Лекция 4

# Универсални свойства на произведението и ко-произведението. Свободни модули.

## 1. Универсално свойство на ко-произведението.

Твърдение 4.1. *Левият (десният) $R$-модул $A$ е изоморфен на ко-произведение $\coprod_{j\in J} A_j$ на леви (десни) $R$-модули $A_j$ тогава и само тогава, когато съществуват мономорфизми $\alpha_j : A_j \to \coprod_{j\in J} A_j$, такива, че за произволен ляв (десен) $R$-модул $B$ и произволна фамилия от хомоморфизми $f_j : A_j \to B$ съществува единствен хомоморфизъм $f : \coprod_{j\in J} A_j \to B$, затварящ комутативните диаграми*

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "f_j"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ B & \end{tikzcd} ,$$

*$f\alpha_j = f_j$ за всички $j \in J$.*

**Доказателство:** Да допуснем, че съществува изоморфизъм на $R$-модули

$$\varphi : \coprod_{j\in J} A_j \longrightarrow A.$$

Тогава композициите

$$\alpha_j := \varphi i_j : A_j \longrightarrow A$$

на каноничните мономорфизми $i_j : A_j \to \coprod_{j\in J} A_j$ с $\varphi$ са мономорфизми на $A_j$ в $A$. Елементите на $A$ са крайни суми от вида $\varphi\left(\sum_{j\in J} i_j(a_j)\right) = \sum_{j\in J} \alpha_j(a_j)$. Полагаме

$$f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right) := \sum_{j\in J} f_j(a_j)$$

за да затворим комутативните диаграми. Определението е коректно, доколкото $p_j\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right) = \alpha_j(a_j)$ е еднозначно зададено от $\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)$, а $a_j$ е единственият праобраз на $\alpha_j(a_j)$ под действие на мономорфизма $\alpha_j$. Освен това, $f$ е хомоморфизъм на леви (десни) $R$-модули, защото

$$f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j) + \sum_{j\in J}\alpha_j(a'_j)\right) = f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j + a'_j)\right) = \sum_{j\in J} f_j(a_j + a'_j) =$$

$$\sum_{j\in J}\left[f_j(a_j) + f_j(a'_j)\right] = \left[\sum_{j\in J} f_j(a_j)\right] + \left[\sum_{j\in J} f_j(a'_j)\right] =$$

$$f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right) + f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a'_j)\right)$$

и

$$f\left(r\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right)\right)=f\left(\sum_{j\in J}r\alpha_j(a_j)\right)=f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(ra_j)\right)=\sum_{j\in J}f_j(ra_j)=$$

$$\sum_{j\in J}rf_j(a_j)=r\left(\sum_{j\in J}f_j(a_j)\right)=rf\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right).$$

За да докажем единствеността на хомоморфизма $f:A\to B$ с условието $f\alpha_j=f_j$ за $\forall j\in J$, да допуснем, че $g:A\to B$ е хомоморфизъм на леви $R$-модули с $g\alpha_j=f_j$ за $j\in J$. Тогава действието на $g$ върху типичен елемент на $A$ е

$$g\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right)=\sum_{j\in J}g\alpha_j(a_j)=\sum_{j\in J}f_j(a_j)=f\left(\sum_{j\in J}\alpha_j(a_j)\right),$$

т.е. съвпада с действието на $f$ и $f\equiv g$.
Да предположим, че съществуват мономорфизми $\alpha_j:A_j\to A$, такива, че за всеки $R$-модул $B$ и всяка фамилия от хомоморфизми $f_j:A_j\to B$ на $R$-модули съществува единствен хомоморфизъм $f:A\to B$ с $f\alpha_j=f_j$ за $\forall j\in J$. В частност, за $B:=\coprod_{j\in J}A_j$ и каноничните мономорфизми $i_j:A_j\to\coprod_{j\in J}A_j$ получаваме комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "i_j"'] & A \arrow[dl, "f"] \\ \coprod_{j\in J}A_j & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

с $f\alpha_j=i_j$ за $\forall j\in J$. Съгласно вече доказаната посока на твърдението, наличието на изоморфизъм $\mathrm{Id}:\coprod_{j\in J}A_j\to\coprod_{j\in J}A_j$ е достатъчно за продължаване на произволна фамилия от хомоморфизми $g_j:A_j\to B$, $j\in J$ до хомоморфизъм $g:\coprod_{j\in J}A_j\to B$ с $gi_j=g_j$. Конкретно, за $B:=A$ и $g_j:=\alpha_j$ получаваме комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & \coprod_{j\in J}A_j \arrow[dl, "g"] \\ A & \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

за всички $j\in J$. Съединявайки диаграмите (4.1) и (4.2) за $A_j$, $\coprod_{j\in J}A_j$ и $A$ получаваме

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] \arrow[dr, "i_j"] & A \arrow[d, "f"] \\ A & \coprod_{j\in J}A_j \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

От една страна,

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & A \arrow[dl, "\mathrm{Id}_A"] \\ A & \end{tikzcd}$$

се затваря с тъждественото изображение $\mathrm{Id}_A$ на $A$. От друга страна, имаме комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & A \arrow[dl, "gf"] \\ A & \end{tikzcd} .$$

По предположение, хомоморфизмът затварящ диаграмите

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\alpha_j"] \arrow[d, "\alpha_j"'] & A \\ A & \end{tikzcd}$$

е единствен, така че получаваме $\mathrm{Id}_A = gf$. Аналогично, съединявайки по друг начин комутативните диаграми (4.1) и (4.2) стигаме до извода, че

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "i_j"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \coprod\limits_{j\in J} A_j \\ \coprod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "g"] & A \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} .$$

Доколкото $R$-модулът $\coprod_{j\in J} A_j$ е изоморфен на себе си, доказаната посока на твърдението гарантира единствеността на изображението, затварящо диаграмата

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "i_j"'] & \coprod\limits_{j\in J} A_j \\ \coprod\limits_{j\in J} A_j & \end{tikzcd} .$$

От една страна имаме

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "i_j"'] & \coprod\limits_{j\in J} A_j \arrow[dl, "\mathrm{Id}"] \\ \coprod\limits_{j\in J} A_j & \end{tikzcd} ,$$

а от друга

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "i_j"'] & \coprod_{j\in J} A_j \arrow[dl, "fg"] \\ \coprod_{j\in J} A_j & \end{tikzcd}.$$

Следователно $fg = \mathrm{Id}_{\coprod_{j\in J} A_j}$ и $f : A \to \coprod_{j\in J} A_j$, $g : \coprod_{j\in J} A_j \to A$ са изоморфизми на $R$-модули, Q.E.D.

