който се нарича граничен оператор. За да докажем, че $\{(S_n(X, R), \partial_n)\}_{n \geq 0}$ е верижен комплекс от R-модули, необходима ни е следната

Лема 5.20. *За произволно неотрицателно цяло n и $k < j \leq n+1$ е в сила*

$$\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n = \varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n$$

като неизродени афинни изображения на $\Delta^{n-1} = [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]$ в $\Delta^{n+1} = [p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}]$.

Доказателство: Съгласно Лема 5.12, композициите $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n$ и $\varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n$ на неизродените афинни изображения ε_k^n, ε_j^{n+1}, ε_{j-1}^n, ε_k^{n+1} са неизродени афинни изображения. Затова е достатъчно да проверим, че $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n(p_i)$ за всяко $0 \leq i \leq n-1$. Ако $i < k < j$, то $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n(p_i) = \varepsilon_j^{n+1}(p_i) = p_i$, както и $\varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1}(p_i) = p_i$, доколкото $i < k \leq j-1$. За $k \leq i < j-1$ имаме $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n(p_i) = \varepsilon_j^{n+1}(p_{i+1}) = p_{i+1}$ и $\varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_j^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1}(p_i) = p_{i+1}$. Накрая, ако $i \geq j-1 \geq k$, то $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n(p_i) = \varepsilon_j^{n+1}(p_{i+1}) = p_{i+2}$ и $\varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1}(p_{i+1}) = p_{i+2}$. Следователно $\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n(p_i)$ за $\forall 0 \leq i \leq n-1$, откъдето $\varepsilon_j^{n+1}\varepsilon_k^n\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_ip_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i\varepsilon_j^{n+1}\varepsilon_k^n(p_i) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i\varepsilon_k^{n+1}\varepsilon_{j-1}^n(p_i) = \varepsilon_k^{n+1}\varepsilon_{j-1}^n\left(\sum_{i=0}^{n-1} t_ip_i\right)$ за произволни $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 1$, Q.E.D.

Лема-Определение 5.21. *Фамилията $\{(S_n(X,R), \partial_n)\}_{n=0}^{\infty}$ от свободни R-модули $S_n(X,R)$ и R-модулни хомоморфизми $\partial_n : S_n(X,R) \to S_{n-1}(X,R)$ образува верижен комплекс от R-модули, наречен сингулярен комплекс на топологичното пространство X.*

Доказателство: Трябва да докажем, че $\partial_n\partial_{n+1} \equiv 0$ за произволно неотрицателно цяло n. По определение, $\partial_0 \equiv 0$, така че $\partial_0\partial_1 \equiv 0$. За произволно естествено n и произволен сингулярен n-симплекс σ_{n+1} ще проверим, че $\partial_n\partial_{n+1}\sigma_{n+1} = 0$. Това е достатъчно за тъждественото анулиране на R-модулния хомоморфизъм $\partial_n\partial_{n+1}$ върху свободния R-модул $S_{n+1}(X,R)$ с базис σ_{n+1}. По определение,

$$\partial_n\partial_{n+1}\sigma_{n+1} = \partial_n\left(\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\sigma_{n+1}\varepsilon_j^{n+1}\right) = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\partial_n(\sigma_{n+1}\varepsilon_j^{n+1}) =$$

$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_{n+1}\varepsilon_j^{n+1}\varepsilon_k^n = \sum_{j\leq k}(-1)^{j+k}\sigma_{n+1}\varepsilon_j^{n+1}\varepsilon_k^n + \sum_{j>k}(-1)^{j+k}\sigma_{n+1}\varepsilon_j^{n+1}\varepsilon_k^n.$$

Прилагаме Лема 5.20 и заменяме втората сума с $\sum_{j>k}(-1)^{j+k}\sigma_{n+1}\varepsilon_k^{n+1}\varepsilon_{j-1}^n$. Полагайки $p := k$ и $q := j-1$ представяме тази сума като

$$\sum_{p<q+1}(-1)^{p+q+1}\sigma_{n+1}\varepsilon_p^{n+1}\varepsilon_q^n = -\sum_{p\leq q}(-1)^{p+q}\sigma_{n+1}\varepsilon_p^{n+1}\varepsilon_q^n.$$

По този начин двете суми от $\partial_n\partial_{n+1}\sigma_{n+1}$ се унищожават и се установява тъждеството $\partial_n\partial_{n+1}\sigma_{n+1}$, Q.E.D.

