Лекция 2

Верижни комплекси, цикли, граници, хомологии. Морфизми на верижни комплекси.

1. Определения за верижни комплекси, цикли, граници, хомологии.

Да определим някои основни понятия от хомологичната алгебра.

Определение 2.1. *Нека R е асоциативен пръстен с единица. Фамилията $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от леви (десни) R-модули C_n и R-модулни хомоморфизми $C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}$ образува верижен комплекс, ако $d_n d_{n+1} \equiv 0$ за всяко $n \in \mathbb{Z}$. Обикновено записваме*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots .$$

Хомоморфизмите d_n се наричат диференциали на верижния комплекс.

Определение 2.2. *Ако $C_\bullet = \{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви (десни) R-модули, то елементите на R-подмодулите $Z_n(C_\bullet) := Ker(d_n)$ на C_n се наричат цикли, а елементите на R-подмодулите $B_n(C_\bullet) := Im(d_{n+1})$ на C_n се наричат граници.*

Непосредствено се вижда, че всяка граница $d_{n+1}(c_{n+1})$, $c_{n+1} \in C_{n+1}$ е цикъл, доколкото $d_n d_{n+1}(c_{n+1}) = 0_{C_{n-1}}$. Следователно $B_n(C_\bullet)$ са подмодули на $Z_n(C_\bullet)$ за всички $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 2.3. *Ако $C_\bullet = \{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от леви (десни) R-модули, то левите (десните) фактор-модули*

$$H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet), \quad n \in \mathbb{Z}$$

се наричат хомологии на комплекса $C_\bullet$.

Преди да формулираме следващата лема да напомним, че множеството $\mathbb{Z}_m$ от остатъците при деление с естественото число m е фактор-модул $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}$-модула $\mathbb{Z}$ по неговия подмодул $m\mathbb{Z} = \{mz \,|\, z \in \mathbb{Z}\}$. За произволен делител n на m, $\mathbb{Z}$-модулът $m\mathbb{Z}$ е подмодул на $n\mathbb{Z}$ и

$$n\mathbb{Z}_m = n\,(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

е коректно определен фактор-модул за пръстена $\mathbb{Z}$.

Лема 2.4. *Нека a и b са естествени числа, чието произведение ab дели естественото число c. Тогава съществува изоморфизъм на $\mathbb{Z}_c$-модули*

$$a\mathbb{Z}_c/ab\mathbb{Z}_c \simeq \mathbb{Z}_b.$$

Доказателство: Да отбележим, че $\mathbb{Z}$-модулът $a\mathbb{Z}_c = a\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ има анулатор $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(a\mathbb{Z}_c) = \frac{c}{a}\mathbb{Z}$. (От една страна, за всяко $z \in \mathbb{Z}$ имаме $\frac{c}{a}z(a\mathbb{Z}) \subseteq c\mathbb{Z}$. Обратно, ако $x \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(a\mathbb{Z}_c)$, то $xa \in c\mathbb{Z}$, така че $x \in \frac{c}{a}\mathbb{Z}$.) В частност, $c\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(a\mathbb{Z}_c)$. От друга страна, ясно е, че $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_b) = b\mathbb{Z}$ и $c\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$. Следователно $a\mathbb{Z}_c$ и $\mathbb{Z}_b$ са модули над фактор-пръстена $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_c$. Да разгледаме изображението

$$f : a\mathbb{Z}_c = a\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_b = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z},$$

$$f(ax + c\mathbb{Z}) := x + b\mathbb{Z}.$$

За проверка на коректността на f да изберем $ax + c\mathbb{Z} = ax' + c\mathbb{Z}$. По предположение, ab дели c, т.е. $c = abc_o$ за някое естествено $c_o \in \mathbb{N}$. Следователно $ax' - ax = a(x' - x) \in c\mathbb{Z} = abc_o\mathbb{Z}$ води до $x' - x \in bc_o\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z}$ и $x' + b\mathbb{Z} = x + b\mathbb{Z}$. Изображението f е хомоморфизъм на $\mathbb{Z}_c$-модули, защото

$$f((ax + c\mathbb{Z}) + (ay + c\mathbb{Z})) = f((ax + ay) + c\mathbb{Z}) = f(a(x + y) + c\mathbb{Z}) =$$
$$(x + y) + b\mathbb{Z} = (x + b\mathbb{Z}) + (y + b\mathbb{Z}) = f(ax + c\mathbb{Z}) + f(ay + c\mathbb{Z})$$