## 2. Универсално свойство на произведението.

Твърдение 4.2. *Левият (десният) $R$-модул $A$ е изоморфен на произведението $\prod_{j\in J} A_j$ на леви (десни) $R$-модули $A_j$ тогава и само тогава, когато съществуват епиморфизми $\pi_j : A \to A_j$, такива, че за всеки ляв (десен) $R$-модул $B$ и всяка фамилия от хомоморфизми $f_j : B \to A_j$ съществува единствен хомоморфизъм $f : B \to A$ с*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f_j"] \\ A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd},$$

$\pi_j f = f_j$ *за* $\forall j \in J$.

**Доказателство:** Нека $\psi : A \to \prod_{j\in J} A_j$ е изоморфизъм на $R$-модули. Тогава $\pi_j := p_j\psi : A \to A_j$ са епиморфизми като композиции на епиморфизми. За да построим изображението $f$, да отбележим, че елементите на $A$ имат вида $\psi^{-1}(a_j)_{j\in J}$ за някакви $a_j \in A_j$. Ако положим

$$f(b) := \psi^{-1}(f_j(b))_{j\in J},$$

то непосредствено се вижда, че $\pi_j f(b) = p_j\psi\psi^{-1}(f_j(b))_{j\in J} = f_j(b)$ за $\forall j \in J$, $\forall b \in B$. Така зададеното изображение $f$ е коректно, доколкото $\psi$ е изоморфизъм. Да проверим, че $f$ е хомоморфизъм на леви (десни) $R$-модули. Наистина,

$$f(b_1 + b_2) = \psi^{-1}(f_j(b_1 + b_2))_{j\in J} = \psi^{-1}(f_j(b_1) + f_j(b_2))_{j\in J} =$$

$$\psi^{-1}\left[(f_j(b_1))_{j\in J} + (f_j(b_2))_{j\in J}\right] = \psi^{-1}(f_j(b_1))_{j\in J} + \psi^{-1}(f_j(b_2))_{j\in J} = f(b_1) + f(b_2)$$

и

$$f(rb) = \psi^{-1}(f_j(rb))_{j\in J} = \psi^{-1}(rf_j(b))_{j\in J} = r\left[\psi^{-1}(f_j(b))_{j\in J}\right] = rf(b).$$

За да установим единствеността на $f$ с $\pi_j f = f_j$ да предположим, че $g : B \to A$ е хомоморфизъм на леви (десни) $R$-модули с $\pi_j g = f_j$ за $\forall j \in J$. Тогава $\pi_j g(b) = p_j\psi g(b) = f_j(b)$ показва, че $\psi g(b) = (f_j(b))_{j\in J}$. С други думи, $g(b) = \psi^{-1}(f_j(b))_{j\in J} = f(b)$ и $g$ съвпада с $f$.
Да допуснем, че съществуват епиморфизми $\pi_j : A \to A_j$, такива че за произволен $R$-модул $B$ и произволна фамилия от хомоморфизми $f_j : B \to A_j$ съществува единствен хомоморфизъм $f : B \to A$, затварящ комутативните

диаграми

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "f_j"] \\ A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd},$$

$\pi_j f = f_j$ за $j \in J$. В частност, за $B := \prod_{j\in J} A_j$ и каноничните епиморфизми $f_j := p_j : \prod_{j\in J} A_j \to A_j$ получаваме

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "p_j"] \\ A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd}. \tag{4.3}$$

От друга страна, прилагайки доказаната посока на твърдението ком изоморфизма $\mathrm{Id} : \prod_{j\in J} A_j \to \prod_{j\in J} A_j$ построяваме комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "g_j"] \\ \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j \end{tikzcd},$$

$p_j g = g_j$ за произволни $R$-модули $B$ и произволни хомоморфизми $g_j : B \to A_j$. Случаят $B := A$ и $g_j := \pi_j : A \to A_j$ за $\forall j \in J$ гласи, че

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\ \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j \end{tikzcd}. \tag{4.4}$$

Съединявайки диаграмите (4.3) и (4.4) получаваме

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "p_j"] \\ \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j \end{tikzcd}.$$

Съгласно доказаната посока на твърдението, изоморфизмът $\mathrm{Id} : \prod_{j\in J} A_j \to \prod_{j\in J} A_j$ гарантира единствеността на хомоморфизма, затварящ диаграмата

$$\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[d, "p_j"'] \\
\prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j
\end{tikzcd}.$$

От една страна, в сила са комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[d, "p_j"'] \arrow[dl, "\mathrm{Id}"'] \\
\prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j
\end{tikzcd},$$

а от друга -

$$\begin{tikzcd}
& \prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[d, "p_j"'] \arrow[dl, "gf"'] \\
\prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[r, "p_j"] & A_j
\end{tikzcd},$$

Следователно $gf = \mathrm{Id}_{\prod_{j\in J} A_j}$. Аналогично, съединяваме диаграмите (4.3) и (4.4) във вида

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{j\in J} A_j \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "p_j"] & A \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\
A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j
\end{tikzcd}.$$

По предположение, съществува единствен хомоморфизъм $A \to A$, затварящ диаграмата

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\pi_j"] \\
A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j
\end{tikzcd}.$$

Понеже

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_A"'] \\
A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "fg"'] \arrow[d, "\pi_j"] \\ A \arrow[r, "\pi_j"] & A_j \end{tikzcd}$$

са комутативни диаграми, стигаме до извода, че $fg = \mathrm{Id}_A$ и $f : \prod_{j\in J} A_j \to A$, $g : A \to \prod_{j\in J} A_j$ са изоморфизми на $R$-модули, Q.E.D.

## 3. Торзионни и свободни модули.

Определение 4.3. *Елементът $x$ на левия (десния) $R$-модул $M$ се нарича торзионен, ако съществува $0_R \neq r \in R$ с $rx = 0_M$. Множеството на торзионните елементи на $M$ ще бележим с $M_{\mathrm{tor}}$.*

Ясно е, че нулевият елемент $0_M$ на произволен $R$-модул $M$ е винаги торзионен, така че множеството $M_{\mathrm{tor}}$ е винаги непразно.

Определение 4.4. *Казваме, че левият (десният) $R$-модул $M$ е свободен от торзии, ако $M_{\mathrm{tor}} = \{0_M\}$.*

Лема-Определение 4.5. *Ако $R$ е комутативна област с единица, а $M$ е $R$-модул, то множеството $M_{\mathrm{tor}}$ на торзионните елементи на $M$ е подмодул, наречен торзионен подмодул на $M$.*
*Ако $M = M_{\mathrm{tor}}$, то казваме, че $M$ е торзионен модул.*

**Доказателство:** Ако $x, y \in M_{\mathrm{tor}}$, то съществуват $0_R \neq r \in R$ и $0_R \neq s \in R$ с $rx = 0_M$, $sy = 0_M$. Тогава $rs \neq 0_R$ в областта $R$ и $rs(x-y) = s(rx) - r(sy) = s0_M - r0_M = 0_M$, така че $x - y \in M_{\mathrm{tor}}$. Още повече, за $\forall t \in R$ е в сила $r(tx) = t(rx) = t0_M = 0_M$, така че $tx \in M_{\mathrm{tor}}$ и $M_{\mathrm{tor}}$ е $R$-подмодул на $M$, Q.E.D.
Всяка крайна абелева група $(A, +)$ е торзионен $\mathbb{Z}$-модул, $A_{\mathrm{tor}} = A$, понеже всички елементи на $A$ са от краен ред. Съществуват безкрайни торзионни абелеви групи. Например, за произволно фиксирано просто число $p$ обединението $C(p^\infty) := \cup_{m=1}^{\infty} C_{p^m}$ на $p^m$-тите корени на единицата в $C$ е торзионна подгрупа на мултипликативната група $C^*$ на комплексните числа.
Нека $R$ е комутативна област с единица, а $f : M \to N$ е хомоморфизъм на $R$-модули. Тогава $\forall x \in M_{\mathrm{tor}}$ се изобразява в $f(x) \in N_{\mathrm{tor}}$, доколкото $rx = 0_M$ за някое $0_R \neq r \in R$ води до $rf(x) = f(rx) = f(0_M) = 0_N$. По този начин, $f$ се ограничава до хомоморфизъм

$$f_{\mathrm{tor}} : M_{\mathrm{tor}} \longrightarrow N_{\mathrm{tor}}$$

на съответните торзионни подмодули. Ясно е , че ако $f : M \to N$ е мономорфизъм, то и ограничението му $f_{\mathrm{tor}} : M_{\mathrm{tor}} \to N_{\mathrm{tor}}$ е мономорфизъм. Съществуват епиморфизми $f : M \to N$, за които $f_{\mathrm{tor}} : M_{\mathrm{tor}} \to N_{\mathrm{tor}}$ не е епиморфизъм. Например естественият епиморфизъм $\pi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}$-модули има тъждествено нулево ограничение $(\pi_m)_{\mathrm{tor}} : \mathbb{Z}_{\mathrm{tor}} = \{0\} \to (\mathbb{Z}_m)_{\mathrm{tor}} = \mathbb{Z}_m$ с $Im\left((\pi_m)_{\mathrm{tor}}\right) = \{0_{\mathbb{Z}_m}\} \neq \mathbb{Z}_m$.

Задача 4.6. *Нека $f : G \to H$ е хомоморфизъм на абелеви групи, а $p$ е просто число. Да се докаже, че*
*а) изображението*

$$f_p : G/pG \longrightarrow H/pH,$$
$$f_p(g + pG) := f(g) + pH,$$

*е коректно зададен хомоморфизъм на абелеви групи;*
*б) ако $f$ е епиморфизъм, то $f_p$ е епиморфизъм;*

*в) умножението $\mu_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ с $p$, $\mu_p(z) = pz$ е мономорфизъм, ндуциращ тъждествено нулевия хомоморфизъм $\overline{\mu_p} : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, така че съществуват мономорфизми $f$, за които $f_p$ не е мономорфизъм.*

Да отбележим, че произволен асоциативен пръстен с единица $R$ може да се разглежда като ляв и десен модул над себе си.

Лема 4.7. *Левият (десният) $R$-модул $A$ е изоморфен на левия (десния) $R$-модул $R$ тогава и само тогава, когато $A = Rx$ (съответно, $A = xR$) за някакъв неторзионен елемент $x \in A$.*

**Доказателство:** Ако $\varphi : R \to A$ е хомоморфизъм на леви $R$-модули, то за $\forall r \in R$ е в сила $\varphi(r) = \varphi(r1_R) = r\varphi(1_R)$. С други думи, пологайки $x := \varphi(1_R) \in A$, получаваме, че $A = Im(\varphi) = Rx$. По определение, елементът $x \in A$ не е торзионен точно когато за всяко $0_R \neq r \in R$ е изпълнено $rx = r\varphi(1_R) = \varphi(r) \neq \varphi(0_R) = 0_A$. Последното условие се гарантира от това, че $\varphi$ е мономорфизъм.
Обратно, нека $A = Rx := \{rx \mid r \in R\}$ за някакъв неторзионен елемент $x \in A$. Тогава изображението

$$\psi : R \longrightarrow A = Rx,$$
$$\psi(r) := rx \quad \text{за } \forall r \in R$$

е хомоморфизъм на леви $R$-модули, доколкото $\psi(r+s) = (r+s)x = rx + sx = \psi(r) + \psi(s)$ и $\psi(tr) = (tr)x = t(xr) = t\psi(r)$ за произволни $r, s, t \in R$. Ако $r$ и $s$ за различни елементи на $R$, то $\psi(r) = rx \neq sx = \psi(s)$, защото $(r-s)x = 0_A$ за неторзионен елемент $x \in A$ води до $r = s$. С други думи, $\psi$ е мономорфизъм. Освен това, $Im(\psi) = Rx = A$, така че $\psi$ е епиморфизъм, а оттам и изоморфизъм, Q.E.D.