Определение 5.22. *Ако $\{(S_n(X,R), \partial_n)\}_{n=0}^{\infty}$ е сингулярният комплекс на топологично пространство X, то елементите на $Z_n(X,R) := Ker(\partial_n)$ се наричат сингулярни n-цикли, сингулярните вериги от $B_n(X,R) := Im(\partial_{n+1})$ се наричат сингулярни n-граници, а R-модулите*

$$H_n(X,R) := Z_n(X,R)/B_n(X,R)$$

се наричат сингулярни хомологии.

Като най-прост пример за пресмятане на сингулярните хомологии, ще докажем следната

Лема 5.23. (Аксиома за размерността) *Ако $X = \{x\}$ е точка, то сингулярните хомологии $H_n(X,R) = 0$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ и $H_0(X,R) = R$.*

Доказателство: За всяко неотрицателно цяло n съществува единствен сингулярен n-симплекс $\sigma_n : \Delta^n \to X$, $\sigma_n\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) := x$ за $\forall t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Следователно сингулярните вериги $S_n(X,R) = R\sigma_n$ са изоморфни на пръстена R като ляв или десен модул над себе си. Границите

$$\partial_n\sigma_n = \sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma_n\varepsilon_i^n = \sum_{i=0}^n(-1)^i\sigma_{n-1} = \left(\sum_{i=0}^n(-1)^i\right)\sigma_{n-1}$$

се анулират за нечетни естествени n, както и за $n = 0$, докато $\partial_n\sigma_n = \sigma_{n-1}$ за четни естествени n. Следователно сингулярните цикли $Z_n(X,R) := Ker(\partial_n) = S_n(X,R)$ за $n = 0$ и нечетни естествени n, а $Z_n(X,R) = \{0\}$ за четни естествени n, доколкото σ_{n-1} е неторзионен пораждащ на $S_{n-1}(X,R)$. Границите

$B_n(X,R) := Im(\partial_{n+1}) = S_n(X,R)$ за нечетни естествени n и $B_n(X,R) = 0$ за всички четни неотрицателни цели n. В резултат, сингулярните хомологии

$$H_n(X,R) := Z_n(X,R)/B_n(X,R) = S_n(X,R)/S_n(X,R) = 0$$

за нечетни естествени n,

$$H_n(X,R) := Z_n(X,R)/B_n(X,R) = 0/0 = 0$$

за четни естествени n и $H_0(X,R) = Z_0(X,R)/B_0(X,R) = S_0(X,R) = R\sigma_0$, Q.E.D.

Определение 5.24. *Топологичното пространство X се нарича ациклично, ако неговите сингулярни хомологии $H_n(X,\mathbb{Z}) = 0$ с цели коефициенти се анулират за всяко естествено n.*

Току-що доказаната лема установява, че точките са ациклични топологични пространства.

5. Непрекъснати изображения и морфизми на сингулярните верижни комплекси.

