Лекция 3

Верижни комплекси от линейни пространства. Верижни комплекси от хомоморфизми.

1. Произведение и ко-произведение на модули.

Нека $\{A_j \mid j \in J\}$ е фамилия от леви (десни) R-модули, индексирана с произволно множество J. Декартовото произведение на множества $\prod_{j\in J} A_j$ се състои от колекциите $(a_j)_{j\in J}$, които за всяко $j \in J$ съдържат точно един елемент $a_j \in A_j$.

Лема 3.1. *Декартовото произведение $\prod_{j\in J} A_j$ на леви (десни) R-модули A_j, $j \in J$ е ляв (десен) R-модул относно покомпонентно въведените събиране*

$$\left(\prod_{j\in J} A_j\right) \times \left(\prod_{j\in J} A_j\right) \longrightarrow \left(\prod_{j\in J} A_j\right),$$

$$((a_j)_{j\in J}, (b_j)_{j\in J}) \mapsto (a_j + b_j)_{j\in J}$$

и ляво (дясно) умножение с $r \in R$,

$$R \times \left(\prod_{j\in J} A_j\right) \longrightarrow \left(\prod_{j\in J} A_j\right), \quad \textit{(съответно} \left(\prod_{j\in J} A_j\right) \times R \longrightarrow \left(\prod_{j\in J} A_j\right))$$

$$(r, (a_j)_{j\in J}) \mapsto (ra_j)_{j\in J}, \quad \textit{(съответно } (a_j)_{j\in J}, r) \mapsto (a_j r)_{j\in J})$$

Доказателство: Покомпонентното събиране в $\prod_{j\in J} A_j$ изпълнява асоциативния закон

$$[(a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J}] + (c_j)_{j\in J} = (a_j + b_j)_{j\in J} + (c_j)_{j\in J} = ((a_j + b_j) + c_j)_{j\in J} =$$
$$(a_j + (b_j + c_j))_{j\in J} = (a_j)_{j\in J} + (b_j + c_j)_{j\in J} = (a_j)_{j\in J} + [(b_j)_{j\in J} + (c_j)_{j\in J}].$$

Множеството $(0_{A_j})_{j\in J}$ играе роля на $0_{\prod_{j\in J} A_j}$, доколкото

$$(0_{A_j})_{j\in J} + (a_j)_{j\in J} = (0_{A_j} + a_j)_{j\in J} = (a_j)_{j\in J} =$$
$$(a_j + 0_{A_j})_{j\in J} = (a_j)_{j\in J} + (0_{A_j})_{j\in J}.$$

Произволен елемент $(a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A_j$ има противоположен $(-a_j)_{j\in J}$, съгласно

$$(a_j)_{j\in J} + (-a_j)_{j\in J} = (a_j + (-a_j))_{j\in J} = (0_{A_j})_{j\in J},$$
$$(-a_j)_{j\in J} + (a_j)_{j\in J} = ((-a_j) + a_j)_{j\in J} = (0_{A_j})_{j\in J}.$$

Така определеното събиране е комутативно,

$$(a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J} = (a_j + b_j)_{j\in J} = (b_j + a_j)_{j\in J} = (b_j)_{j\in J} + (a_j)_{j\in J}.$$

В резултат, $\left(\prod_{j\in J} A_j, +\right)$ е абелева група.

Останалите четири аксиоми ще проверим само за леви R-модули, доколкото случаят на десни R-модули е напълно аналогичен. Дистрибутивният закон над "векторен"множител гласи, че

$$r((a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J}) = r(a_j + b_j)_{j\in J} = (r(a_j + b_j))_{j\in J} =$$
$$(ra_j + rb_j)_{j\in J} = (ra_j)_{j\in J} + (rb_j)_{j\in J} = r(a_j)_{j\in J} + r(b_j)_{j\in J}$$

за произволни $(a_j)_{j\in J}, (b_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A_j$. Дистрибутивният закон над "скаларен"множител в $\prod_{j\in J} A_j$,

$$(r+s)(a_j)_{j\in J} = ((r+s)a_j)_{j\in J} = (ra_j + sa_j)_{j\in J} =$$
$$(ra_j)_{j\in J} + (sa_j)_{j\in J} = r(a_j)_{j\in J} + s(a_j)_{j\in J}$$

следва от съответния закон в A_j за всяко $j \in J$. "Асоциативността"

$$(rs)(a_j)_{j\in J} = ((rs)a_j)_{jinJ} = (r(sa_j))_{j\in J} = r(sa_j)_{j\in J} = r[s(a_j)_{j\in J}]$$

и

$$1_R(a_j)_{j\in J} = (1_R a_j)_{j\in J} = (a_j)_{j\in J}$$

за всяко $(a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A_j$ завършват доказателството на това, че произведението $\prod_{j\in J} A_j$ на леви R-модули е ляв R-модул, Q.E.D.