Определение 4.8. *Левият (десният) $R$-модул ${}_RF$ (съответно $F_R$) се нарича свободен, ако $F$ е ко-произведение ${}_RF = \coprod_{j\in J} Rx_j$ ($F_R = \coprod_{j\in J} x_jR$) на модули $Rx_j$ (съответно $x_jR$), изоморфни на пръстена ${}_RR$ (съответно $R_R$), разгледан като модул над себе си.*

Ако $F = \coprod_{j\in J} Rx_j$ е свободен $R$-модул, то всички $x_j$ са неторзионни, но не винаги $F$ е свободен от $R$-торзии. Например, пръстенът от остатъци $\mathbb{Z}_6$ при деление на 6 е свободен $\mathbb{Z}_6$-модул с $(\mathbb{Z}_6)_{\mathrm{tor}} \neq \{0_{\mathbb{Z}_6}\}$. По-точно, множеството от торзионни елементи $(\mathbb{Z}_6)_{\mathrm{tor}} = \mathbb{Z}_6 \setminus \mathbb{Z}_6^*$ е допълнението на мултипликативната група $\mathbb{Z}_6^* = \{\pm 1 + 6\mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}_2$, така че съдържа 4 остатъка. Да отбележим, че $(\mathbb{Z}_6)_{\mathrm{tor}}$ не е $\mathbb{Z}_6$-подмодул на $\mathbb{Z}_6$, доколкото $\mathbb{Z}_6$ не е област. Обратно, ако $R$-модулът $F = \coprod_{j\in J} Rx_j$ е свободен от торзии, то $F$ е свободен. Това следва от факта, че щом образите $i_j(x_j) \in F$ на $x_j$ под действие на каноничните мономорфизми $i_j : Rx_j \to \coprod_{j\in J} Rx_j$ са неторзионни, то за всяко $0_R \neq r \in R$ имаме $ri_j(x_j) = i_j(rx_j) \neq i_j(0_{Rx_j}) = 0_F$, а оттам и $rx_j \neq 0_{Rx_j}$, което гарантира, че всички $x_j$ са неторзионни.
Да отбележим, че всички линейни пространства $V$ над поле $K$ са свободни $K$-модули. Това е непосредствена перифраза на съществуването на $K$-базис $\{b_j \mid j \in J\}$ на $V$. Наистина, ако приложим универсалното свойство на ко-произведението $\coprod_{j\in J} Kb_j$ към тъждествените влагания $\mathrm{Id} : Kb_j \to V$, ще получим комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
Kb_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & \coprod_{j\in J} Kb_j \arrow[dl, "f"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

за единственото $K$-линейно изображение $f$ с $fi_j|_{Kb_j} = \mathrm{Id}|_{Kb_j}$. Да напомним, че елементите на $\coprod_{j\in J} Kb_j$ са крайни суми $\sum_j i_j(k_jb_j)$ с $k_j \in K$. Следователно от всяко $\sum_j i_j(k_jb_j) \in Ker(f)$ получаваме крайна линейна комбинация $0_V = f\left(\sum_j i_j(k_jb_j)\right) = \sum_j fi_j(k_jb_j) = \sum_j k_jb_j$ на базисните вектори $b_j$, $j \in J$, равна на нулевия вектор $0_V$. Линейната независимост на $\{b_j \,|\, j \in J\}$ изисква анулиране на всички $k_j$ и доказва, че $Ker(f) == \{0\}$, т.е. $f$ е мономорфизъм. От друга страна, по определението за базис, всички елементи на $V$ са крайни линейни комбинации $\sum_j k_jb_j = \sum_j fi_j(k_jb_j) = f\left(\sum_j i_j(k_jb_j)\right) \in Im(f)$, така че $f$ е епиморфизъм, а оттам и изоморфизъм на $K$-линейни пространства. За всеки ненулев вектор $0_V \neq v \in V$ и всеки ненулев скалар $0_K \neq k \in K$ знаем, че $kv \neq 0_V$, така че линейното пространство $V$ е свободно от $K$-торзии. Следователно $V \simeq \coprod_{j\in J} Kb_j$ е свободен $K$-модул.

## 4. Базис на свободен модул.

Лема 4.9. *Нека $R$ е произволен асоциативен пръстен с единица. Тогава всеки елемент на свободен модул $_RF = \coprod_{j\in J} Rx_j$ (съответно, $F_R = \coprod_{j\in J} x_jR$) има единствено представяне*

$$x = \sum_{j\in J} r_j i_j(x_j)$$

*като крайна линейна комбинация на образите $i_j(x_j)$ на $x_j$ под действие на каноничните мономорфизми $i_j : Rx_j \to \coprod_{j\in J} Rx_j$ (съответно $i_j : x_jR \to \coprod_{j\in J} x_jR$).*

**Доказателство :** По определението за ко-произведение, всеки елемент $x \in F = \coprod_{j\in J} Rx_j$ има представяне $x = (r_jx_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} r_ji_j(x_j)$ с най-много краен брой $r_jx_j \neq 0_{Rx_j}$. Доколкото $x_j \in Rx_j$ са неторзионни, условията $r_jx_j \neq 0_{Rx_j}$ са еквивалентни на $r_j \neq 0_R$.
Ако $x = \sum_{j\in J} r_ji_j(x_j) = \sum_{j\in J} s_ji_j(x_j)$ са две представяния за $x \in F$, то $\sum_{j\in J}(r_j - s_j)i_j(x_j) = ((r_j - s_j)x_j)_{j\in J} = 0_F$ води до $p_k\left(((r_j - s_j)x_j)_{j\in J}\right) = (r_k - s_k)x_k = 0_{Rx_k}$ посредством каноничните епиморфизми$p_k : \coprod_{j\in J} Rx_j \to Rx_k$, $k \in J$. Сега неторзионността на $x_k$ изисква $r_k = s_k$ и установява единствеността на такова представяне, Q.E.D.