Твърдение 5.25. *(i) Всяко непрекъснато изображение $f : X \to Y$ на топологични пространства индуцира морфизъм*

$$\begin{tikzcd}
S_n(X,R) \arrow[r, "\partial_n^X"] \arrow[d, "f_n"'] & S_{n-1}(X,R)\ldots \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots S_0(X,R) \arrow[r, "\partial_0^X"] \arrow[d, "f_0"'] & S_{-1}(X,R) = 0 \arrow[d, "f_{-1}"'] \\
S_n(Y,R) \arrow[r, "\partial_n^Y"] & S_{n-1}(Y,R)\ldots & \ldots S_0(Y,R) \arrow[r, "\partial_0^Y"] & S_{-1}(Y,R) = 0
\end{tikzcd}$$

на съответните сингулярни комплекси. В резултат получаваме хомоморфизми на R-модули

$$H(f_n) : H_n(X,R) \longrightarrow H_n(Y,R)$$

за всяко цяло неотрицателно n.
(ii) Композицията на непрекъснати изображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ на топологични пространства индуцира морфизма $(gf)_\bullet : S_\bullet(X,R) \to S_\bullet(Y,R)$ с $(gf)_n = g_n f_n$ на сингулярните верижни комплекси. Съответните хомоморфизми на хомологиите са $H((gf)_n) = H(g_n)H(f_n)$.
(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id}: X \to X$ на топологично пространство X поражда тъждествения морфизъм $\mathrm{Id}_\bullet = \left(\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_{S_n(X,R)}\right)_{n\geq 0}$ на сингулярния верижен комплекс $\{(S_n(X,R),\partial_n)\}_{n\geq 0}$ на X и тъждествените хомоморфизми $H(\mathrm{Id}_n) = \mathrm{Id}_{H_n(X,R)}$ на сингулярните хомологии $H_n(X,R)$ на X.

Доказателство: За произволен сингулярен n-симплекс $\sigma_n : \Delta^n \to X$ в X, композицията $f_n(\sigma_n) := f\sigma_n : \Delta^n \to Y$ е сингулярен n-симплекс в Y, доколкото непрекъснатостта на σ_n и f води до непрекъснатост на $f\sigma_n$. По този начин получаваме изображение на множества

$$f_n : \{\sigma_n \mid \text{ непрекъснато } \sigma_n : \Delta^n \to X\} \longrightarrow S_n(Y,R).$$

Съгласно универсалното свойство на свободните модули, съществува единствено продължение на това изображение като R-модулен хомоморфизъм

$$f_n : S_n(X,R) \longrightarrow S_n(Y,R),$$

$$f_n\left(\sum_\sigma r_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma r_\sigma (f\sigma).$$

Трябва да докажем, че $f_{n-1}\partial_n^X = \partial_n^Y f_n$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. И двете композиции са хомоморфизми на свободните R-модули $S_n(X,R) = \coprod_\sigma R\sigma$ с базис сингулярните

n-симплекси $\sigma_n : \Delta^n \to X$, така че е достатъчно да проверим съвпадението на тяхното действие върху $\forall \sigma_n$. Наистина

$$f_{n-1}\partial_n^X(\sigma_n) = f_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n\varepsilon_i^n\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{n-1}(\sigma_n\varepsilon_i^n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(\sigma_n\varepsilon_i^n) =$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(f\sigma_n)\varepsilon_i^n = \partial_n^Y(f\sigma_n) = \partial_n^Y f_n(\sigma_n).$$

С това установихме, че $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ е морфизъм на сингулярните верижни комплекси на X и Y. Съгласно Лема 10 от Въпрос 2, хомоморфизмите f_n индуцират R-модулни хомоморфизми

$$H(f_n) : H_n(X,R) \longrightarrow H_n(Y,R)$$

с $H(f_n)(x_n + B_n(X,R)) = f_n(x_n) + B_n(Y,R)$ за $\forall x_n \in Z_n(X,R)$.
(ii) Равенствата $(gf)_n = g_n f_n$ на хомоморфизми $S_n(X,R) \to S_n(Z,R)$ на свободния R-модул $S_n(X,R) = \coprod_\sigma R\sigma$ следват от