и

$$f((z + c\mathbb{Z})(ax + c\mathbb{Z})) = f(zax + c\mathbb{Z}) = zx + b\mathbb{Z} =$$
$$z(x + b\mathbb{Z}) = (z + c\mathbb{Z})(x + b\mathbb{Z}) = (z + c\mathbb{Z})f(ax + c\mathbb{Z}).$$

В резултат, по теоремата за хомоморфизмите получаваме изоморфизъм на $\mathbb{Z}_c$-модули

$$a\mathbb{Z}_c/Ker(f) \simeq Im(f).$$

От една страна, $Im(f) = \mathbb{Z}_b$, защото за всяко $x \in \mathbb{Z}$ е в сила $x + b\mathbb{Z} = f(ax + c\mathbb{Z})$. От друга страна, ядрото $Ker(f) = \{ax + c\mathbb{Z} \in a\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \,|\, f(ax + c\mathbb{Z}) = x + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}\} = \{ax + c\mathbb{Z} \in a\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} \,|\, x \in b\mathbb{Z}\} = \{abx_o + c\mathbb{Z} \in a\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}\} = ab\mathbb{Z}/c\mathbb{Z} = ab\mathbb{Z}_c$. Следователно

$$a\mathbb{Z}_c/ab\mathbb{Z}_c \simeq \mathbb{Z}_b, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Задача 2.5. *Нека $\mathbb{Z}_8$ е пръстенът от остатъци при деление с 8. Разглеждаме $\mathbb{Z}_8$-модулите $C_n := \mathbb{Z}_8$ за $n \geq 0$, $C_n := \{0_{\mathbb{Z}_8}\}$ за $n < 0$ с изображенията*

$$d_n(x(\mathrm{mod}\, 8)) := 4x(\mathrm{mod}\, 8) \qquad \text{за } n > 0, \forall x(\mathrm{mod}\, 8) \in C_n$$

и $d_n(x(\mathrm{mod}\, 8)) := 0(\mathrm{mod}\, 8)$ за $n \leq 0$, $\forall x(\mathrm{mod}\, 8) \in C_n$. Да се докаже, че фамилията $\{(C_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от $\mathbb{Z}_8$-модули и да се намерят хомологиите на този верижен комплекс.

Решение: Първо трябва да проверим, че d_n са хомоморфизми на $\mathbb{Z}_8$-модули. За $n \leq 0$ тъждествено нулевите изображения $d_n : C_n \to C_{n-1}$ са хомоморфизми на $\mathbb{Z}_8$-модули, защото за $\forall x(\mathrm{mod}\, 8), y(\mathrm{mod}\, 8) \in C_n$ е в сила

$$d_n(x(\mathrm{mod}\, 8) + y(\mathrm{mod}\, 8)) = d_n((x + y)(\mathrm{mod}\, 8)) = 0(\mathrm{mod}\, 8) =$$
$$0(\mathrm{mod}\, 8) + 0(\mathrm{mod}\, 8) = d_n(x(\mathrm{mod}\, 8)) + d_n(y(\mathrm{mod}\, 8))$$

и

$$d_n([x(\mathrm{mod}\, 8)][y(\mathrm{mod}\, 8)]) = d_n(xy(\mathrm{mod}\, 8)) = 0(\mathrm{mod}\, 8) =$$
$$[x(\mathrm{mod}\, 8)][0(\mathrm{mod}\, 8)] = x(\mathrm{mod}\, 8)d_n(y(\mathrm{mod}\, 8)).$$

За $n > 0$ проверяваме, че

$$d_n(x(\mathrm{mod}\, 8) + y(\mathrm{mod}\, 8)) = d_n((x + y)(\mathrm{mod}\, 8)) = 4(x + y)(\mathrm{mod}\, 8) =$$
$$(4x + 4y)(\mathrm{mod}\, 8) = 4x(\mathrm{mod}\, 8) + 4y(\mathrm{mod}\, 8) = d_n(x(\mathrm{mod}\, 8)) + d_n(y(\mathrm{mod}\, 8))$$

и

$$d_n([x(\mathrm{mod}\, 8)]\,[y(\mathrm{mod}\, 8)]) = d_n(xy(\mathrm{mod}\, 8)) = 4xy(\mathrm{mod}\, 8) =$$
$$[x(\mathrm{mod}\, 8)][4y(\mathrm{mod}\, 8)] = [x(\mathrm{mod}\, 8)]d_n(y(\mathrm{mod}\, 8))$$

за всички $x(\mathrm{mod}\, 8), y(\mathrm{mod}\, 8) \in \mathbb{Z}_8$. Следователно всички d_n са хомоморфизми на $\mathbb{Z}_8$-модули.