Определение 3.2. *За произволна фамилия $\{A_j \,|\, j \in J\}$ от леви десни R-модули A_j, определеният в Лема 3.1 ляв (десен) R-модул $\prod_{j\in J} A_j$ се нарича произведение на A_j.*

Лема 3.3. *Подмножеството $\coprod_{j\in J} A_j$ на елементите $(a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A_j$ с най-много краен брой ненулеви a_j е ляв (десен) подмодул на $\prod_{j\in J} A_j$.*

Доказателство: За произволни $(a_j)_{j\in J}, (b_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} A_j$ съществуват индекси $j_1, \dots, j_m, j'_1, \dots, j'_n \in J$, така че $a_k = 0_{A_k}$ за всяко $k \notin \{j_1, \dots, j_m\}$ и $b_l = 0_{A_l}$ за всяко $l \notin \{j'_1, \dots, j'_n\}$. Тогава $a_s - b_s = 0_{A_s}$ за всяко $s \notin \{j_1, \dots, j_m, j'_1, \dots, j'_n\}$, така че $(a_j)_{j\in J} - (b_j)_{j\in J} = (a_j - b_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} A_j$. Нека всички A_j, а оттам и $\prod_{j\in J} A_j$ са леви R-модули. Тогава за произволно $(a_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} A_j$ с $a_k = 0_{A_k}$ за $k \notin \{j_1, \dots, j_m\}$ и за произволно $r \in R$ имаме $ra_k = 0_{A_k}$ при $k \notin \{j_1, \dots, j_m\}$. По този начин $r(a_j)_{j\in J} = (ra_j)_{j\in J} \in \coprod_{j\in J} A_j$ и $\coprod_{j\in J} A_j$ е ляв R-подмодул на $\prod_{j\in J} A_j$, Q.E.D.

Определение 3.4. *За произволни леви (десни) R-модули A_j, $j \in J$ подмодулът $\coprod_{j\in J} A_j \subseteq \prod_{j\in J} A_j$, съставен от елементите $(a_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} A_j$ с краен носител се нарича ко-произведение на A_j, $j \in J$.*

Ако J е крайно множество, то очевидно, ко-произведението на произволни леви (десни) R-модули A_j, $j \in J$ съвпада с произведението на тези модули, $\coprod_{j\in J} A_j = \prod_{j\in J} A_j$.

Лема 3.5. *За произволна фамилия $\{A_j \,|\, j \in J\}$ от леви (десни) R-модули, изображенията*

$$p_k : \prod_{j\in J} A_j \longrightarrow A_k,$$
$$p_k((a_j)_{j\in J}) := a_k$$

за $k \in J$ са епиморфизми. Ако δ_j^k е символът на Кронекер с $\delta_k^k = 1_R$ и $\delta_j^k = 0_R$ за $j \neq k$, то изображенията

$$i_k : A_k \longrightarrow \coprod_{j\in J} A_j,$$
$$i_k(a_k) := (\delta_j^k a_k)_{j\in J}$$

са мономорфизми за всички $k \in J$.

Доказателство: Преди всичко, p_k са хомоморфизми на R-модули, защото $p_k((a_j)_{j\in J} + (b_j)_{j\in J}) = p_k((a_j + b_j)_{j\in J}) = a_k + b_k = p_k((a_j)_{j\in J}) + p_k((b_j)_{j\in J})$ и $p_k(r(a_j)_{j\in J}) = p_k((ra_j)_{j\in J}) = ra_k = rp_k((a_j)_{j\in J})$. Произволно $a_k \in A_k$ е образ $p_k i_k(a_k) = \delta_k^k a_k = 1_R a_k = a_k$ под действие на p_k, така че p_k е епиморфизъм.

Съгласно $i_k(a_k+b_k) = (\delta_j^k(a_k+b_k))_{j\in J} = (\delta_j^k a_k + \delta_j^k b_k)_{j\in J} = (\delta_j^k a_k)_{j\in J} + (\delta_j^k b_k)_{j\in J} = i_k(a_k)+i_k(b_k)$ и $i_k(ra_k) = (\delta_j^k(ra_k))_{j\in J} = ((\delta_j^k r)a_k)_{j\in J} = (r(\delta_j^k a_k))_{j\in J} = r(\delta_j^k a_k)_{j\in J} = ri_k(a_k)$ изображенията i_k са хомоморфизми на леви R-модули (стига A_j за всички $j\in J$ да са леви R-модули). Освен това, $i_k(a_k) = (\delta_j^k a_k)_{j\in J} = (0_{A_j})_{j\in J} = 0_{\coprod_{j\in J} A_j}$ тогава и само тогава, когато $a_k = 0_{A_k}$. Следователно $Ker(i_k) = \{0_{A_k}\}$ и i_k са мономорфизми, Q.E.D.

Определение 3.6. *Нека $\{A_j \,|\, j\in J\}$ е произволна фамилия от леви (десни) R-модули. Епиморфизмите $p_k : \prod_{j\in J} A_j \to A_k$ от Лема 3.5 се наричат канонични епиморфизми на произведението $\prod_{j\in J} A_j$. Ограниченията на p_k върху ко-произведението $\coprod_{j\in J} A_j$ са каноничните епиморфизми на $\coprod_{j\in J} A_j$.*
Мономорфизмите $i_k : A_k \to \coprod_{j\in J} A_j$ от Лема 3.5 се наричат канонични мономорфизми на ко-произведението $\coprod_{j\in J} A_j$. Доколкото $\coprod_{j\in J} A_j$ е подмодул на $\prod_{j\in J} A_j$, тези изображения могат да се разглеждат като мономорфизми $i_k : A_k \to \prod_{j\in J} A_j$ на $\prod_{j\in J} A_j$.

Да напомним още веднъж, че $p_k i_k = \mathrm{Id}_{A_k}$ за всяко $k\in J$ и да отбележим, че $p_l i_k : A_k \to A_l$ се анулира тъждествено за $k\neq l$ от J.

2. Верижни комплекси от линейни пространства.

За изучаването на верижните комплекси от линейни пространства ще използваме следния по-подробен вариант на теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение.

Лема 3.7. *Нека U и V са линейни пространтва над поле F, U е крайномерно, $f : U \to V$ е линейно изображение, а $b_1,\dots,b_k$ е базис на ядрото $Ker(f)$. Тогава за произволен базис $b_1,\dots,b_k,b_{k+1},\dots,b_l$ на U векторите $f(b_{k+1}),\dots,f(b_l)$ образуват базис на образа $Im(f)$.*

Доказателство: Ако $\sum_{i=k+1}^l \lambda_i f(b_i) = 0_V$ за $\lambda_i\in F$, то $f\left(\sum_{i=k+1}^l \lambda_i b_i\right) = 0_V$, така че $\sum_{i=k+1}^l \lambda_i b_i \in Ker(f)$. С други думи, съществуват $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, изпълняващи условието $\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i = \sum_{i=k+1}^l \lambda_i b_i$. Но тогава $\sum_{i=1}^k \lambda_i b_i + \sum_{i=k+1}^l (-\lambda_i) b_i = 0_U$ изисква анулиране на всички $\lambda_1,\dots,\lambda_k,\lambda_{k+1},\dots,\lambda_l$, съгласно линейната независимост на $b_1,\dots,b_k,b_{k+1},\dots,b_l$. По този начин проверихме линейната независимост на $f(b_{k+1}),\dots,f(b_l)$ над F.
По определение, елементите на образа $Im(f)$ имат вида $f(u)$ за някой вектор $u\in U$. Доколкото $b_1,\dots,b_k,b_{k+1},\dots,b_l$ е базис на U над F, съществуват еднозначно определени координати $x_1,\dots,x_l$ на u спрямо $b_1,\dots,b_l$, така че $u = \sum_{i=1}^l x_i b_i$. В резултат, $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^l x_i b_i\right) = \sum_{i=1}^l x_i f(b_i) = \sum_{i=k+1}^l x_i f(b_i)$, вземайки предвид, че $b_1,\dots,b_k\in Ker(f)$. Това проверява, че образът $Im(f)$ съвпада с линейната обвивка $l_F\left(f(b_i)\,|\,k+1\le i\le l\right)$, така че $f(b_{k+1}),\dots,f(b_l)$ е базис на $Im(f)$ над F, Q.E.D.

Твърдение 3.8. *(i) За произволна фамилия $\{B_n, H_n \,|\, n\in\mathbb{Z}\}$ от линейни пространства над поле F определяме пространствата $C_n := B_n \coprod H_n \coprod B_{n-1}$ и изображенията*

$$d_n := i_1 p_3 : C_n = B_n \coprod H_n \coprod B_{n-1} \longrightarrow C_{n-1} = B_{n-1} \coprod H_{n-1} \coprod B_{n-2},$$

$$d_n(b_n, h_n, b_{n-1}) := (b_{n-1}, 0_{H_{n-1}}, 0_{B_{n-2}}),$$

където p_3 е каноничният епиморфизъм върху третата компонента, а i_1 е каноничният мономорфизъм като първа компонента. Тогава $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от линейни пространства над F.

(ii) За произволен верижен комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от крайномерни линейни пространства над поле F съществува изоморфизъм

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] \\
B_n(C_\bullet)\coprod H_n(C_\bullet)\coprod B_{n-1}(C_\bullet) \arrow[r, "i_1 p_3"] & B_{n-1}(C_\bullet)\coprod H_{n-1}(C_\bullet)\coprod B_{n-2}(C_\bullet)
\end{tikzcd}$$

на верижни комплекси от F-модули, където p_3 е каноничният епиморфизъм върху третата компонента, а i_1 е каноничният мономорфизъм като първа компонента.

Доказателство: (i) Съгласно Лема 1.11 d_n са F-линейни изображения като композиции на такива. По определение,

$$d_n d_{n+1}(b_{n+1}, h_{n+1}, b_n) = d_n(b_n, 0_{H_n}, 0_{B_{n-1}}) = (0_{B_{n-1}}, 0_{H_{n-1}}, 0_{B_{n-2}}) = 0_{C_{n-1}}$$

за произволни $b_s \in B_s(C_\bullet)$ и $h_{n+1} \in H_{n+1}(C_\bullet)$. Следователно $d_n d_{n+1} \equiv 0$ и $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от линейни пространства над F.
(ii) Трябва да докажем, че съществуват F-линейни изоморфизми

$$\varphi_n : C_n \longrightarrow B_n(C_\bullet)\coprod H_n(C_\bullet)\coprod B_{n-1}(C_\bullet),$$

които комутират с диференциалите, т.е. участват в комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "d_n"'] & B_n(C_\bullet)\coprod H_n(C_\bullet)\coprod B_{n-1}(C_\bullet) \arrow[d, "i_1 p_3"'] \\
C_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & B_{n-1}(C_\bullet)\coprod H_{n-1}(C_\bullet)\coprod B_{n-2}(C_\bullet)
\end{tikzcd}.$$

Нека $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от крайномерни линейни пространства над поле F. За всяко цяло n избираме базиси $b_1^{(n)}, \ldots, b_{k_n}^{(n)}$ на $B_n(C_\bullet)$ и допълваме до базиси $b_1^{(n)}, \ldots, b_{k_n}^{(n)}, b_{k_{n+1}}^{(n)}, \ldots, b_{l_n}^{(n)}$ на $Z_n(C_\bullet)$. Съгласно Лема 3.7, приложена към естествения епиморфизъм $\pi_n : Z_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet)$ с ядро $B_n(C_\bullet)$, векторите $\{\pi_n(b_j^{(n)}) = b_j^{(n)} + B_n(C_\bullet) \,|\, k_n+1 \leq j \leq l_n\}$ образуват базис на $H_n(C_\bullet)$ над F. Ако $\widetilde{H_n} := l_F(b_j^{(n)} \,|\, k_n+1 \leq j \leq l_n)$, то ограничението $\pi_n : \widetilde{H_n} \to H_n(C_\bullet)$ е F-линеен изоморфизъм, доколкото трансформира базиса $\{b_j^{(n)} \,|\, k_n+1 \leq j \leq l_n\}$ на $\widetilde{H_n}$ в базиса $\{b_j^{(n)} + B_n(C_\bullet) \,|\, k_n+1 \leq j \leq l_n\}$ на $H_n(C_\bullet)$. Разбиването

$$\{b_j^{(n)} \,|\, 1 \leq j \leq l_n\} = \{b_j^{(n)} \,|\, 1 \leq j \leq k_n\} \cup \{b_j^{(n)} \,|\, k_n+1 \leq j \leq l_n\}$$

на фиксирания базис на$Z_n(C_\bullet)$ в непресичащо се обединение от базиса на $B_n(C_\bullet)$ и базиса на $\widetilde{H_n}$, задава разлагане $Z_n(C_\bullet) = B_n(C_\bullet) \oplus \widetilde{H_n} = B_n(C_\bullet) \coprod \widetilde{H_n}$ в директна сума, която по определение съвпада с ко-произведение. По този начин получаваме F-линейни изоморфизми

$$Z_n(C_\bullet) = B_n(C_\bullet)\coprod \widetilde{H_n} \xrightarrow{(\mathrm{Id}_{B_n}, \pi_n)} B_n(C_\bullet)\coprod H_n(C_\bullet)$$

за $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Да продължим базисите $\{b_j^{(n)} \,|\, 1 \leq j \leq l_n\}$ на $Z_n(C_\bullet)$ до базиси $\{b_j^{(n)} \,|\, 1 \leq j \leq m_n\}$, $m_n \geq l_n$ на C_n. Съгласно Лема 3.7, приложена към F-линейните диференциали $d_n : C_n \to B_{n-1}(C_\bullet)$, векторите $\{d_n(b_j^{(n)}) \,|\, l_n + 1 \leq j \leq m_n\}$ образуват базис на $B_{n-1}(C_\bullet)$. Взаимно-еднозначното съответствие между $b_j^{(n)}$ и $d_n(b_j^{(n)})$ за $l_n + 1 \leq j \leq m_n$ се продължава еднозначно до F-линеен изоморфизъм

$$d_n : \widetilde{B_{n-1}} := l_F(b_j^{(n)} \,|\, l_n + 1 \leq j \leq m_n) \longrightarrow B_{n-1}(C_\bullet).$$

Представянето $C_n = Z_n(C_\bullet) \coprod \widetilde{B_{n-1}} = B_n(C_\bullet) \coprod \widetilde{H_n} \coprod \widetilde{B_{n-1}}$, задава F-линейни изоморфизми

$$\varphi_n := (\mathrm{Id}_{B_n}, \pi_n, d_n) : B_n(C_\bullet) \coprod \widetilde{H_n} \coprod \widetilde{B_{n-1}} \longrightarrow B_n(C_\bullet) \coprod H_n(C_\bullet) \coprod B_{n-1}(C_\bullet).$$

За произволен елемент $(b_n, \widetilde{h_n}, \widetilde{b_{n-1}}) \in C_n$ пресмятаме, че

$$i_1 p_3 \varphi_n(b_n, \widetilde{h_n}, \widetilde{b_{n-1}}) = i_1 p_3(b_n, \widetilde{h_n} + B_n(C_\bullet), d_n(\widetilde{b_{n-1}})) = (d_n(\widetilde{b_{n-1}}, 0_{H_{n-1}}, 0_{B_{n-2}})$$

и

$$\varphi_{n-1} d_n(b_n, \widetilde{h_n}, \widetilde{b_{n-1}}) = \varphi_{n-1}(d_n(\widetilde{b_{n-1}}) = (d_n(\widetilde{b_{n-1}}), 0_{H_{n-1}}, 0_{B_{n-2}}),$$

за да докажем, че $i_1 p_3 \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n$, Q.E.D.

3. Действия с хомоморфизми на модули.

Твърдение 3.9. *(i) Ако A и B са леви (десни) R-модули, то множеството $Hom_R(A, B)$ на R-модулните хомоморфизми от A в B е абелева група относно поточковото събиране*

$$\varphi + \psi : A \longrightarrow B,$$

$$(\varphi + \psi)(a) := \varphi(a) + \psi(a)$$

за произволни $a \in A$, $\varphi, \psi \in Hom_R(A, B)$.
(ii) Още повече, ако R е комутативен пръстен с единица, то абелевата група $Hom_R(A, B)$ се превръща в ляв R-модул относно поточковото умножение

$$R \times Hom_R(A, B) \longrightarrow Hom_R(A, B),$$

$$(r, \varphi) \mapsto (r\varphi)$$

по правилото

$$(r\varphi)(a) := r[\varphi(a)].$$

Доказателство: (i) Преди всичко, да проверим, че $\varphi + \psi$ е хомоморфизъм на леви (десни) R-модули. Наистина,

$$(\varphi + \psi)(a_1 + a_2) = \varphi(a_1 + a_2) + \psi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \psi(a_1) + \psi(a_2) =$$

$$[\varphi(a_1) + \psi(a_1)] + [\varphi(a_2) + \psi(a_2)] = (\varphi + \psi)(a_1) + (\varphi + \psi)(a_2)$$

за $\forall a_1, a_2 \in A$ и

$$(\varphi + \psi)(ra) = \varphi(ra) + \psi(ra) = r\varphi(a) + r\psi(a) = r[\varphi(a) + \psi(a)] = r[(\varphi + \psi)(a)]$$

за $\forall r \in R$, $\forall a \in A$. Следователно $\varphi + \psi \in Hom_R(A, B)$ за $\forall \varphi, \psi \in Hom_R(A, B)$. Остава да докажем, че са изпълнени аксиомите за абелева група. Разглежданата операция е асоциативна, т.е.

$$[(\varphi + \psi) + \theta](a) = (\varphi + \psi)(a) + \theta(a) = [\varphi(a) + \psi(a)] + \theta(a)$$

$$\varphi(a) + [\psi(a) + \theta(a)] = \varphi(a) + (\psi + \theta)(a) = [\varphi + (\psi + \theta)](a)$$

за $\forall \varphi, \psi, \theta \in Hom_R(A, B)$, $\forall a \in A$. Комутативният закон

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) = \psi(a) + \varphi(a) = (\psi + \varphi)(a)$$

следва от комутативността на събирането в B. Нека 0_{Hom} е нулевото изображение с $0_{Hom}(a) = 0_B$ за $\forall a \in A$. Тогава 0_{Hom} е хомоморфизъм на R-модули, доколкото

$$0_{Hom}(a_1 + a_2) = 0_B = 0_B + 0_B = 0_{Hom}(a_1) + 0_{Hom}(a_2)$$

за $\forall a_1, a_2 \in A$ и

$$0_{Hom}(ra) = 0_B = r0_B = r0_{Hom}(a)$$

за $\forall r \in R$, $\forall a \in A$. При това, за всички $\varphi \in Hom_R(A, B)$ и $a \in A$ е изпълнено

$$(\varphi + 0_{Hom})(a) = \varphi(a) + 0_{Hom}(a) = \varphi(a) + 0_B = \varphi(a).$$

Следователно $\varphi + 0_{Hom} = 0_{Hom} + \varphi = \varphi$. За произволен R-модулен хомоморфизъм $\varphi : A \to B$ да разгледаме изображението $(-\varphi) : A \to B$ с $(-\varphi)(a) := -[\varphi(a)]$ за $\forall a \in A$. Проверяваме непосредствено, че $-\varphi$ е хомоморфизъм на R-модули, защото

$$(-\varphi)(a_1 + a_2) = -[\varphi(a_1 + a_2)] = -[\varphi(a_1) + \varphi(a_2)] =$$

$$[-\varphi(a_1)] + [-\varphi(a_2)] = (-\varphi)(a_1) + (-\varphi)(a_2)$$

за $\forall a_1, a_2 \in A$ и

$$(-\varphi)(ra) = -[\varphi(ra)] = -[r\varphi(a)] = r[-\varphi(a)] = r[(-\varphi)(a)].$$

Тук използваме единствеността на противоположния елемент на R-модул, за да заместим $-(b_1 + b_2)$ с $(-b_1) + (-b_2)$ и $-(rb)$ с $r(-b)$. Хомоморфизмът $-\varphi \in Hom_R(A, B)$ е противоположен на $\varphi \in Hom_R(A, B)$, доколкото

$$[\varphi + (-\varphi)](a) = \varphi(a) + [(-\varphi)(a)] = \varphi(a) + \{-[\varphi(a)]\} = 0_B = 0_{Hom}(a),$$

за $\forall a \in A$. Следователно $Hom_R(A, B)$ е група относно поточковото събиране.
(ii) По аналогия с (i) да проверим първо, че $r\varphi \in Hom_R(A, B)$ за $r \in R$ и $\varphi \in Hom_R(A, B)$. Наистина,

$$(r\varphi)(a_1 + a_2) = r[\varphi(a_1) + \varphi(a_2)] = r\varphi(a_1) + r\varphi(a_2) = (r\varphi)(a_1) + (r\varphi)(a_2).$$

Също,

$$r\varphi(sa) = r[\varphi(sa)] = r[s\varphi(a)] = (rs)\varphi(a) =$$

$$(sr)\varphi(a) = s[r\varphi(a)] = s[(r\varphi)(a)] = s[(r\varphi)(a)].$$

Следователно $Hom_R(A, B)$ е R-модул относно така определеното умножение с $r \in R$.
Вече знаем, че $Hom_R(A, B)$ е абелева група относно поточковото събиране. Трябва да докажем, че $Hom_R(A, B)$ изпълнява и останалите 4 аксиоми за ляв R-модул. Наистина, дистрибутивният закон над "векторен"множител

$$[r(\varphi + \psi)](a) = r[\varphi(a) + \psi(a)] = r\varphi(a) + r\psi(a) = (r\varphi)(a) + (r\psi)(a) = (r\varphi + s\psi)(a)$$

за всяко $a \in A$. Аналогично, дистрибутивният закон над "скаларен"множител

$$[(r + s)\varphi](a) = (r + s)\varphi(a) = r\varphi(a) + s\varphi(a) = (r\varphi)(a) + (s\varphi)(a) = (r\varphi + s\varphi)(a).$$

"Асоциативният"закон

$$[(rs)\varphi](a) = (rs)(\varphi(a)) = r[s\varphi(a)] = [r(s\varphi)](a).$$

Накрая,

$$(1_R\varphi)(a) = 1_R(\varphi(a)) = \varphi(a).$$

Това установява, че $Hom_R(A, B)$ е ляв R-модул относно поточковото събиране и умножение с $r \in R$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. *Нека A, B и C са леви (десни) R-модули. Тогава:*
(i) за произволни $f, g \in Hom_R(A, B)$ и $h \in Hom_R(B, C)$ е в сила десният дистрибутивен закон

$$h(f+g) = hf + hg$$

с $h(f+g), hf, hg \in Hom_R(A, C)$;
(ii) за произволни $f \in Hom_R(A, B)$ и $k, h \in Hom_R(B, C)$ е изпълнен левият дистрибутивен закон

$$(h+k)f = hf + kf$$

с$(h+k)f, hf, kf \in Hom_R(A, C)$.

Доказателство:
Два хомоморфизма от $Hom_R(A, C)$ са равни тогава и само тогава, когато действат по един и същи начин върху всяко $a \in A$. Наистина,

$(i)[h(f+g)](a) = h[(f+g)(a)] = h[f(a)+g(a)] = h[f(a)]+h[g(a)] = (hf)(a)+(hg)(a);$

$(ii)[(h+k)f](a) = (h+k)[f(a)] = h[f(a)]+k[f(a)] = (hf)(a)+(kf)(a) = (hf+kf)(a),$

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 3.11. *(i) Нека R е асоциативен пръстен с единица, $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви (десни) R-модули и A е ляв (десен) R-модул. Тогава изображенията*

$$D_n : Hom_R(A, C_n) \longrightarrow Hom_R(A, C_{n-1}),$$

$$[D_n(\varphi)](a) := d_n(\varphi(a))$$

за $\forall\varphi \in Hom_R(A, C_n)$ и $\forall a \in A$ задават верижен комплекс

$$\{(Hom_R(A, C_n), D_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

от абелеви групи.
(ii) Ако R е комутативен пръстен с едиинца, $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви R-модули, а A е ляв R-модул, то изображението

$$D_n : Hom_R(A, C_n) \longrightarrow Hom_R(A, C_{n-1}),$$

$$[D_n(\varphi)](a) := d_n\varphi(a)$$

превръща $\{(Hom_R(A, C_n), D_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ във верижен комплекс от R-модули.

Доказателство: В Твърдение 3.9 установихме, че $Hom_R(A, C_n)$ са абелеви групи относно поточковото събиране на хомоморфизми. Изображенията D_n са хомоморфизми на абелеви групи, доколкото

$$[D_n(\varphi+\psi)](a) = d_n[(\varphi+\psi)(a)] = d_n[\varphi(a)+\psi(a)] =$$

$$d_n(\varphi(a)) + d_n(\psi(a)) = [D_n(\varphi)](a) + [D_n(\psi)](a) = [D_n(\varphi)+D_n(\psi)](a)$$

за $\forall\varphi, \psi \in Hom_R(A, C_n)$, $\forall a \in A$. При това, $D_nD_{n+1} \equiv 0$, защото

$$[D_nD_{n+1}(\varphi)](a) = d_n[D_{n+1}(\varphi)(a)] = d_nd_{n+1}(\varphi(a)) = 0_{C_{n-1}}$$

за произволни $\varphi \in Hom_R(A, C_{n+1})$, $a \in A$. Следователно $\{(Hom_R(A, C_n), D_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от абелеви групи.
(ii) За да докажем, че D_n са хомоморфизми на леви R-модули, да отбележим, че за произволни $r \in R$, $\varphi \in Hom_R(A, B)$ и $a \in A$ е в сила

$$[D_n(r\varphi)](a) = d_n[(r\varphi)(a)] = d_n\{r[\varphi(a)]\} = rd_n[\varphi(a)] = r[D_n(\varphi)(a)].$$

Следователно $D_n(r\varphi) = rD_n(\varphi)$ е хомоморфизъм на леви R-модули. Доколкото $D_nD_{n+1} \equiv 0$ съгласно (i), стигаме до извода, че $\{(Hom_R(A, B), D_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви R-модули.

Твърдение 3.12. *Нека R е комутативен пръстен с единица, $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви R-модули, а ${}_RR$ е пръстенът R, разгледан като ляв R-модул. Тогава съществува изоморфизъм на верижни комплекси от R-модули*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "D_{n+1}"] & Hom_R({}_RR, C_n) \arrow[r, "D_n"] \arrow[d, "F_n"'] & Hom_R({}_RR, C_{n-1}) \arrow[r, "D_{n-1}"] \arrow[d, "F_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Доказателство: Определяме изображенията

$$F_n : Hom_R({}_RR, C_n) \longrightarrow C_n$$

по правилото

$$F_n(\varphi) := \varphi(1_R).$$

Проверяваме, че F_n са хомоморфизми на леви R-модули, защото

$$F_n(\varphi+\psi) = (\varphi+\psi)(1_R) = \varphi(1_R) + \psi(1_R) = F_n(\varphi) + F_n(\psi)$$

и

$$F_n(r\varphi) = (r\varphi)(1_R) = r[\varphi(1_R)] = rF_n(\varphi).$$

Хомоморфизмите F_n комутират със съответните диференциали

$$D_n : Hom_R({}_RR, C_n) \to Hom_R({}_RR, C_{n-1})$$

и $d_n : C_n \to C_{n-1}$ съгласно

$$(F_{n-1}D_n)(\varphi) = F_{n-1}[D_n(\varphi)] = D_n(\varphi)(1_R) = d_n\varphi(1_R) = d_nF_n(\varphi).$$

Следователно $F_\bullet : Hom_R({}_RR, C_\bullet) \to C_\bullet$ е морфизъм на верижни комплекси от R-модули.
За да установим, че изображенията F_n са взаимно-еднозначни за $\forall n \in \mathbb{Z}$, да изберем $c_n \in C_n$. Ще проверим, че съществува единствено $\varphi \in Hom_R({}_RR, C_n)$ със свойството $F_n(\varphi) = \varphi(1_R) = c_n$. Да разгледаме изображението

$$\varphi : {}_RR \longrightarrow C_n,$$

определено с равенството

$$\varphi(r) := rc_n$$

за $\forall r \in R$. По този начин получаваме хомоморфизъм на леви R-модули, доколкото

$$\varphi(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)c_n = r_1c_n + r_2c_n = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$$

и

$$\varphi(rs) = (rs)c_n = r(sc_n) = r\varphi(s).$$

Непосредствено пресмятаме, че $F_n(\varphi) = \varphi(1_R) = 1_Rc_n = c_n$. Ако допуснем, че съществува $\psi \in Hom_R({}_RR, C_n)$ с $F_n(\psi) = \psi(1_R) = c_n$, то за произволно $r \in R$ е в сила

$$\psi(r) = r\psi(1_R) = rc_n = \varphi(r),$$

така че $\psi \equiv \varphi$. Следователно F_n са взаимно-еднозначни и фамилията от хомоморфизми $F_\bullet : Hom_R({}_RR, C_\bullet) \to C_\bullet$ е изоморфизъм на верижни комплекси от R-модули, Q.E.D.

Лема-Определение 3.13. *Ако*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

са морфизми на верижни комплекси от R-модули, то

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n+g_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}+g_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

е морфизъм на верижни комплекси от R-модули, наречен сума на $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и $g = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Доказателство: В Твърдение 3.9 доказахме, че $Hom_R(C_n, D_n)$ са абелеви групи относно поточковото събиране $(f_n + g_n)(c_n) = f_n(c_n) + g_n(c_n)$ за $f_n, g_n \in Hom_R(C_n, D_n)$, $c_n \in C_n$. В частност, $f_n + g_n \in Hom_R(C_n, D_n)$ за всяко $n \in \mathbb{Z}$. По-нататък, Следствие 3.10 позволява да изведем

$$(f_{n-1} + g_{n-1})d_n = f_{n-1}d_n + g_{n-1}d_n = \delta_n f_n + \delta_n g_n = \delta_n(f_n + g_n)$$

от $f_{n-1}d_n = \delta_n f_n$ и $g_{n-1}d_n = \delta_n g_n$. Следователно $f + g = (f_n + g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм на верижни комплекси от R-модули, Q.E.D.