$$(gf)_n = (gf)\sigma = g(f\sigma) = g_n(f\sigma) = g_n f_n(\sigma)$$

за произволен сингулярен n-симплекс $\sigma : \Delta^n \to X$. В резултат,

$$H((gf)_n)(x_n + B_n(X,R)) = (gf)_n(x_n) + B_n(X,R) = g_n f_n(x_n) + B_n(X,R) =$$

$$H(g_n)(f_n(x_n) + B_n(Y,R)) = H(g_n)H(f_n)(x_n + B_n(X,R))$$

за $\forall x_n + B_n(X,R) \in H_n(X,R)$, така че $H((gf)_n) = H(g_n)H(f_n)$.
(iii) Доколкото $\mathrm{Id}_n : S_n(X,R) \to S_n(X,R)$ са хомоморфизми на свободните R-модули $S_n(X,R) = \coprod_\sigma R\sigma$, достатъчно е да проверим, че $\mathrm{Id}_n(\sigma) = \mathrm{Id}\sigma = \sigma$ за всеки сингулярен n-симплекс $\sigma : \Delta^n \to X$, за да твърдим, че $\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_{S_n(X,R)}$. По-нататък, $H\mathrm{Id}_n)(x_n + B_n(X,R)) = \mathrm{Id}_n(x_n) + B_n(X,R) = x_n + B_n(X,R)$ за $\forall x_n \in Z_n(X,R)$ доказва, че $H(\mathrm{Id}_n) = \mathrm{Id}_{H_n(X,R)}$, Q.E.D.

Определение 5.26. *Изображението $f : X \to Y$ на топологични пространства се нарича хомеоморфизъм, ако f е взаимно-еднозначно и непрекъснато заедно със своето обратно f^{-1}.*

Следствие 5.27. *Всеки хомеоморфизъм $f : X \to Y$ на топологични пространства поражда изоморфизъм $f_\bullet : S_\bullet(X,R) \to S_\bullet(Y,R)$ на сингулярните верижни комплекси, а оттам и R-модулни изоморфизми*

$$H(f_n) : H_n(X,R) \to H_n(Y,R)$$

на сингуляринте хомологии.

Доказателство: Съгласно Твърдение 5.25 (ii) и (iii),

$$f_n(f^{-1})_n = (ff^{-1})_n = (\mathrm{Id}_Y)_n = \mathrm{Id}_{S_n(Y,R)},$$

както и

$$(f^{-1})_n f_n = (f^{-1}f)_n = (\mathrm{Id}_X)_n = \mathrm{Id}_{S_n(X,R)}.$$

Следователно $f_n : S_n(X,R) \to S_n(Y,R)$ образуват изоморфизъм на сингулярните верижни комплекси с $(f_n)^{-1} = (f^{-1})_n$. Прилагайки Лема 13 (ii) от Въпрос 2 получаваме, че $H(f_n) : H_n(X,R) \to H_n(Y,R)$ са изоморфизми на R-модули, Q.E.D.

6. Гладки сингулярни хомологии.

Така развитата теория на сингулярните хомологии има гладък вариант върху многообразия

Определение 5.28. *Топологичното пространство M е Хаусдорфово, ако за всеки две различни точки x и y от M съществуват отворени подмножества $x \in U \subset M$ и $y \in V \subset M$, които не се пресичат $U \cap V = \emptyset$.*
Двойката (U, φ) се нарича n-карта върху Хаусдорфовото топологично пространство M, ако U е отворено подмножество на M, а $\varphi : U \to \varphi(U)$ е хомеоморфизъм на U върху отворено подмножество $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ на наредените n-торки реални числа.
Фамилията от n-карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ върху Хаусдорфово топологично пространство M образува n-атлас, ако покрива това топологично пространство, $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и за произволни пресичащи се U_α и U_β изображенията

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

са гладки (т.е. безкрайно диференцируеми),

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \cap U_\beta \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_\beta"'] & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}"] \\
\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) &
\end{tikzcd} .$$

Всяко Хаусдорфово топологично пространство M с максимален n-атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ се нарича гладко многообразие с размерност $\dim M = n$.