Твърдим, че композициите $d_n d_{n+1} \equiv 0$ се анулират тъждествено за всички $n \in \mathbb{Z}$. Това е ясно при $n \leq 0$, защото тогава $d_n \equiv 0$. За $n > 0$ пресмятаме непосредствено, че

$$d_n d_{n+1}(x(\mathrm{mod}\, 8)) = d_n(4x(\mathrm{mod}\, 8)) = 16x(\mathrm{mod}\, 8) = 0(\mathrm{mod}\, 8)$$

за всички $x(\mathrm{mod}\, 8) \in C_n = \mathbb{Z}_8$. Следователно $\{(C_n, d_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ е верижен комплекс от $\mathbb{Z}_8$-модули.

Ако $n < 0$, то $d_n \equiv 0$ определя $Z_n(C_\bullet) = C_n = \{0_{\mathbb{Z}_8}\}$. Още повече, $n+1 \leq 0$, така че $d_{n+1} \equiv 0$ и $B_n(C_\bullet) = \{0_{\mathbb{Z}_8}\}$. Следователно $H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet) = \{0_{\mathbb{Z}_8}\}$ за всички $n < 0$.
Аналогично, $Z_0(C_\bullet) = C_0 = \mathbb{Z}_8$, съгласно $d_0 \equiv 0$. От $B_0(C_\bullet) = Im(d_1) = 4\mathbb{Z}_8$ следва, че хомологиите от степен нула са $H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}_8/4\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_4$.
Накрая, за $n > 0$ циклите $Z_n(C_\bullet) = Ker(d_n)$ се състоят от $x (\bmod 8) \in \mathbb{Z}_8 = C_n$ със свойството $d_n(x(\bmod 8)) = 4x(\bmod 8) = 0(\bmod 8)$. Следователно $Z_n(C_\bullet) = 2\mathbb{Z}_8$. Границите $B_n(C_\bullet) = Im(d_{n+1}) = 4\mathbb{Z}_8$, така че хомологиите $H_n(C_\bullet) = 2\mathbb{Z}_8/4\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_2$ за всички $n > 0$.

Определение 2.6. *За произволен верижен комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от леви (десни) R-модули, циклите $\zeta_1, \zeta_2 \in Z_n(C_\bullet)$ се наричат хомологични, ако се различават с граница $\zeta_1 - \zeta_2 \in B_n(C_\bullet)$.*

Ясно е, че два цикъла $\zeta_1, \zeta_2 \in Z_n(C_\bullet)$ са хомологични точно когато представят един и същи хомологичен клас $\zeta_1 + B_n(C_\bullet) = \zeta_2 + B_n(C_\bullet) \in H_n(C_\bullet)$.

Определение 2.7. *Верижният комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от леви (десни) R-модули е точен в C_n, ако n-тите цикли и граници съвпадат, $Z_n(C_\bullet) = B_n(C_\bullet)$. Ако верижният комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е точен във всеки свой член C_n то $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ се нарича точна редица.*

Да отбележим, че верижният комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е точен в C_n тогава и само тогава, когато n-тите хомологии $H_n(C_\bullet) = 0$ се анулират. Затова хомологиите $\{H_n(C_\bullet)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на верижен комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ се разглеждат като мярка за отклонението на $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от точност.
Примери: 1. Ако $C_n = 0$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$, то $B_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet) = 0$, така че $H_n(C_\bullet) = 0$ и този верижен комплекс е точна редица.
2. Ако всички диференциали $d_n = 0$ на верижен комплекс се анулират тъждествено, то $Z_n(C_\bullet) = C_n$ и $B_n(C_\bullet) = \{0_{C_n}\}$, откъдето $H_n(C_\bullet) = C_n$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$. С други думи, хомологиите възпроизвеждат верижния комплекс.