Определение 4.10. *Всяко множество $\{x_j \,|\, j \in J\}$ от неторзионни пораждащи на свободен модул $_RF = \coprod_{j\in J} Rx_j$ или $F_R = \coprod_{j\in J} x_jR$ се нарича $R$-базис на $_RF$, съответно $F_R$.*

Изобщо казано, базисите на свободен модул могат да имат различни кардинални числа. Например, в Proceedings of the American Mathematical Society, 1956, Leavitt е конструирал асоциативен пръстен с единица $R$, който е изоморфен на $R\coprod R = R \times R$ като ляв $R$-модул. Ще докажем, че над комутативен пръстен с единица $R$ всеки $R$-базис на крайнопороден свободен модул $F = \coprod_{j=1}^n R_j = \prod_{j=1}^n Rx_j$ има $n$ елемента. За да формулираме накратко следната

Лема-Определение 4.11. *Ако $I$ е двустранен идеал на асоциативен пръстен с единица $R$, а $M$ е ляв $R$-модул, то множеството*

$$IM := \left\{\sum_{j=1}^k \rho_j m_j \,|\, \rho_j \in I, m_j \in M\right\}$$

*на крайните линейни комбинации на елементи на $M$ с коефициенти от $I$ е $R$-подмодул на $M$. Фактор-модулът $M/IM$ има естествена структура на*

*$R/I$-модул с $(r+I)(m+IM) = r(m+IM) = rm + IM$ за произволни $r \in R$ и $m \in M$.*

**Доказателство:** По определение, множеството $IM$ на крайните линейни комбинации на елементи от $M$ с коефициенти от $I$ е затворено относно събиране и изваждане. Освен това, за $\forall r \in R$, $\forall \rho_j \in I$ и $\forall m_j \in M$ е в сила $r\left(\sum_{j=1}^{k} \rho_j m_j\right) = \sum_{j=1}^{k} (r\rho_j)m_j \in IM$, съгласно дистрибутивния закон над "векторен"множител в $M$ и факта, че $I$ е идеал на $R$. Следователно $IM$ е $R$-подмодул на $M$ и можем да образуваме фактор-модула $M/IM$ над $R$ (виж разглежданията преди Определение 7 от Въпрос 1).
Непосредствено проверяваме, че $I$ се съдържа в анулатора $\mathrm{Ann}_R(M/IM) :=$

$$\{r \in R \,|\, r(m+IM) = rm + IM = IM \text{ за } \forall m + IM \in M/IM\} =$$

$$\{r \in R \,|\, rm \in IM \text{ за } \forall m \in M\}.$$

Съгласно Лема 16 от Въпрос 1, факторът $M/IM$ има посочената структура на $R/I$-модул, Q.E.D.

Твърдение 4.12. *Ако $R$ е комутативен пръстен с единица, а $F = \coprod_{j=1}^{n} Rx_j = \prod_{j=1}^{n} Rx_j$ е крайнопороден свободен $R$-модул, то всеки $R$-базис на $F$ има $n$ елемента.*

**Доказателство:** Нека $\mathfrak{M}$ е максимален идеал на $R$. Тогава фактор-пръстенът $K := R/\mathfrak{M}$ е поле. (Накратко, за $\forall r \in R \setminus \mathfrak{M}$ идеалът $\mathfrak{M} + Rr$ съдържа строго $\mathfrak{M}$, така че $\mathfrak{M} + Rr = R$. Следователно съществуват $\mu \in \mathfrak{M}$ и $s \in R$ с $\mu + sr = 1_R$, откъдето $(r+\mathfrak{M})(s+\mathfrak{M}) = rs + \mathfrak{M} = (1_R - \mu) + \mathfrak{M} = 1_R + \mathfrak{M} = 1_K$.) Да разгледаме каноничните мономорфизми $i_j : Rx_j \to F = \coprod_{j=1}^{n} Rx_j$ и естествения епиморфизъм $\pi : F \to F/\mathfrak{M}F$. Ядрата на техните композиции $\pi i_j$ съдържат $R$-подмодулите $\mathfrak{M}(Rx_j) := \left\{\sum_{s=1}^{k} \mu_s(r_s x_j) = \left(\sum_{s=1}^{k} \mu_s r_s\right) x_j \,|\, \mu_s \in \mathfrak{M}, r_s \in R\right\} = \{\mu x_j \,|\, \mu \in \mathfrak{M}\} = \mathfrak{M}x_j$ на $Rx_j$, доколкото за всяко $\mu \in \mathfrak{M}$ е в сила $\pi i_j(\mu x_j) = \pi(\mu i_j(x_j)) = \mu i_j(x_j) + \mathfrak{M}F = \mathfrak{M}F$. Прилагайки Твърдение 18 от Въпрос 1, получаваме еднозначно определени хомоморфизми на $R$-модули $\overline{i_j} : Rx_j/\mathfrak{M}x_j \to F/\mathfrak{M}F$, затварящи комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd}
Rx_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\pi_j"'] & F = \coprod_{j=1}^{n} Rx_j \arrow[d, "\pi"] \\
Rx_j/\mathfrak{M}x_j \arrow[r, "\overline{i_j}"] & F/\mathfrak{M}F
\end{tikzcd},$$

където $\pi_j : Rx_j \to Rx_j/\mathfrak{M}x_j$, $\pi_j(rx_j) := rx_j + \mathfrak{M}x_j$ са естествените епиморфизми с ядра $\mathfrak{M}x_j$. Непосредствено пресмятаме, че $\overline{i_j}(rx_j + \mathfrak{M}x_j) = \overline{i_j}\pi_j(rx_j) = \pi i_j(rx_j) = \pi(ri_j(x_j)) = ri_j(x_j) + \mathfrak{M}F$ за $\forall r \in R$. Съгласно Лема-Определение 4.11, фактор-модулите $Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ и $F/\mathfrak{M}F$ имат естествени структури на $K = R/\mathfrak{M}$-модули с $(r+\mathfrak{M})(sx_j + \mathfrak{M}x_j) = r(sx_j) + \mathfrak{M}x_j = (rs)x_j + \mathfrak{M}x_j$ и, съответно, $(r+\mathfrak{M})(y + \mathfrak{M}F) = ry + \mathfrak{M}F$ за $\forall r, s \in R$, $\forall y \in F$. В резултат,

$$\overline{i_j}((r+\mathfrak{M})(sx_j + \mathfrak{M}x_j)) = \overline{i_j}((rs)x_j + \mathfrak{M}x_j) = (rs)i_j(x_j) + \mathfrak{M}F =$$

$$r[si_j(x_j)] + \mathfrak{M}F = (r+\mathfrak{M})(si_j(x_j) + \mathfrak{M}F) = (r+\mathfrak{M})\overline{i_j}(sx_j + \mathfrak{M}x_j)$$

за произволни $r, s \in R$, така че $\overline{i_j}$ се оказва $K$-линейно изображение на линейните пространства $Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ и $F/\mathfrak{M}F$. Сега прилагаме универсалното свойство на ко-произведението $\coprod_{j\in J}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$ на $K$-модули $Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ към $K$-линейните изображения $\overline{i_j}$ и получаваме комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} Rx_j/\mathfrak{M}x_j \arrow[r, "i_j^K"] \arrow[d, "\overline{i_j}"'] & \coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j) \arrow[dl, "f"] \\ F/\mathfrak{M}F & \end{tikzcd},$$

$fi_j^K=\overline{i_j}$ от $K$-линейни изображения. (Тук $i_j^K : Rx_j/\mathfrak{M}x_j \to \coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$ са каноничните мономорфизми на ко-произведението $\coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$ на линейни пространства. За произволен елемент

$$x=\sum_{j=1}^{n} i_j^K(r_jx_j+\mathfrak{M}x_j)\in\coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$$

пресмятаме, че

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} fi_j^K(r_jx_j+\mathfrak{M}x_j)=\sum_{j=1}^{n}\overline{i_j}(r_jx_j+\mathfrak{M}x_j)=\sum_{j=1}^{n}\overline{i_j}\pi_j(r_jx_j)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\pi i_j(r_jx_j)=\pi\left(\sum_{j=1}^{n} r_ji_j(x_j)\right)=\sum_{j=1}^{n} r_ji_j(x_j)+\mathfrak{M}F.$$

По определение, $R$-модулът $\mathfrak{M}F$се състои от крайните суми

$$\sum_k \mu_k\left(\sum_{j=1}^{n} r_{k,j}i_j(x_j)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_k \mu_kr_{k,j}\right)i_j(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\mu'_ji_j(x_j)$$

с $\mu_k,\mu'_j\in\mathfrak{M}$. Затова, ако $x\in Ker(f)$, то $\sum_{j=1}^{n} r_ji_j(x_j)\in\mathfrak{M}F$ означава, че $\sum_{j=1}^{n} r_ji_j(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\mu_ji_j(x_j)$ като елементи на $F$ за подходящи $\mu_j\in\mathfrak{M}$. Съгласно аксиомите за $R$-модули имаме $\sum_{j=1}^{n}(r_j-\mu_j)i_j(x_j)=0_F$. Прилагайки каноничните епиморфизми $p_k:\coprod_{j=1}^{n} Rx_j\to Rx_k$ получаваме, че

$$p_k\left(\sum_{j=1}^{n}(r_j-\mu_j)i_j(x_j)\right)=(r_k-\mu_k)x_k=0_{Rx_k}.$$

Понеже всички $x_k$ са неторзионни, оттук следва $r_k=\mu_k\in\mathfrak{M}$ за $\forall 1\le k\le n$ и $x=0\in\coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$. С това установихме, че $f$ е мономорфизъм. Пресмятането на $f(x)$ за произволен елемент $x\in\coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)$ установява също, че всеки елемент $\sum_{j=1}^{n} r_ji_j(x_j)+\mathfrak{M}F\in F/\mathfrak{M}F$ е в образа на $f$, така че

$$f:\coprod_{j=1}^{n}(Rx_j/\mathfrak{M}x_j)\longrightarrow F/\mathfrak{M}F$$

е изоморфизъм на $K$-линейни пространства. Твърдим, че $K$-модулите $Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ са изоморфни на полето $K=R/\mathfrak{M}$ като линейно пространство над себе си. За целта да отбележим, че десните умножения $M_j:R\to Rx_j$, $M_j(r)=rx_j$ с $x_j$ са хомоморфизми на $R$-модули. Ядрата на композициите с естествените епиморфизми $\pi_j:Rx_j\to Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ са

$$Ker(\pi_jM_j):=\{r\in R\,|\,\pi_jM_j(r)=\pi_j(rx_j)=rx_j+\mathfrak{M}x_j=\mathfrak{M}x_j\}=$$

$$\{r\in R\,|\,rx_j\in\mathfrak{M}x_j\}.$$

Съгласно неторзионността на $x_j$, равенствата $rx_j = \mu x_j$ за някакви $\mu \in \mathfrak{M}$ гарантират, че $r = \mu \in \mathfrak{M}$. Следователно $Ker(\pi_j M_j) = \mathfrak{M}$. От друга страна, $Im(\pi_j M_j) = Rx_j/\mathfrak{M}x_j$, защото всеки елемент $rx_j + \mathfrak{M}x_j \in Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ може да се пердстави като $rx_j + \mathfrak{M}x_j = \pi_j(rx_j) = \pi_j M_j(r)$. В резултат,

$$R/\mathfrak{M} = R/Ker(\pi_j M_j) \simeq Im(\pi_j M_j) = Rx_j/\mathfrak{M}x_j$$

са изоморфни като $R$-модули по теоремата за хомоморфизмите. Разглеждаме $K = R/\mathfrak{M}$ и $Rx_j/\mathfrak{M}x_j$ като леви $K$-модули с $(r+\mathfrak{M})(s+\mathfrak{M}) = r(s+\mathfrak{M}) = rs+\mathfrak{M}$, съответно, $(r+\mathfrak{M})(sx_j + \mathfrak{M}x_j) = r(sx_j + \mathfrak{M}x_j) = r(sx_j) + \mathfrak{M}x_j = (rs)x_j + \mathfrak{M}x_j$ за произволни $r, s \in R$. Тогава посоченият $R$-модулен изоморфизъм индуцира изоморфизъм на $K$-линейни пространства. Построяването на $K$-линейния изоморфизъм $f$ ни гарантира, че $F/\mathfrak{M}F$ е $n$-мерно линейно пространство над $K$. За произволен базис $\{y_j \mid j \in J\}$ на $F = \coprod_{j\in J} Ry_j$ повтаряме горните разсъждения и получаваме, че $\mathrm{card}(J) = \dim_K \left(\coprod_{j\in J}(Ry_j/\mathfrak{M}y_j)\right) = \dim_K (F/\mathfrak{M}F) = n$, Q.E.D.

## 5. Универсално свойство на свободните модули.

Твърдение 4.13. (Универсално свойство на свободните модули) *Нека $R$ е асоциативен пръстен с единица, а $F = \coprod_{j\in J} Rx_j$ е свободен $R$-модул с базис $\{x_j \mid j \in J\}$. Тогава за всеки ляв $R$-модул $M$ и за всяко изображение на множества $\varphi : \{x_j \mid j \in J\} \to M$ съществува единствен хомоморфизъм на леви $R$-модули $f : F \to M$, така че*

$$\begin{tikzcd} \{x_j \mid j \in J\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & F = \coprod_{j\in J} Rx_j \arrow[dl, "f"] \\ M & \end{tikzcd},$$

*$fi = \varphi$, където $i(x_j) := i_j(x_j)$ се определя чрез каноничните мономорфизми $i_j : Rx_j \to \coprod_{j\in J} Rx_j$.*

**Доказателство:** За всяко $j \in J$ разглеждаме изображението

$$\varphi_j : Rx_j \longrightarrow M,$$
$$\varphi_j(rx_j) := r\varphi(x_j).$$

То е коректно определено, доколкото за неторзионния елемент $x_j$ равенството $rx_j = sx_j$ с $r, s \in R$ води винаги до $r = s$. Непосредствено се вижда, че $\varphi_j$ е хомоморфизъм на леви $R$-модули, т.е.

$$\varphi_j(rx_j + sx_j) = \varphi_j((r+s)x_j) = (r+s)\varphi(x_j) = r\varphi(x_j) + s\varphi(x_j) = \varphi_j(rx_j) + \varphi_j(sx_j)$$

за $r, s \in R$ и

$$\varphi_j(t(rx_j)) = \varphi_j((tr)x_j) = (tr)\varphi(x_j) = t[r\varphi(x_j)] = t\varphi_j(rx_j) \quad \text{за } t, r \in R.$$

Съгласно универсалното свойство на ко-произведението $F = \coprod_{j\in J} Rx_j$, съществува единствен хомоморфизъм на леви $R$-модули $f : F \to M$, затварящ комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} Rx_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & F = \coprod_{j\in J} Rx_j \arrow[dl, "f"] \\ M & \end{tikzcd},$$

$fi_j = \varphi_j$, където $i_j : Rx_j \to \coprod_{j\in J} Rx_j$ са каноничните мономорфизми. За всеки базисен елемент $x_j$ имаме $fi(x_j) = fi_j(x_j) = \varphi_j(x_j) = \varphi_j(1_R x_j) = 1_R\varphi(x_j) = \varphi(x_j)$, така че $f : F \to M$ е продължение на $\varphi : \{x_j \mid j \in J\} \to M$. За всяко $R$-модулно продължение $g : F \to M$ на $\varphi$ и всяко $r \in R$ пресмятаме, че

$$gi_j(rx_j) = g[ri_j(x_j)] = g[ri(x_j)] = r[g(i(x_j))] = r\varphi(x_j) = \varphi_j(rx_j).$$

Следователно $gi_j \equiv \varphi_j : Rx_j \to M$ и възникват комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} Rx_j \arrow[r, "i_j"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & F = \coprod_{j\in J} Rx_j \arrow[dl, "g"] \\ M & \end{tikzcd} .$$

Съгласно единствеността на $f$ от универсалното свойство на $\coprod_{j\in J} Rx_j$, получаваме, че $g$ съвпада с $f$. Това доказва твърдението В хода на разсъжденията получихме и явна формула за единственото $R$-модулно продължение $f$ на $\varphi$, а именно

$$f\left(\sum_{j\in J} r_j i_j(x_j)\right) = \sum_{j\in J} r_j\varphi(x_j)$$

за произволни крайни суми $\sum_{j\in J} r_j i_j(x_j) \in \coprod_{j\in J} Rx_j$, Q.E.D.

Твърдение 4.14. *За произволно множество $\{x_j \mid j \in J\}$ съществува ляв (десен) свободен модул ${}_RF$ (съответно $F_R$) с базис $\{x_j \mid j \in J\}$.*

**Доказателство :** Ако $J$ е празното множество, разглеждаме нулевия $R$-модул $\{0\}$ като свободен $R$-модул без базис. В противен случай, за всяко $j \in J$ определяме $Rx_j$ като множеството от символите $rx_j$ за $r \in R$ с $rx_j \neq sx_j$ при $r \neq s$, $r, s \in R$. Задаваме събиране

$$(Rx_j) \times (Rx_j) \longrightarrow (Rx_j)\,,$$
$$rx_j + sx_j := (r+s)x_j$$

и умножение

$$R \times (Rx_j) \longrightarrow (Rx_j)\,,$$
$$t(rx_j) := (tr)x_j \quad \text{с } t \in R.$$

След това разглеждаме взаимно-еднозначното изображение

$$\varphi_j : R \longrightarrow Rx_j,$$
$$\varphi_j(r) := rx_j \quad \text{за } \forall r \in R.$$

Непосредствено от определенията на операциите в $Rx_j$ получаваме, че

$$\varphi_j(r+s) = (r+s)x_j = rx_j + sx_j = \varphi_j(r) + \varphi_j(s) \quad \text{и}$$
$$\varphi_j(rs) = (rs)x_j = r(sx_j) = r\varphi_j(s) \quad \text{за } \forall r, s \in R.$$

Още повече, за всеки елемент $rx_j \in Rx_j$ имаме

$$\varphi_j(0_R) + rx_j = 0_R x_j + rx_j = (0_R + r)x_j = rx_j$$

и аналогично, $rx_j + \varphi_j(0_R) = rx_j$. Следователно $\varphi_j(0_R) = 0_R x_j$ играе ролята на нулев елемент $0_{Rx_j}$ на $Rx_j$. Произволна аксиома за $R$-модула ${}_RR$, различна от съществуването на противоположен елемент, има вида на тъждество $\tau(r_1, \ldots, r_m) = 0_R$ върху операциите събиране на "вектори"и умножение на "вектор"със "скалар". В резултат,

$$\tau(r_1x_j, \ldots, r_mx_j) = \tau(\varphi_j(r_1), \ldots \varphi_j(r_m)) = \varphi_j(\tau(r_1, \ldots, r_m)) = \varphi_j(0_R) = 0_{Rx_j}$$

и съответната аксиома е вярна и в левия $R$-модул $Rx_j$. Накрая да отбележим, че $\varphi_j(-r) := (-r)x_j = -(rx_j)$ е единствен противоположен елемент на $\varphi_j(r) = rx_j$, съгласно

$$-(rx_j) = 0_{Rx_j} + [-(rx_j)] = 0_{Rx_j} + [-(rx_j)] = [(-r)+r]x_j + [-(rx_j)] =$$
$$[(-r)x_j + rx_j] + [-(rx_j)] = (-r)x_j + \{rx_j + [-(rx_j)]\} = (-r)x_j + 0_{Rx_j} = (-r)x_j.$$

С това установихме, че $Rx_j$ е ляв $R$-модул и $\varphi_j : {}_RR \to Rx_j$ е изоморфизъм на леви -модули. По определение, ко-произведението ${}_RF := \coprod_{j\in J} Rx_j$ е ляв $R$-модул с базис $\{x_j \,|\, j \in J\}$. Аналогично се доказва съществуването на десен $R$-модул $F_R := \coprod_{j\in J} x_jR$ с базис $\{x_j \,|\, j \in J\}$, Q.E.D.

## 6. Свободни резолвенти на модули.

Твърдение 4.15. *Произволен ляв (десен) $R$-модул $M$ (съответно $N$) е изоморфен на фактор-модул $M \simeq {}_RF/{}_RK$ (съответно $N \simeq F_R/L_R$) на свободен модул ${}_RF$ (съответно $F_R$).*

**Доказателство:** Нека ${}_RF := \coprod_{x\in M} Rx$ е свободен ляв $R$-модул с базис $M$. Тогава съгласно универсалното свойство на свободния модул ${}_RF$ (виж Твърдение 4.13), съществува единствен хомоморфизъм на леви $R$-модули $f : {}_RF \to M$, затварящ комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"'] & {}_RF = \coprod\limits_{x\in M} Rx \arrow[dl, "f"] \\ M & \end{tikzcd},$$

$fi = \mathrm{Id}_M$ с $i(x) := i_x(x)$ за каноничните мономорфизми $i_x : Rx \to \coprod_{y\in M} Ry$, отговарящи на $x \in M$. В резултат, всеки елемент $x$ на $M$ има вида $x = fi(x) = fi_x(x) \in Im(f)$ и $f$ е епиморфизъм. По теоремата за хомоморфизмите на леви $R$-модули съществува изоморфизъм

$${}_RF/Ker(f) \simeq Im(f) = M.$$

Подмодулът ${}_RK := Ker(f)$ описва съотношенията в $M$, Q.E.D.

Определение 4.16. *Свободна резолвента на левия (десния) $R$-модул $M$ е точна редица*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

*от свободни леви (десни) $R$-модули $F_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Твърдение 4.17. *Всеки ляв (десен) $R$-модул $M$ има свободна резолвента.*

**Доказателство:** Съгласно Твърдение 4.15, за произволен модул $M$ съществува свободен модул $F_0$ с епиморфизъм $\varepsilon : F_0 \to M$. Това е еквивалентно на наличието на точна редица

$$0 \longrightarrow K_0 := Ker(\varepsilon) \xrightarrow{i_0} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0\ ,$$

където $i_0$ е тъждественият мономорфизъм. По-нататък, прилагайки Твърдение 4.15 получаваме точна редица

$$0 \longrightarrow K_1 := Ker(\pi_1) \xrightarrow{i_1} F_1 \xrightarrow{\pi_1} K_0 \longrightarrow 0$$

със свободен модул $F_1$ и тъждествено влагане $i_1$. За хомоморфизма

$$d_1 := i_0\pi_1 : F_1 \longrightarrow F_0$$

на свободни модули пресмятаме непосредствено, че

$$Im(d_1) = i_0\pi_1(F_1) = i_0(K_0) = K_0 = Ker(\varepsilon).$$

Следователно редицата

$$F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

е точна в $F_0$.
Направените дотук разсъждения могат да се опишат с диаграмата

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 & & \\
 & & K_1 \arrow[ur] \arrow[d, "i_1"] & & & \\
F_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[dr, "\pi_3"] & F_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[ur, "\pi_2"] & F_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dr, "\pi_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & K_2 \arrow[u, "i_2"] \arrow[dr] & & K_0 \arrow[u, "i_0"] \arrow[dr] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 & 0 \arrow[u] & 0 &
\end{tikzcd}$$

С индукция по да допуснем, че сме построили редица

$$F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

от свободни $R$-модули $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$, която е точна в $M, F_0, \dots, F_{n-2}$. Да предположим също, че диференциалът $d_{n-1} = i_{n-2}\pi_{n-1}$, където $i_{n-2}$ е тъждественият мономорфизъм от точната редица

$$0 \longrightarrow K_{n-2} \xrightarrow{i_{n-2}} F_{n-2} \xrightarrow{\pi_{n-2}} K_{n-3} \longrightarrow 0\ ,$$

а $\pi_{n-1}$ е епиморфизмът от точната редица

$$0 \longrightarrow K_{n-1} := Ker(\pi_{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1}} F_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} K_{n-2} \longrightarrow 0\ .$$

Прилагаме Твърдение 4.15 към $K_{n-1}$, за да построим точна редица

$$0 \longrightarrow K_n := Ker(\pi_n) \xrightarrow{i_n} F_n \xrightarrow{\pi_n} K_{n-1} \longrightarrow 0$$

със свободен модул $F_n$ и да положим $d_n := i_{n-1}\pi_n : F_n \to F_{n-1}$. Вземайки предвид, че $i_{n-2}$ е мономорфизъм, проверяваме

$$Im(d_n) = i_{n-1}\pi_n(F_n) = i_{n-1}(K_{n-1}) = K_{n-1} =$$

$$Ker(\pi_{n-1}) = Ker(i_{n-2}\pi_{n-1}) = Ker(d_{n-1})$$

и стигаме до заключението, че така получената редица

$$F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-2} \qquad \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

е точна и в $F_{n-1}$. Да отбележим, че доказателството за съществуване на свободна резолвента е алгоритмично. Индуктивната стъпка се илюстрира със следната диаграма

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \\
 & & K_{n-2} \arrow[ur] \arrow[d, "i_{n-2}"] & \\
F_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dr, "\pi_n"] & F_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[ur, "\pi_{n-1}"] & F_{n-2} & \\
 & K_{n-1} \arrow[u, "i_{n-1}"] \arrow[dr] & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 &
\end{tikzcd}
\quad , \qquad \text{Q.E.D.}
$$

Свободната резолвента на модул не е единствена.