Например, всяко отворено подмножество U на гладко многообразие M е гладко многообразие с размерност $\dim U = \dim M$. Наистина, произволни различни точки x и y от U имат непресичащи се околности U_x и V_y върху M. Следователно $U \cap U_x$ и $U \cap V_y$ са непресичащи се околности на x и y върху U, така че U е Хаусдорфово пространство относно индуцираната от M топология. (Околност на подмножество S на топологично пространство е отворено множество, съдържащо S.) Произволен максимален n-атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ върху M индуцира максимален n-атлас $(U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha})_{\alpha \in A}$ върху U.
Друг пример, афинната обвивка $A(p_0, p_1, \dots, p_n)$ на афинно независими точки $p_0, p_1, \dots, p_n$ е гладко многообразие с размерност n. За да се уверим в това, да напомним съществуването на хомеоморфизъм $\kappa_0 : A(p_0, p_1, \dots, p_n) \to \mathbb{R}^n$, $\kappa_0 \left(\sum_{i=1}^n t_i(p_i - p_0) + p_0 \right) = (t_1, \dots, t_n)$. Хаусдорфовостта на $\mathbb{R}^n$ се наследява от $A(p_0, p_1, \dots, p_n) = \kappa_0^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Освен това, фамилията $\left(\kappa_0^{-1}(U), \kappa_0|_U \right)_{U \subseteq \mathbb{R}^n}$, индексирана с отворените подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е максимален n-атлас върху $A(p_0, p_1, \dots, p_n)$.

Задача 5.29. *Нека $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ са такива точки, за които системата вектори $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0 \in \mathbb{R}^n$ е от ранг r.*
а) Да се определи структура на Хаусдорфово топологично пространство върху афинната обвивка $A(p_0, p_1, \dots, p_m)$.
б) Да се определи структура на гладко многообразие с размерност r върху афинната обвивка $A(p_0, p_1, \dots, p_m)$.

За произволни афинно независими точки $p_0, p_1, \dots, p_n$, симплексът

$$\Delta^n = [p_0, p_1, \dots, p_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i p_i \,|\, \forall t_i \geq 0, \, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

се изобразява от κ_0 в подмножеството

$$\mathbb{R}^n_\Delta := \kappa_0(\Delta^n) = \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall t_i \geq 0, \, \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\}.$$

За произволно $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ да разгледаме околността

$$U^n_\varepsilon := \left\{ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall t_i > -\varepsilon, \, \sum_{i=1}^n t_i < 1 + \varepsilon \right\}$$

на $\mathbb{R}^n_\Delta$ върху $\mathbb{R}^n$. Тогава $\kappa_0^{-1}(U^n_\varepsilon)$ е гладко многообразие с размерност n, в качеството си на отворено подмножество на гладкото многообразие $A(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ с $\dim A(p_0, p_1, \ldots, p_n) = n$.
За да формулираме и докажем следващата лема, да уточним, че

Определение 5.30. *Нека M е гладко многообразие с размерност m, а N е гладко многообразие с размерност n. Изображението $f : M \to N$ се нарича гладко в точка $x \in M$, ако съществуват карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ върху M и (V_β, ψ_β) върху N, така че $x \in U_\alpha$, $f(U_\alpha) \subseteq V_\beta$ и в диаграмата*

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & V_\beta \arrow[d, "\psi_\beta"'] \\ \varphi_\alpha(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}"] & \psi_\beta(V_\beta) \end{tikzcd}$$

участва гладко (т.е. безкрайно диференцируемо) изображение

$$\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

на отворено подмножество $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$ в отворено подмножество $\psi_\beta(V_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ако изображението $f : M \to N$ е гладко във всяка точка $x \in M$, казваме, че f е гладко.