Твърдение 2.8. *Произволен верижен комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ определя точни редици:*

$$(i) \quad 0 \longrightarrow B_n(C_\bullet) \xrightarrow{i_n} Z_n(C_\bullet) \xrightarrow{\pi_n} H_n(C_\bullet) \longrightarrow 0 \ ;$$

$$(ii) \quad 0 \longrightarrow Z_n(C_\bullet) \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1}(C_\bullet) \longrightarrow 0 \ ;$$

$$(iii) \quad 0 \to H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\overline{i_n}} C_n/B_n(C_\bullet) \xrightarrow{\overline{d_n}} B_{n-1}(C_\bullet) \to 0 \ ;$$

$$(iv) \quad 0 \to H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\overline{i_n}} C_n/B_n(C_\bullet) \xrightarrow{\overline{d_n}} Z_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{\pi_{n-1}} H_{n-1}(C_\bullet) \to 0 \ ,$$

където i_n са тъждествените мономорфизми на подмодулите на C_n, $\overline{i_n}$ са тъждествените мономорфизми на подмодулите на $C_n/B_n(C_\bullet)$,

$$\pi_n : Z_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet)$$

са естествените епиморфизми с ядро $B_n(C_\bullet)$, а

$$\overline{d_n} : C_n/B_n(C_\bullet) \to B_{n-1}(C_\bullet)$$

са единствените пропусквания на диференциалите d_n по модул границите $B_n(C_\bullet) \subseteq Ker(d_n) = Z_n(C_\bullet)$ (виж Твърдение 18 от Въпрос 1).

Доказателство: Да отбележим, че произволна редица

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu} N \qquad \cdots$$

от леви (десни) R-модули и техни хомоморфизми е точна в M тогава и само тогава, когато μ е мономорфизъм. Аналогично, редицата

$$\cdots \qquad M \xrightarrow{\nu} N \longrightarrow 0$$

е точна в N точно когато ν е епиморфизъм.
Редиците (i) са точни за всяко $n \in \mathbb{Z}$ доколкото i_n са мономорфизми, $Im(i_n) = B_n(C_\bullet) = Ker(\pi_n)$ и π_n са епиморфизми.
Точността на редиците (ii) се основава на това, че i_n са мономорфизми, $Im(i_n) = Z_n(C_\bullet) = Ker(d_n)$ и $d_n : C_n \to Im(d_n) = B_{n-1}(C_\bullet)$ са епиморфизми.
Аналогично, в (iii) участват мономорфизмите $\overline{i_n}$, епиморфизмите $\overline{d_n}$ и образът $Im(\overline{i_n}) = H_n(C_\bullet) = Ker(\overline{d_n})$ (виж Твърдение 18 от Въпрос 1).
Първите три изображения в (iv) не се различават от тези в (iii), така че точността на (iv) в първите два члена е автоматична. По-нататък, $Im(\overline{d_n}) = B_{n-1}(C_\bullet) = Ker(\pi_{n-1})$ и епиморфността на π_{n-1} завършват доказателството, Q.E.D.

2. Морфизми на верижни комплекси и индуцирани хомоморфизми на хомологиите.

Определение 2.9. *Нека $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са верижни комплекси от леви (десни) R-модули. Фамилията $f_n : C_n \to D_n$, $n \in \mathbb{Z}$ от хомоморфизми на R-модули е морфизъм на $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, ако $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ комутират с диференциалите, т.е.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd},$$

$$f_{n-1} d_n = \delta_n f_n \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Лема 2.10. *Всеки морфизъм*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

на верижни комплекси от R-модули индуцира хомоморфизми

$$f_n : Z_n(C_\bullet) \longrightarrow Z_n(D_\bullet)$$

на циклите,

$$f_n : B_n(C_\bullet) \longrightarrow B_n(D_\bullet)$$

на границите, а оттам и

$$H(f_n) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$$

на хомологиите.

Доказателство: Всяко $z \in Z_n(C_\bullet)$ се трансформира в $f_n(z) \in Z_n(D_\bullet)$, доколкото $\delta_n f_n(z) = f_{n-1} d_n(z) = f_{n-1}(0_{C_{n-1}}) = 0_{D_{n-1}}$. Аналогично, $f_n d_{n+1}(c_{n+1}) \in B_n(D_\bullet)$, защото $f_n d_{n+1}(c_{n+1}) = \delta_{n+1} f_{n+1}(c_{n+1})$. Композицията

$$\pi_n^D f_n : Z_n(C_\bullet) \longrightarrow Z_n(D_\bullet)/B_n(D_\bullet) = H_n(D_\bullet)$$

има ядро $Ker\left(\pi_n^D f_n\right) = \{z \in Z_n(C_\bullet) \,|\, f_n(z) \in B_n(D_\bullet)\} = (f_n)^{-1}(B_n(D_\bullet))$, съдържащо $B_n(C_\bullet)$. Следователно, по Твърдение 1.18 съществува единствено пропускване $H(f_n) : Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet) = H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$, така че

$$\begin{tikzcd} Z_n(C_\bullet) \arrow[d, "\pi_n^C"'] \arrow[dr, "\pi_n^D f_n"] & \\ H_n(C_\bullet) \arrow[r, "H(f_n)"] & H_n(D_\bullet) \end{tikzcd},$$

$H(f_n)\pi_n^C = \pi_n^D f_n$. Пропускването на $f_n|_{Z_n(C_\bullet)}$ до $H_n(C_\bullet)$ ще бележим с $H(f_n)$. В явен вид,

$$H(f_n)(z_n + B_n(C_\bullet)) = H(f_n)\pi_n^C(z_n) = \pi_n^D f_n(z_n) = f_n(z_n) + B_n(D_\bullet)$$

за $\forall z_n \in Z_n(C_\bullet)$, Q.E.D.

Определение 2.11. *Изоморфизъм*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

на верижни комплекси от леви R-модули е морфизъм на тези верижни комплекси с взаимно-еднозначни $f_n : C_n \to D_n$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Определение 2.12. *Морфизмът на верижни комплекси*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

се нарича квази-изоморфизъм, ако f_n индуцират R-модулни изоморфизми

$$H(f_n) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$$

за всички $n \in \mathbb{Z}$.

Лема 2.13. *Нека*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

е изоморфизъм на верижни комплекси от R-модули. Тогава *(i) $f^{-1} = (f_n^{-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ е изоморфизъм на верижни комплекси от R-модули*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}^{-1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "f_n^{-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}^{-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd} ;$$

(ii) $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е квази-изоморфизъм на верижни комплекси.

Доказателство: (i) Взаимната еднозначност на изображенията $f_n : C_n \to D_n$ гарантира коректността и взаимната еднозначност на $f_n^{-1} : D_n \to C_n$. Осатва да докажем, че фамилията $f^{-1} := \left(f_n^{-1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ образува морфизъм на верижни комплекси $f^{-1} : D_\bullet \to C_\bullet$ от R-модули. За произволни $y_1, y_2 \in D_n$ и $r \in R$ са в сила равенствата $y_1 + y_2 = f_n\left(f_n^{-1}(y_1) + f_n^{-1}(y_2)\right)$ и $ry_1 = f_n(rf_n^{-1}(y_1))$, защото $f_n : C_n \to D_n$ са хомоморфизми на R-модули. Прилагайки f_n^{-1} към двете страни получаваме, че $f_n^{-1}(y_1 + y_2) = f_n^{-1}(y_1) + f_n^{-1}(y_2)$ и $f_n^{-1}(ry_1) = rf_n^{-1}(y_1)$, с което проверяваме, че $f_n^{-1} : D_n \to C_n$ са хомоморфизми на R-модули. По предположение, морфизмът $f : C_\bullet \to D_\bullet$ на верижни комплекси комутира с диференциалите, т.е. $f_{n-1}d_n = \delta_n f_n$ за $n \in \mathbb{Z}$. Умножавайки тези равенства отляво с f_{n-1}^{-1} и отдясно с f_n^{-1}, получаваме условието за комутиране

$$d_n f_n^{-1} = (f_{n-1}^{-1} f_{n-1})(d_n f_n^{-1}) = f_{n-1}^{-1}(f_{n-1}d_n)f_n^{-1} =$$

$$f_{n-1}^{-1}(\delta_n f_n)f_n^{-1} = (f_{n-1}^{-1}\delta_n)(f_n f_n^{-1}) = f_{n-1}^{-1}\delta_n$$

на f^{-1} с посочените диференциали. Следователно $f^{-1} = (f_n^{-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм, а оттам и изоморфизъм на верижни комплекси от R-модули.
(ii) Съгласно Лема 2.10, индуцираните хомоморфизми върху хомологиите са

$$H(f_n)(x_n + B_n(C_\bullet)) = f_n(x_n) + B_n(D_\bullet) \quad \text{и}$$

$$H\left(f_n^{-1}\right)(y_n + B_n(D_\bullet)) = f_n^{-1}(y_n) + B_n(C_\bullet)$$

за произволни $x_n \in Z_n(C_\bullet)$, $y_n \in Z_n(D_\bullet)$. Следователно $H\left(f_n^{-1}\right)H(f_n) = \mathrm{Id}_{H_n(C_\bullet)}$ и $H(f_n)H\left(f_n^{-1}\right) = \mathrm{Id}_{H_n(D_\bullet)}$, така че $H(f_n) : H_n(C_\bullet) \to H_n(D_\bullet)$ са изоморфизми на R-модули, Q.E.D.

Лема-Определение 2.14. *Ако*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & D_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "g_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\varepsilon_{n+2}"] & E_{n+1} \arrow[r, "\varepsilon_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "\varepsilon_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "\varepsilon_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

са морфизми на верижни комплекси от R-модули, то

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_nf_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\varepsilon_{n+2}"] & E_{n+1} \arrow[r, "\varepsilon_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "\varepsilon_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "\varepsilon_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

е морфизъм на верижни комплекси от R-модули, наречен произведение или композиция на f и g.

Доказателство: От Лема 11 на Въпрос 1 знаем, че g_nf_n са хомоморфизми на R-модули. Вземайки предвид $f_{n-1}d_n = \delta_nf_n$ и $g_{n-1}\delta_n = \varepsilon_ng_n$, проверявяме, че

$$(g_{n-1}f_{n-1})d_n = g_{n-1}(f_{n-1}d_n) = g_{n-1}(\delta_nf_n) =$$
$$(g_{n-1}\delta_n)f_n = (\varepsilon_ng_n)f_n = \varepsilon(g_nf_n),$$

съгласно асоциативността на композицията от изображения. Това установява, че $gf = (g_nf_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е морфизъм на верижни комплекси от R-модули, Q.E.D.

Задача 2.15. *Нека $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са две фамилии от абелеви групи със $C_n = \mathbb{Z}_{36}$, $D_n = \mathbb{Z}_{12}$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$ и изображения*

$$d_n(x + 36\mathbb{Z}) := 6x + 36\mathbb{Z},$$

$$\delta_n(y + 12\mathbb{Z}) := 6y + 12\mathbb{Z}.$$

а) Да се докаже, че $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са верижни комплекси от абелеви групи.
б) Да се провери, че изображенията

$$f_n : C_n \longrightarrow D_n,$$

$$f_n(x + 36\mathbb{Z}) := x + 12\mathbb{Z}$$

задават морфизъм на верижни комплекси от абелеви групи.
в) Да се намерят циклите, границите и хомологиите на $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
г) Да се намерят ядрата, образите и ко-ядрата на $f_n|_{Z_n(C_\bullet)}$ и $f_n|_{B_n(C_\bullet)}$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$.
д) Има ли точна редица измежду комплексите $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$?
е) Да се определи дали $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е изоморфизъм на верижни комплекси от абелеви групи и (или) квази-изоморфизъм.

Решение: а) За да докажем, че d_n и δ_n са хомоморфизми на абелеви групи, да отбележим, че умножението $\mu_k^{\mathbb{Z}}$ с естествено число k е коректно зададен хомоморфизъм $\mu_k^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ на абелеви групи. Да разгледаме композицията $\pi_m\mu_k^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ с естествения епиморфизъм $\pi_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$, $\pi_m(z) = z + m\mathbb{Z}$ с ядро $m\mathbb{Z}$. Непосредствено проверяваме, че $m\mathbb{Z} \subseteq Ker\left(\pi_m\mu_k^{\mathbb{Z}}\right)$, доколкото $\pi_m\mu_k^{\mathbb{Z}}(mz) = \pi_m(kmz) = kmz + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ за всяко $z \in \mathbb{Z}$. Следователно съществува единствен хомоморфизъм на абелеви групи $\mu_k^{\mathbb{Z}_m} : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$, така че

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\mu_k^{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\pi_m"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\pi_m"'] \\
\mathbb{Z}_m \arrow[r, "\mu_k^{\mathbb{Z}_m}"] & \mathbb{Z}_m
\end{tikzcd} ,$$

$\pi_m \mu_k^{\mathbb{Z}} = \mu_k^{\mathbb{Z}_m} \pi_m$. В частност, $d_n := \mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}$ и $\delta_n := \mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}$ са хомоморфизми на абелеви групи. Освен това, ако $k^2 \equiv 0(\operatorname{mod} m)$, то $\left(\mu_k^{\mathbb{Z}_m}\right)^2 (x + m\mathbb{Z}) = k^2 x + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ или $\left(\mu_k^{\mathbb{Z}_m}\right)^2 \equiv 0$ за $k^2 \equiv 0(\operatorname{mod} m)$. По този начин, $d_n d_{n+1} = \left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}\right)^2 \equiv 0$ съгласно $6^2 \equiv 0(\operatorname{mod} 36)$ и $\delta_n \delta_{n+1} \equiv \left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}\right)^2 \equiv 0$, благодарение на $6^2 \equiv 0(\operatorname{mod} 12)$. Следователно $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ са верижни комплекси от абелеви групи.
б) За произволни естествени числа k и l разглуждаме естествения епиморфизъм на абелеви групи $\pi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ с ядро $(k\mathbb{Z}, +)$ и подмодула $kl\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z} = Ker(\pi_k)$. Съгласно Твърдение 1.18 съществува единствен хомоморфизъм на абелеви групи $\pi_{k,kl} : \mathbb{Z}_{kl} \to \mathbb{Z}_k$, затварящ комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[d, "\pi_{kl}"'] \arrow[dr, "\pi_k"] & \\
\mathbb{Z}_{kl} \arrow[r, "\pi_{k,kl}"] & \mathbb{Z}_k
\end{tikzcd},$$

$\pi_{k,kl}\pi_{kl} = \pi_k$. В явен вид,

$$\pi_{k,kl}(z + kl\mathbb{Z}) = \pi_{k,kl}\pi_{kl}(z) = \pi_k(z) = z + k\mathbb{Z}$$

за всяко $z + kl\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{kl}$. В частност, $f_n := \pi_{12,36}$ са хомоморфизми на абелеви групи за всички цели n. Остава да проверим комутативността на диаграмите

$$\begin{tikzcd}
C_n = \mathbb{Z}_{36} \arrow[r, "d_n = \mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}"] \arrow[d, "f_n = \pi_{12,36}"'] & C_{n-1} = \mathbb{Z}_{36} \arrow[d, "f_{n-1} = \pi_{12,36}"'] \\
D_n = \mathbb{Z}_{12} \arrow[r, "\delta_n = \mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}"] & D_{n-1} = \mathbb{Z}_{12}
\end{tikzcd}.$$

Наистина, за $\forall x + 36\mathbb{Z}$ имаме

$$f_{n-1}d_n(x + 36\mathbb{Z}) = \pi_{12,36}\mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}(x + 36\mathbb{Z}) = \pi_{12,36}(6x + 36\mathbb{Z}) = 6x + 12\mathbb{Z} =$$
$$\mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}(x + 12\mathbb{Z}) = \mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}\pi_{12,36}(x + 36\mathbb{Z}) = \delta_n f_n(x + 36\mathbb{Z}),$$

така че $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ комутират с диференциалите на разглежданите верижни комплекси и $f : C_\bullet \to D_\bullet$ е морфизъм на верижни комплекси.
в) За да пресметнем циклите, границите и хомологиите на $C_\bullet$ и $D_\bullet$ ще използваме, че за произволни естествени числа a и b е в сила изоморфизъм на абелеви групи

$$a\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_b.$$

За целта, да разгледаме изображението

$$\Delta_a : a\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_b,$$
$$\Delta_a(az) := z + b\mathbb{Z} \quad \text{ за } \forall z \in \mathbb{Z}.$$

То е коректно зададено, доколкото от $az_1 = az_2$ следва $z_1 = z_2$ в областта $\mathbb{Z}$. При това, Δ_a е хомоморфизъм на абелеви групи, защото

$$\Delta_a(az + at) = \Delta_a(a(z + t)) = (z + t) + b\mathbb{Z} = (z + b\mathbb{Z}) + (t + b\mathbb{Z}) = \Delta_a(az) + \Delta_a(at)$$

за произволни $z, t \in \mathbb{Z}$. Ядрото $Ker(\Delta_a) := \{az \in a\mathbb{Z} \mid \Delta_a(az) = z + b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}\} = \{az \in a\mathbb{Z} \mid z \in b\mathbb{Z}\} = ab\mathbb{Z}$ и образът $Im(\Delta_a) = \mathbb{Z}_b$, доколкото $z + b\mathbb{Z} = \Delta_a(az)$ за $\forall z \in \mathbb{Z}$. По теоремата за хомоморфизмите,

$$a\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}/Ker(\Delta_a) \simeq Im(\Delta_a) = \mathbb{Z}_b.$$

Конкретно, циклите на $C_\bullet$ са

$$Z_n(C_\bullet) := Ker(d_n) = Ker\left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}\right) := \{z + 36\mathbb{Z} \,|\, 6x \in 36\mathbb{Z}\} = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6,$$

границите на $C_\bullet$ са

$$B_n(C_\bullet) := Im(d_{n+1}) = Im\left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{36}}\right) = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6,$$

така че хомологиите

$$H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet) = 0.$$

Аналогично, циклите на $D_\bullet$ са

$$Z_n(D_\bullet) := Ker(\delta_n) = Ker\left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}\right) := \{x + 12\mathbb{Z} \,|\, 6x \in 12\mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6,$$

границите на $D_\bullet$ са

$$B_n(D_\bullet) := Im(\delta_{n+1}) = Im\left(\mu_6^{\mathbb{Z}_{12}}\right) = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2,$$

откъдето хомологиите

$$H_n(D_\bullet) := Z_n(D_\bullet)/B_n(D_\bullet) = (2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \simeq 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3,$$

съгласно Ньотеровите изоморфизми и направената забележка $a\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_b$.
г) Ограниченията

$$f_n : Z_n(C_\bullet) = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \longrightarrow Z_n(D_\bullet) = 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},$$
$$f_n(6z + 36\mathbb{Z}) = 6z + 12\mathbb{Z},$$

имат ядра

$$Ker\left(f_n|_{Z_n(C_\bullet)}\right) = \{6z + 36\mathbb{Z} \,|\, 6z \in 12\mathbb{Z}\} = 12\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3,$$

образи

$$Im(f_n|_{Z_n(C_\bullet)}) = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$$

и ко-ядра

$$Coker(f_n|_{Z_n(C_\bullet)}) := Z_n(D_\bullet)/Im(f_n|_{Z_n(C_\bullet)}) = (2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \simeq 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3.$$

Аналогично,

$$f_n : B_n(C_\bullet) = 6\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \longrightarrow B_n(D_\bullet) = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},$$
$$f_n(6z + 36\mathbb{Z}) = 6z + 12\mathbb{Z}$$

имат ядра

$$Ker(f_n|_{B_n(C_\bullet)}) = \{6z + 36\mathbb{Z} \,|\, 6z \in 12\mathbb{Z}\} = 12\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3,$$

образи

$$Im(f_n|_{B_n(C_\bullet)}) = 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$$

и ко-ядра

$$Coker(f_n|_{B_n(C_\bullet)}) := B_n(D_\bullet)/Im(f_n|_{B_n(C_\bullet)}) = (6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) = 0.$$

д) Верижният комплекс $\{(C_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е точна редица, доколкото хомологиите $H_n(C_\bullet) = 0$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$. Верижният комплекс $\{(D_n, \delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не е точна редица, защото $H_n(D_\bullet) \simeq \mathbb{Z}_3$ за всички цели n.
е) Индуцираните хомоморфизми на абелеви групи

$$H(f_n) : H_n(C_\bullet) = 0 \longrightarrow H_n(D_\bullet) \simeq \mathbb{Z}_3$$

са тъждествено нулевите изображения, така че $f : C_\bullet \to D_\bullet$ не е квази-изоморфизъм. Следователно f не е и изоморфизъм на верижни комплекси, Q.E.D.