Тъждественото влагане $i : U \to M$ на отворено подмножество U в гладко многообразие M е гладко изображение, защото за всяка точка $x \in U$ и всяка карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ върху M с $x \in U_\alpha$, комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} U \cap U_\alpha \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & U_\alpha \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] \\ \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha) \arrow[r, "j"] & \varphi_\alpha(U_\alpha) \end{tikzcd}$$

се затваря с тъждественото влагане j на $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ в $\varphi_\alpha(U_\alpha)$.

Лема 5.31. *За произволни афинно независими точки $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, да разгледаме гладкото многообразие*

$$\kappa_{0,p}^{-1}(U^n_\varepsilon) := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i(p_i - p_0) + p_0 \,|\, \forall t_i > -\varepsilon, \sum_{i=1}^n t_i < 1 + \varepsilon \right\}.$$

Тогава за каквито и да са афинно независими точки $q_0, q_1, \ldots, q_n$, неизроденото афинно изображение

$$T : \kappa_{0,p}^{-1}(U^n_\varepsilon) \longrightarrow \kappa_{0,q}^{-1}(U^n_\varepsilon)$$

с $T(p_i) = q_i$ за $\forall 0 \leq i \leq n$ е гладко, заедно с неизроденото си афинно обратно T^{-1}.

Доказателство: По определение,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(p_i - p_0) + p_0\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i(q_i - q_0) + q_0 = \kappa_{0,q}^{-1}\kappa_{0,p}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i(p_i - p_0) + p_0\right)$$

за всяка точка $\sum_{i=1}^{n} t_i(p_i - p_0) + p_0 \in \kappa_{0,p}^{-1}(U_\varepsilon^n)$. Следователно съществува комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \kappa_{0,p}^{-1}(U_\varepsilon^n) \arrow[r, "T=\kappa_{0,q}^{-1}\kappa_{0,p}"] \arrow[d, "\kappa_{0,p}"'] & \kappa_{0,q}^{-1}(U_\varepsilon^n) \arrow[d, "\kappa_{0,q}"'] \\ U_\varepsilon^n \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & U_\varepsilon^n \end{tikzcd},$$

в която тъждественото изображение Id на U_ε^n е безкрайно гладко. Следователно T е гладко във всяка точка на $\kappa_{0,p}^{-1}(U_\varepsilon^n)$.
Разглежданията за $T^{-1} = \kappa_{0,p}^{-1}\kappa_{0,q}$ са напълно аналогични, Q.E.D.

Определение 5.32. *Нека $\Delta^n = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ е n-симплекс, а M е гладко многообразие. Гладките изображения*

$$\sigma : \kappa_0^{-1}(U_\varepsilon^n) \longrightarrow M$$

се наричат гладки сингулярни n-симплекси.
Свободните R-модули $S_n^\infty(M,R)$ с базис гладките сингулярни n-симплекси в M, се състоят от гладките сингулярни n-вериги в M.

Всяко гладко изображение е непрекъснато, така че $S_n^\infty(M,R)$ се оказват подмодули на $S_n(M,R)$ Ограниченията на граничните оператори ∂_n на $S_n(M,R)$ трансформират произволен гладък сингулярен n-симплекс σ_n в гладка сингулярна $(n-1)$-верига $\partial_n\sigma_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n\varepsilon_i^n$, защото неизродените афинни изображения ε_i^n са гладки върху околността $\kappa_0^{-1}\left(U_\varepsilon^{n-1}\right)$ на Δ^{n-1}, съгласно Следствие 5.31. В резултат, $\{(S_n^\infty(M,R), \partial_n)\}_{n\geq 0}$ образува верижен комплекс.

Определение 5.33. *За произволно гладко многообразие M верижният комплекс $\{(S_n^\infty(M,R), \partial_n)\}_{n\geq 0}$ се нарича гладък сингулярен комплекс на M. Елементите на $Z_n(M,R)^\infty := Ker(\partial_n)$ носят името гладки сингулярни n-цикли, а елементите на $B_n^\infty := Im(\partial_{n+1})$ са гладки сингулярни n-граници. Фактормодулите $H_n^\infty(M,R) := Z_n^\infty(M,R)/B_n^\infty(M,R)$ се наричат гладки сингулярни хомологии на многообразието M.*

По аналогия със съгласуваността на непрекъснатите изображения на топологични пространства с техните сингулярни хомологии, имаме:

Следствие 5.34. *(i) Всяко гладко изображение $f : M \to N$ на гладки многообразия индуцира морфизъм*

$$\begin{tikzcd} S_n^\infty(M,R) \arrow[r, "\partial_n^M"] \arrow[d, "f_n"'] & S_{n-1}^\infty(M,R)\ldots \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots S_0^\infty(M,R) \arrow[r, "\partial_0^M"] \arrow[d, "f_0"'] & S_{-1}^\infty(M,R) = 0 \arrow[d, "f_{-1}"'] \\ S_n^\infty(N,R) \arrow[r, "\partial_n^N"] & S_{n-1}^\infty(N,R)\ldots & \ldots S_0^\infty(N,R) \arrow[r, "\partial_0^N"] & S_{-1}^\infty(N,R) = 0 \end{tikzcd}$$

на съответните гладки сингулярни верижни комплекси, а оттам и хомоморфизми

$$f_n^H : H_n^\infty(M,R) \longrightarrow H_n^\infty(N,R).$$

(ii) Композицията на гладки изображения $f : M \to N$ и $g : N \to P$ на гладки многообразия индуцира морфизма $(gf)_\bullet : S_\bullet^\infty \to S_\bullet^\infty(P,R)$ с $(gf)_n =$

$g_n f_n$. *Върху гладките сингулярни хомологии се получават хомоморфизмите* $H((gf)_n) = H(g_n)H(f_n)$.
(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : M \to M$ *на гладко многообразие* M *индуцира тъждествения морфизъм* $\mathrm{Id}_\bullet : S^\infty_\bullet(M,R) \to S^\infty_\bullet(M,R)$, $\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_{S^\infty_n(M,R)}$ *на гладкия сингулярен верижен комплекс на* M, *а оттам и тъждествените хомоморфизми* $H(\mathrm{Id}_n) = \mathrm{Id}_{H^\infty_n(M,R)}$ *на гладките сингулярни хомологии.*

Доказателство: Да отбележим само, че за произволен гладък сингулярен n-симплекс $\sigma_n : \Delta^n \to M$, композицията $f\sigma_n : \Delta^n \to N$ се продължава до гладко изображение $f\sigma_n : \kappa_0^{-1}(U^n_\varepsilon) \to N$. По този начин, хомоморфизмите на свободни R-модули $f_n : S_n(M,R) \to S_n(N,R)$, $f_n\left(\sum_\sigma r_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma r_\sigma f\sigma$ от Твърдение 5.25 се ограничават до хомоморфизми $f_n : S^\infty_n(M,R) \to S^\infty_n(N,R)$. Останалата част на доказателството повтаря разглежданията от Твърдение 5.25, Q.E.D.

Определение 5.35. *Дифеоморфизъм* $f : M \to N$ *на гладки многообразия* M *и* N *е взаимно-еднозначно изображение, което е гладко заедно с обратното си* f^{-1}.

Следствие 5.36. *Всеки дифеоморфизъм* $f : M \to N$ *на гладки многообразия поражда изоморфизъм* $f_\bullet : S^\infty_n(M,R) \to S^\infty_n(N,R)$ *на съответните гладки сингулярни верижни комплекси. В частност,* f *индуцира* R*-модулни изоморфизми на гладките сингулярни хомологии* $H(f_n) : H^\infty_n(M,R) \to H^\infty_n(N,R)$.

За да изучаваме сингулярния коверижен комплекс на топологично пространство X, както и гладкия сингулярен ко-верижен комплекс на многообразие M, трябва да дадем следните определения: