Въпрос 13: Кохомологии с коефициенти в сноп. Теорема на де Рам

1. Определение и основни свойства на кохомологиите с коефициенти в сноп

Навсякъде в този параграф ще разглеждаме само снопове от модули $\mathfrak{S} \to X$ над паракомпактни топологични пространства X. Индуктивно по $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ въвеждаме сноповете $\mathfrak{Q}^n$ и $\mathfrak{S}^n$. Именнно, започваме с $\mathfrak{Q}^0 := \mathfrak{S}$ и за всяко цяло $n \geq 0$ определяме $\mathfrak{S}^n$ като снопа, асоциран с предснопа $\{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$ на прекъснатите сечения на $\mathfrak{Q}^n$. Да отбележим, че предснопът $\{\Gamma(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$ на непрекъснатите сечения на $\mathfrak{Q}^n$ е под-предсноп на $\{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$. Доколкото снопът, асоциран с $\{\Gamma(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$ е изоморфен на $\mathfrak{Q}^n$ и се влага в $\mathfrak{S}^n$, можем да считаме $\mathfrak{Q}^n$ за подсноп на $\mathfrak{S}^n$. Това дава възможност да положим $\mathfrak{Q}^n := \mathfrak{S}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Сега за всяко естествено число n съществува хомоморфизъм на снопове $f^{n-1} : \mathfrak{S}^{n-1} \to \mathfrak{S}^n$, който се разлага в произведение $f^{n-1} := f^{n-1}_{\text{mono}} f^{n-1}_{\text{epi}}$ на естествения епиморфизъм $f^{n-1}_{\text{epi}} : \mathfrak{S}^{n-1} \to \mathfrak{Q}^n = \mathfrak{S}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}$ и мономорфизма $f^{n-1}_{\text{mono}} : \mathfrak{Q}^n \to \mathfrak{S}^n$. Непосредствено се вижда, че ядрото $Ker\left(f^{n-1}\right) = Ker\left(f^{n-1}_{\text{epi}}\right) = \mathfrak{Q}^{n-1}$ и образът $Im\left(f^{n-1}\right) = Im\left(f^{n-1}_{\text{epi}}\right) = \mathfrak{Q}^n$. Това установява точността на редицата от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \xrightarrow{f^0} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{S}^n \xrightarrow{f^n} \mathfrak{S}^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots \tag{13.1}$$

във всички $\mathfrak{S}^n$ с $n \in \mathbb{N}$. Вече споменахме, че $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}^0$ е подсноп на $\mathfrak{S}^0$ и съвпада с $Ker(f^0)$, така че редицата (13.1) е точна също в $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^0$. Твърдим, че така построените снопове $\mathfrak{S}^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ от резолвентата (13.1) са меки. За целта да отбележим, че предсноповете $\{\Gamma_0(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$ на прекъснатите сечения на $\mathfrak{Q}^n$ са пълни. По-точно, за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ с отворено покритие $U = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, сеченията $\sigma, \tau \in \Gamma_0(\mathfrak{Q}^n, U)$ с едни и същи ограничения $\rho_{U_\alpha, U}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma) = \rho_{U_\alpha, U}^{\mathfrak{Q}^n}(\tau)$ непременно съвпадат, $\sigma = \tau$. Причина за това е, че всяка точка $p \in U$ принадлежи на някое U_α, така че $\sigma(p) = \rho_{U_\alpha, U}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma)(p) = \rho_{U_\alpha, U}^{\mathfrak{Q}^n}(\tau)(p) = \tau(p)$. Ако $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е фамилия от прекъснати сечения $\sigma_\alpha \in \Gamma_0(\mathfrak{Q}^n, U_\alpha)$, изпълняващи условието за съгласуваност $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma_\alpha) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma_\beta)$ за $\forall \alpha, \beta \in A$, то можем да определим прекъснато сечение $\sigma : U \to \mathfrak{Q}^n$, полагайки $\sigma(p) := \sigma_\alpha(p)$ за някое $\alpha \in A$ с $U_\alpha \ni p$. Тогава за всяко друго $\beta \in A$ с $U_\beta \ni p$ имаме $\sigma_\beta(p) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma_\beta)(p) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha}^{\mathfrak{Q}^n}(\sigma_\alpha)(p) = \sigma_\alpha(p)$. Пълнотата на предснопа $\{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n}\}$ гарантира неговата изоморфност с предснопа $\{\Gamma(\mathfrak{S}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{S}^n}\}$ на непрекъснатите сечения на $\mathfrak{S}^n$. Сега за всяко затворено подмножество $S \subseteq X$ и всеки елемент $\zeta_S \in \Gamma(\mathfrak{S}^n, S) \simeq \Gamma_o(\mathfrak{Q}^n, S)$ съществува $\zeta \in \Gamma_o(\mathfrak{Q}^n, X) \simeq \Gamma(\mathfrak{S}^n, X)$, определено по правилото

$$\zeta(p) := \begin{cases} \zeta_S(p) & \text{за} \quad p \in S, \\ 0_{\mathfrak{S}^n_p} & \text{за} \quad p \in X \setminus S, \end{cases}$$

така че $a_X^S(\zeta) = \zeta_S$, където $a_X^S : \Gamma(\mathfrak{S}^n, X) \to \Gamma(\mathfrak{S}^n, S) = \lim_{S\subseteq U} \Gamma(\mathfrak{S}^n, S)$ е хомоморфизъм на директната граница. С това се убедихме, че сноповете $\mathfrak{S}^n$ са меки за всички $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 13.1. *Резолвентата (13.1) на $\mathfrak{S}$ се нарича канонична мека резолвента на този сноп. Тя индуцира ко-верижния комплекс от глобални непрекъснати сечения*

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^0, X) \xrightarrow{f_X^0} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{f_X^{n-2}} \Gamma(\mathfrak{S}^{n-1}, X) \xrightarrow{f_X^{n-1}} \Gamma(\mathfrak{S}^n, X) \xrightarrow{f_X^n} \cdots, \tag{13.2}$$

който е точен в $\Gamma(\mathfrak{S}, X)$ и $\Gamma(\mathfrak{S}^0, X)$ съгласно Лема 10.4. Кохомологиите на X с коефициенти в снопа $\mathfrak{S}$ се определят като

$$H^0(X, \mathfrak{S}) := Ker\left(f_X^0\right) = \Gamma(\mathfrak{S}, X) \quad \text{и}$$

$$H^n(X, \mathfrak{S}) := Ker\left(f_X^n\right)/Im\left(f_X^{n-1}\right) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да отбележим, че ако снопът $\mathfrak{S}$ е мек, то цялата редица (13.2) е точна, както доказахме в Следствие 10.20. Следователно $H^n(X, \mathfrak{S}) = 0$ за всички $n \in \mathbb{N}$. В частност, $H^n(X, \mathfrak{S}^k) = 0$ за $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение 13.2. *Резолвентата*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{T}^0 \xrightarrow{f^0} \cdots \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{T}^n \xrightarrow{f^n} \mathfrak{T}^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots$$

на снопа $\mathfrak{S}$ се нарича ациклична, ако

$$H^n(X, \mathfrak{T}^k) = 0 \quad \text{за } \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

И така, каноничната мека резолвента (13.1) на сноп от модули $\mathfrak{S}$ над паракомпактно топологично пространство X е ациклична резолвента на $\mathfrak{S}$.

Твърдение 13.3. *(i) Произволен хомоморфизъм $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ на снопове от модули над паракомпактно топологично пространство X индуцира хомоморфизми на кохомологиите*

$$H^n(\varphi) : H^n(X, \mathfrak{S}) \longrightarrow H^n(X, \mathfrak{T}), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

на X с коефициенти в тези снопове. В частност,

$$H^0(\varphi) = \varphi_X : \Gamma(\mathfrak{S}, X) \to \Gamma(\mathfrak{T}, X).$$

(ii) Ако $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ и $\psi : \mathfrak{T} \to \mathfrak{V}$ са хомоморфизми на снопове от модули над паракомпактно топологично пространство X, то индуцираните хомоморфизми на кохомологиите на X с коефициенти в тези снопове изпълняват съотношенията

$$H^n(\psi\varphi) = H^n(\psi)H^n(\varphi) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(iii) Тъждественият хомоморфизъм $\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ на сноп от модули над паракомпактно топологично пространство X индуцира тъждествените хомоморфизми $H^n\left(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}\right) = \mathrm{Id}_{H^n(X,\mathfrak{S})}$ на кохомологиите $H^n(X, \mathfrak{S})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на X с коефициенти в $\mathfrak{S}$.

Доказателство: (i) Първо ще продължим хомоморфизма на снопове $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ до хомоморфизъм

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{S}^\bullet \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^\bullet} \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{T} & \longrightarrow & \mathfrak{T}^\bullet
\end{array}$$

на съответните канонични меки резолвенти $0 \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^\bullet$ и $0 \to \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}^\bullet$. Поточно, твърдим съществуването на хомоморфизми на снопове $\varphi^n : \mathfrak{S}^n \to \mathfrak{T}^n$ за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, образуващи комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{S}^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "\varphi^0"'] & \cdots \arrow[r, "f^{n-2}"] & \mathfrak{S}^{n-1} \arrow[r, "f^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & \mathfrak{S}^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \arrow[r] & \mathfrak{T}^0 \arrow[r, "g^0"] & \cdots \arrow[r, "g^{n-2}"] & \mathfrak{T}^{n-1} \arrow[r, "g^{n-1}"] & \mathfrak{T}^n \arrow[r, "g^n"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{13.3}$$

с точни редове. С индукция по $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ предполагаме съществуването на подходящи хомоморфизми на снопове $\mathfrak{Q}^n(\varphi) : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$ и ги продължаваме до търсените хомоморфизми на снопове $\varphi^n : \mathfrak{S}^n \to \mathfrak{T}^n$ и индуцираните от тях $\mathfrak{Q}^{n+1}(\varphi) : \mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{T})$. Съгласно Твърдение 8.13 (i), $\mathfrak{Q}^n(varphi)$ индуцира хомоморфизъм

$$\{\mathfrak{Q}^n(\varphi)_U\} : \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\} \longrightarrow \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})}\},$$

$$\mathfrak{Q}^n(\varphi)_U \left(\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right) := \mathfrak{Q}^n(\varphi)\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \quad \text{за } \forall \sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \in \Gamma_o(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U),$$

на съответните предснопове от прекъснати сечения, който се ограничава до хомоморфизъм

$$\{\mathfrak{Q}^n(\varphi)_U\} : \{\Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})}\}$$

на предсноповете от непрекъснати сечения. Прилагайки Твърдение 8.13 (ii) получаваме хомоморфизъм на снопове $\varphi^n : \mathfrak{S}^n \to \mathfrak{T}^n$, който се ограничава до хомоморфизъм на снопове $\varphi^n : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$ след отъждествяване на $\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})$, съответно, $\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$ със сноповете, асоцирани с $\{\Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\}$, съответно, $\{\Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})}\}$ (виж Твърдение 8.14.) При това отъждествяване хомоморфизмът $\varphi^n : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$ съвпада с $\mathfrak{Q}^n(\varphi) : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$, защото всеки елемент $a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\left(\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right)$ с $\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \in \Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U)$, $x \in U \subseteq X$, на снопа, асоциран с $\{\Gamma(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\}$, отговаря на $\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}(x) \in \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})_x$ и се трансформира в елемента

$$\varphi^n a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\left(\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right) = a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\left(\mathfrak{Q}^n(\varphi)_U \sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right) = a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\left(\mathfrak{Q}^n(\varphi)\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right),$$

който отговаря на $\mathfrak{Q}^n(\varphi)\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}(x)$. Сега определяме

$$\mathfrak{Q}^{n+1}(\varphi) : \mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^n/\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathfrak{T}^n/\mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{T})$$

по правилото

$$\mathfrak{Q}^{n+1}(\varphi)\left(\zeta^n + \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})\right) := \varphi^n(\zeta) + \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{T})$$

и се убеждаваме непосредствено, че $\mathfrak{Q}^{n+1}(\varphi)$ е коректно зададен хомоморфизъм на снопове. С това построихме хомоморфизма на меки резолвенти (13.3). Твърдим, че глобалните непрекъснати сечения на сноповете от гореспоменатата комутативна диаграма образуват морфизъм на ко-верижни комплекси

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{S}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_X"'] & \Gamma(\mathfrak{S}^0, X) \arrow[r, "f^0_X"] \arrow[d, "\varphi^0_X"'] & \Gamma(\mathfrak{S}^1, X) \arrow[r, "f^1_X"] \arrow[d, "\varphi^1_X"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{T}, X) \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{T}^0, X) \arrow[r, "g^0_X"] & \Gamma(\mathfrak{T}^1, X) \arrow[r, "g^1_X"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "f_X^{n-2}"] & \Gamma(\mathfrak{S}^{n-1}, X) \arrow[r, "f_X^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_X^{n-1}"'] & \Gamma(\mathfrak{S}^{n}, X) \arrow[r, "f_X^{n}"] \arrow[d, "\varphi_X^{n}"'] & \Gamma(\mathfrak{S}^{n+1}, X) \arrow[r, "f_X^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_X^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "g_X^{n-2}"] & \Gamma(\mathfrak{T}^{n-1}, X) \arrow[r, "g_X^{n-1}"] & \Gamma(\mathfrak{T}^{n}, X) \arrow[r, "g_X^{n}"] & \Gamma(\mathfrak{T}^{n+1}, X) \arrow[r, "g_X^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{13.4}$$

С други думи, трябва да установим, че (13.4) е комутативна диаграма, чиито редове образуват ко-верижни комплекси, които са точни в първите си два члена. Полагайки $\varphi_X^{(-1)} := \varphi_X$, $f_X^{(-1)} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^0$ и $g^{(-1)} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}^0$ да отбележим, че

$$\varphi_X^n f_X^{n-1} = \left(\varphi^n f^{n-1}\right)_X = \left(g^{n-1}\varphi^{n-1}\right)_X = g_X^{n-1}\varphi_X^{n-1} \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

съгласно комутативността на (13.3) и редуцирането на ψ_X до композиция с ψ за произволен хомоморфизъм на снопове ψ. Хомоморфизмите

$$H^n(\varphi) : H^n(\Gamma(\mathfrak{S}^\bullet, X)) = H^n(X, \mathfrak{S}) \longrightarrow H^n(X, \mathfrak{T}) = H^n(\Gamma(\mathfrak{T}^\bullet, X))$$

на кохомологиите, индуцирани от морфизма на ко-верижни комплекси (13.4) са търсените хомоморфизми на кохомологиите на X с коефициенти в $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$.
(ii) Съгласно (i) съществуват хомоморфизми на каноничните меки резолвенти

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{S}^\bullet \arrow[d, "\varphi^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \arrow[r] & \mathfrak{T}^\bullet
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{T}^\bullet \arrow[d, "\psi^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{V} \arrow[r] & \mathfrak{V}^\bullet
\end{tikzcd},$$

и

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d, "\psi\varphi"'] & \mathfrak{S}^\bullet \arrow[d, "(\psi\varphi)^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{V} \arrow[r] & \mathfrak{V}^\bullet
\end{tikzcd},$$

По определение е ясно, че композицията на хомоморфизми на канонични меки резолвенти е хомоморфизъм на канонични меки резолвенти, така че получаваме още един хомоморфизъм на канонични меки резолвенти

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d, "\psi\varphi"'] & \mathfrak{S}^\bullet \arrow[d, "\psi^\bullet\varphi^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{V} \arrow[r] & \mathfrak{V}^\bullet
\end{tikzcd},$$

продължаващ хомоморфизма на снопове $\psi\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{V}$. Твърдим, че $(\psi\varphi)^\bullet = \psi^\bullet\varphi^\bullet$. С индукция по $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ да отбележим, че ако $\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi\varphi) = \mathfrak{Q}^{n-1}(\psi)\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi) : \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V})$ са съвпадащи хомоморфизми на снопове, то индуцираните от тях хомоморфизми на предснопове

$$\{\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi\varphi)_U = \left[\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi)\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)\right]_U = \mathfrak{Q}^{n-1}(\psi)_U\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)_U\} :$$

$$\{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})}\} \longrightarrow \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V})}\}$$

също съвпадат, доколкото се свеждат до композиция на съответните прекъснати сечения с разглежданите хомоморфизми на снопове. По този начин, върху асоциираните снопове получаваме

$$(\psi\varphi)^{n-1} = \psi^{n-1}\varphi^{n-1} : \mathfrak{S}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{V}^{n-1}$$

съгласно

$$(\psi\varphi)^{n-1} a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} = a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V})} \mathfrak{Q}^{n-1}(\psi\varphi) \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} =$$
$$a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V})} \mathfrak{Q}^{n-1}(\psi) \mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi) \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} = \psi^{n-1} a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{T})} \mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi) \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} =$$
$$\psi^{n-1}\varphi^{n-1} a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})}$$

за произволно прекъснато сечение $\sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})} : U \to \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})$ и хомоморфизмите на директните граници $a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(*)} : \Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(*), U) \to *^{n-1}_x$. Сега непосредствено проверяваме, че

$$\mathfrak{Q}^n(\psi\varphi) = \mathfrak{Q}^n(\psi)\mathfrak{Q}^n(\varphi) : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S}) \longrightarrow \mathfrak{V}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{V}),$$

защото

$$\mathfrak{Q}^n(\psi\varphi)\left(\zeta^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})\right) = (\psi\varphi)^{n-1}(\zeta^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V}) =$$
$$\psi^{n-1}\varphi^{n-1}(\zeta^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{V}) = \mathfrak{Q}^n(\psi)\left(\varphi^{n-1}(\zeta^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{T})\right) =$$
$$\mathfrak{Q}^n(\psi)\mathfrak{Q}^n(\varphi)\left(\zeta^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{S})\right).$$

С това установихме, че $(\psi\varphi)^\bullet = \psi^\bullet\varphi^\bullet$. В резултат следва отъждествяването на съответните морфизми на ко-верижните комплекси от глобални непрекъснати сечения

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{S}, X) & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{S}^\bullet, X) \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\psi\varphi)_X = \psi_X\varphi_X} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\psi\varphi)^\bullet_X = \psi^\bullet_X\varphi^\bullet_X} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{V}, X) & \longrightarrow & \Gamma(\mathfrak{V}^\bullet, X) \end{array}$$

а оттам и съвпадението

$$H^n(\psi\varphi) = H^n(\psi)H^n(\varphi) : H^n(X, \mathfrak{S}) \longrightarrow H^n(X, \mathfrak{V})$$

на хомоморфизмите на кохомологиите на X с коефициенти в тези снопове.
(iii) Твърдим, че тъждественият хомоморфизъм на снопове $\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ индуцира тъждествения хомоморфизъм

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{S}^\bullet \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^\bullet = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}^\bullet}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{S} & \longrightarrow & \mathfrak{S}^\bullet \end{array}$$

на каноничната мека резолвента $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}^\bullet$ на $\mathfrak{S}$. С индукция по $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, достатъчно е да отбележим, че ако $\mathfrak{Q}^n(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} : \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})$, то $\mathfrak{Q}^n(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})_U = \left[\mathrm{Id}_{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}\right]_U = \mathrm{Id}_{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}),U)}$ за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$. Следователно

$$(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^n\, a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} = a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \mathfrak{Q}^n\left(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}\right) \sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} = a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} \sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})}$$

за всяко прекъснато сечение $\sigma_U^{\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} : U \to \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})$ и хомоморфизма на директната граница $a^x_{U,\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})} : \Gamma_o(\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}), U) \to \mathfrak{S}^n_x$. С други думи, $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^n = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}^n}$, а оттам и $\mathfrak{Q}^{n+1}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{Q}^{n+1}(\mathfrak{S})}$ съгласно $\mathfrak{Q}^{n+1}(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})\left(\zeta^n + \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})\right) = (\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^n\left(\zeta^n\right) + \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S}) = \zeta^n + \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{S})$ за $\forall \zeta^n \in \mathfrak{S}^n$. С това установяваме, че $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^\bullet = \mathrm{Id}_{\mathfrak{S}^\bullet}$. В резултат, индуцираният морфизъм на ко-верижния комплекс от глобални непрекъснати сечения $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}})^{\bullet}_X = \mathrm{Id}_{\Gamma(\mathfrak{S}^{\bullet}, X)}$ е тъждествен, така че хомоморфизмите на кохомологиите $H^n(\mathrm{Id}_{\mathfrak{S}}) = \mathrm{Id}_{H^n(X,\mathfrak{S})} : H^n(X,\mathfrak{S}) \to H^n(X,\mathfrak{S})$ за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, Q.E.D.

2. Къси точни редици от снопове и дълги точни редици от кохомологии с коефициенти в тези снопове

Твърдение 13.4. *Всяка къса точна редица*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{B} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

от снопове на модули над паракомпактно топологично пространство X отговаря на дълга точна редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{\varphi_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{\psi_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X) \xrightarrow{\partial^0} H^1(X, \mathfrak{A}) \dots$$

$$\dots H^n(X, \mathfrak{A}) \xrightarrow{H^n(\varphi)} H^n(X, \mathfrak{B}) \xrightarrow{H^n(\psi)} H^n(X, \mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(X, \mathfrak{A}) \dots \tag{13.5}$$

от кохомологии на X с коефициенти в тези снопове.

Доказателство: Твърдим, че дадената точна редица от снопове се продължава до точна редица

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{A}^{\bullet} \arrow[d, "\varphi^{\bullet}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{B}^{\bullet} \arrow[d, "\psi^{\bullet}"'] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{C}^{\bullet} \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

на каноничните меки резолвенти. С други думи, трябва да докажем точността на всички стълбове от комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{A}^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "\varphi^0"'] & \cdots \arrow[r, "f^{n-2}"] & \mathfrak{A}^{n-1} \arrow[r, "f^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & \mathfrak{A}^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\varphi^n"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{B} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{B}^0 \arrow[r, "g^0"] \arrow[d, "\psi^0"'] & \cdots \arrow[r, "g^{n-2}"] & \mathfrak{B}^{n-1} \arrow[r, "g^{n-1}"] \arrow[d, "\psi^{n-1}"'] & \mathfrak{B}^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "\psi^n"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{C}^0 \arrow[r, "h^0"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "h^{n-2}"] & \mathfrak{C}^{n-1} \arrow[r, "h^{n-1}"] \arrow[d] & \mathfrak{C}^n \arrow[r, "h^n"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{13.6}$$

с точни редове. С индукция по $n \in \mathbb{N}$ отбелязваме, че ако редицата от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)} \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) \xrightarrow{\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi)} \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}) \longrightarrow 0 \tag{13.7}$$

е точна, то и редицата от предсноповете на глобалните прекъснати сечения

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \; & \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})}\} \xrightarrow{\{\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)_U\}} \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}\} \\ & \xrightarrow{\{\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi)_U\}} \{\Gamma_o(\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}), U), \rho_{VU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C})}\} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{13.8}$$

е точна съгласно Лема 10.6. Сега прилагайки Лема 10.3 получаваме точната редица

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A}^{n-1} \xrightarrow{\varphi^{n-1}} \mathfrak{B}^{n-1} \xrightarrow{\psi^{n-1}} \mathfrak{C}^{n-1} \longrightarrow 0 \tag{13.9}$$

от асоциираните снопове. Остава да проверим точността на редицата

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \; & \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathfrak{Q}^n(\varphi)} \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) \\ & \xrightarrow{\mathfrak{Q}^n(\psi)} \mathfrak{Q}^n(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}^{n-1}/\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{13.10}$$

от фактор-сноповете. Ако $\alpha^{n-1} \in \mathfrak{A}^{n-1}$ и

$$\mathfrak{Q}^n(\varphi)\left(\alpha^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})\right) = \varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}),$$

то в подходяща околност V на проекцията x на $\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1})$ върху базата X съществува непрекъснато сечение $\tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})} : V \to \mathfrak{q}^{n-1}(\mathfrak{B})$, така че $\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) = a^x_{V,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}\tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}$. По определението на $\mathfrak{A}^{n-1}$ елементът $\alpha^{n-1} \in \mathfrak{A}^{n-1}$ има вида $\alpha^{n-1} = a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})}\sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})}$ за някакво прекъснато сечение $\sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} : U \to \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})$ върху околност U на x върху X. Следователно

$$\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) = a^x_{U,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)\sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} = a^x_{V,\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}\tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}$$

и съществува околност W на x върху $U \cap V$, така че

$$\rho_{WU}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})} \left[\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi) \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} \right] = \rho_{WV}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})} \tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}.$$

Сега

$$\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi) : \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})}(W) \longrightarrow \tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}(W)$$

е взаимно-еднозначно непрекъснато и отворено изображение с

$$\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)^{-1} : \tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})}(W) \longrightarrow \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})}(W).$$

В резултат, $\mathfrak{Q}^{n-1}(\varphi)^{-1} \tau_V^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})} = \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} : W \to \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})$ се оказва непрекъснато изображение, така че $\alpha^{n-1} = a^x_{W, \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} \rho_{W,U}^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} \sigma_U^{\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})} \in \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})$ и редицата (13.10) е точна в $\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{A})$. Лесно се вижда, че $Im \mathfrak{Q}^n(\varphi) \subseteq Ker \mathfrak{Q}^n(\psi)$ благодарение на

$$\mathfrak{Q}^n(\psi) \mathfrak{Q}^n(\varphi)(\alpha^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{A})) = \mathfrak{Q}^n(\psi)(\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})) =$$

$$\psi^{n-1} \varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C})$$

за $\forall \alpha^{n-1} \in \mathfrak{A}^{n-1}$, доколкото (13.9) е ко-верижен комплекс. Обратно, ако $\beta^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) \in Ker \mathfrak{Q}^n(\psi)$, то $\psi^{n-1}(\beta^{n-1}) \in \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C})$. Съгласно точността на (13.7) в $\mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C})$ съществува $\widetilde{\beta}^{n-1} \in \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B})$ с

$$\mathfrak{Q}^{n-1}(\psi) \left(\widetilde{\beta}^{n-1} \right) = \psi^{n-1} \left(\widetilde{\beta}^{n-1} \right) = \psi^{n-1}(\beta^{n-1}).$$

В резултат, $\beta^{n-1} - \widetilde{\beta}^{n-1} \in Ker(\psi^{n-1}) = Im(\varphi^{n-1})$, вземайки предвид точността на (13.9) в $\mathfrak{B}^{n-1}$. С други думи, съществува $\alpha^{n-1} \in \mathfrak{A}^{n-1}$, така че $\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) = \beta^{n-1} - \widetilde{\beta}^{n-1}$. По този начин получаваме, че

$$\beta^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) = \beta^{n-1} - \widetilde{\beta}^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) =$$

$$\varphi^{n-1}(\alpha^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{Q}^n(\varphi)(\alpha^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}),$$

откъдето $Ker \mathfrak{Q}^n(\psi) \subseteq Im \mathfrak{Q}^n(\varphi)$ и редицата (13.10) е точна в $\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{B})$. Накрая, всеки елемент на $\mathfrak{Q}^n(\mathfrak{C})$ има вида

$$\gamma^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}) = \psi^{n-1}(\beta^{n-1}) + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}^n(\psi)(\beta^{n-1} + \mathfrak{Q}^{n-1}(\mathfrak{B}))$$

за някакво $\beta^{n-1} \in \mathfrak{B}^{n-1}$, съгласно точността на (13.9) в $\mathfrak{C}^{n-1}$. С това точността на редицата (13.10) е установена.

Сега комутативната диаграма от снопове (13.6) с точни редове и стълбове индуцира комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{A}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_X"'] & \Gamma(\mathfrak{A}^0, X) \arrow[r, "f_X^0"] \arrow[d, "\varphi_X^0"'] & \Gamma(\mathfrak{A}^1, X) \arrow[r, "f_X^1"] \arrow[d, "\varphi_X^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{B}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_X"'] & \Gamma(\mathfrak{B}^0, X) \arrow[r, "g_X^0"] \arrow[d, "\psi_X^0"'] & \Gamma(\mathfrak{B}^1, X) \arrow[r, "g_X^1"] \arrow[d, "\psi_X^1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{C}, X) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\mathfrak{C}^0, X) \arrow[r, "h_X^0"] \arrow[d] & \Gamma(\mathfrak{C}^1, X) \arrow[r, "h_X^1"] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "f_X^{n-1}"] & \Gamma(\mathfrak{A}^n, X) \arrow[r, "f_X^n"] \arrow[d, "\varphi_X^n"'] & \Gamma(\mathfrak{A}^{n+1}, X) \arrow[r, "f_X^{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_X^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "g_X^{n-1}"] & \Gamma(\mathfrak{B}^n, X) \arrow[r, "g_X^n"] \arrow[d, "\psi_X^n"'] & \Gamma(\mathfrak{B}^{n+1}, X) \arrow[r, "g_X^{n+1}"] \arrow[d, "\psi_X^{n+1}"'] & \cdots . \\
\cdots \arrow[r, "h_X^{n-1}"] & \Gamma(\mathfrak{C}^n, X) \arrow[r, "h_X^n"] \arrow[d] & \Gamma(\mathfrak{C}^{n+1}, X) \arrow[r, "h_X^{n+1}"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Да отбележим, че всички стълбове от втория нататък са точни, защото $\mathfrak{A}^n$ са меки снопове за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Разбира се, всеки ред е точен в първите си два члена и образува ко-верижен комплекс. С други думи, получихме точна редица

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{A}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_X"'] & \Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X) \arrow[d, "\varphi_X^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{B}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_X"'] & \Gamma(\mathfrak{B}^\bullet, X) \arrow[d, "\psi_X^\bullet"'] \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{C}, X) \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{C}^\bullet, X) \arrow[d] \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

от ко-верижни комплекси на глобални непрекъснати сечения. Прилагайки Твърдение **??** (i) получаваме точната редица (13.5) от кохомологии с коефициенти в снопове, Q.E.D.

Нека сега да разгледаме комутативната диаграма от снопове

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathfrak{A}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathfrak{B}} \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{\mathfrak{C}} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{B} \arrow[r, "\psi"] & \mathfrak{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точни редове. Съгласно Твърдение 13.3 и Твърдение 13.4, тя индуцира комутативна диаграма от канонични меки резолвенти

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathfrak{A}}^\bullet \arrow[r, "\widetilde{\varphi}^\bullet"] \arrow[d, "\alpha^\bullet"'] & \widetilde{\mathfrak{B}}^\bullet \arrow[r, "\widetilde{\psi}^\bullet"] \arrow[d, "\beta^\bullet"'] & \widetilde{\mathfrak{C}}^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A}^\bullet \arrow[r, "\varphi^\bullet"] & \mathfrak{B}^\bullet \arrow[r, "\psi^\bullet"] & \mathfrak{C}^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точни редове. Съответните глобални непрекъснати сечения образуват комутативна диаграма от морфизми на ко-верижни комплекси

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(\widetilde{\mathfrak{A}}^\bullet, X) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_X^\bullet"] \arrow[d, "\alpha_X^\bullet"'] & \Gamma(\widetilde{\mathfrak{B}}^\bullet, X) \arrow[r, "\widetilde{\psi}_X^\bullet"] \arrow[d, "\beta_X^\bullet"'] & \Gamma(\widetilde{\mathfrak{C}}^\bullet, X) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_X^\bullet"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X) \arrow[r, "\varphi_X^\bullet"] & \Gamma(\mathfrak{B}^\bullet, X) \arrow[r, "\psi_X^\bullet"] & \Gamma(\mathfrak{C}^\bullet, X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точни редове. Прилагайки Твърдение 9.3 (ii) получаваме следното

Следствие 13.5. *Всяка комутативна диаграма*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathfrak{A}} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \widetilde{\mathfrak{B}} \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\beta"'] & \widetilde{\mathfrak{C}} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{B} \arrow[r, "\psi"] & \mathfrak{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точни редове, съставена от снопове на модули над паракомпактно топологично пространство X отговаря на комутативна диаграма от кохомологии с точни редове

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow H^0(X,\widetilde{\mathfrak{A}}) & \xrightarrow{H^0(\widetilde{\varphi})} & H^0(X,\widetilde{\mathfrak{B}}) & \xrightarrow{H^0(\widetilde{\psi})} & H^0(X,\widetilde{\mathfrak{C}}) & \xrightarrow{\widetilde{\partial}^0} & H^1(X,\widetilde{\mathfrak{A}})\ldots \\
\downarrow{\scriptstyle H^0(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle H^0(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle H^0(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle H^1(\gamma)} \\
0 \longrightarrow H^0(X,\mathfrak{A}) & \xrightarrow{H^0(\varphi)} & H^0(X,\mathfrak{B}) & \xrightarrow{H^0(\psi)} & H^0(X,\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial^0} & H^1(X,\mathfrak{A})\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots H^n(X,\widetilde{\mathfrak{A}}) & \xrightarrow{H^n(\widetilde{\varphi})} & H^n(X,\widetilde{\mathfrak{B}}) & \xrightarrow{H^n(\widetilde{\psi})} & H^n(X,\widetilde{\mathfrak{C}}) & \xrightarrow{\widetilde{\partial}^n} & H^{n+1}(X,\widetilde{\mathfrak{A}})\ldots \\
\downarrow{\scriptstyle H^n(\alpha)} & & \downarrow{\scriptstyle H^n(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle H^n(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle H^{n+1}(\alpha)} \\
\ldots H^n(X,\mathfrak{A}) & \xrightarrow{H^n(\varphi)} & H^n(X,\mathfrak{B}) & \xrightarrow{H^n(\psi)} & H^n(X,\mathfrak{C}) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(X,\mathfrak{A})\ldots
\end{array} .$$

3. Пресмятане на кохомологии с коефициенти в сноп чрез ациклични резолвенти

Твърдение 13.6. *Всяка резолвента* $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ *на сноп* $\mathfrak{S}$ *над паракомпактно топологично пространство X задава хомоморфизми*

$$\gamma^n : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) \longrightarrow H^n(X,\mathfrak{S})$$

на кохомологиите $H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X))$ *на ко-верижния комплекс* $\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)$.
Още повече, ако резолвентата $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ *е ациклична, то γ^n са изоморфизми за* $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Доказателство: Сноповете

$$\mathfrak{K}^n := Im\left(\mathfrak{A}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{A}^n\right) = Ker\left(\mathfrak{A}^n \longrightarrow \mathfrak{A}^{n+1}\right) \quad \text{за } n\in\mathbb{N}$$

и $\mathfrak{K}^0 = \mathfrak{S}$ участват в точните редици

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{A}^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{K}^n \longrightarrow 0\ . \qquad (13.11)$$

Съгласно Твърдение 13.4, тези редици отговарят на дълги точни редици от кохомологии

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{K}^{n-1}, X) \to \Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X) \to \Gamma(\mathfrak{K}^n, X) \to H^1(X,\mathfrak{K}^{n-1}) \to H^1(X,\mathfrak{A}^{n-1}) \to \ldots . \qquad (13.12)$$

Точността на (13.12) в $\Gamma(\mathfrak{K}^{n-1}, X)$ и в $\Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X)$ дава

$$\Gamma(\mathfrak{K}^{n-1}, X) = Ker\left[f_X^{n-1} : \Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)\right] =$$
$$Ker\left[f_X^{n-1} : \Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}^n, X)\right].$$

Следователно

$$H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) = \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)/Im\left[f_X^{n-1} : \Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X) \to \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)\right]$$

съгласно наличието на точна редица от снопове (13.11). Вземайки предвид точността на (13.12) в $\Gamma(\mathfrak{K}^n, X)$ получаваме, че

$$H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) = \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)/Ker\partial^0,$$

така че свързващият хомоморфизъм

$$\partial^0 : \Gamma(\mathfrak{K}^n, X) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1})$$

от (13.12) се пропуска до мономорфизъм

$$\gamma_1^n = \overline{\partial^0} : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) = \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)/Ker\partial^0 \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1}),$$

$$\gamma_1^n \left(\kappa^n + Ker\partial^0\right) = \overline{\partial^0} \left(\kappa^n + Ker\partial^0\right) = \partial^0(kappa^n)$$

за $\forall \kappa^n \in \Gamma(\mathfrak{K}^n, X)$. При това, ако резолвентата $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ е ациклична, то $H^1(X, \mathfrak{A}^{n-1}) = 0$, така че свързващият хомоморфизъм ∂^0 на (13.12) е епиморфизъм. Оттук и $\gamma_1^n = \overline{\partial^0}$ е епиморфизъм, т.е. изоморфизъм.
Аналогично, за $\forall 2 \leq\leq k \leq n$ имаме точни редици от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}^{n-k} \longrightarrow \mathfrak{A}^{n-k} \xrightarrow{f^{n-k}} \mathfrak{K}^{n-k+1} \longrightarrow 0$$

и съответни дълги точни редици от кохомологии

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathfrak{K}^{n-k}) \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathfrak{A}^{n-k}) \xrightarrow{H(f^{n-k})} H^{k-1}(X, \mathfrak{K}^{n-k+1})$$

$$\xrightarrow{\partial^{k-1}} H^k(X, \mathfrak{K}^{n-k}) \longrightarrow H^k(X, \mathfrak{A}^{n-k}) \dots .$$

Полагаме

$$\gamma_k^n := \partial^{k-1} : H^{k-1}(X, \mathfrak{K}^{n-k+1}) \longrightarrow H^k(X, \mathfrak{K}^{n-k})$$

да бъдат свързващите хомоморфизми от тези точни редици. В случай на ациклична резолвента $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ от равенствата $H^{k-1}(X, \mathfrak{A}^{n-k}) = 0$ и $H^k(X, \mathfrak{A}^{n-k}) = 0$ следва, че ∂^{k-1} е едновременно мономорфизъм и епиморфизъм, а оттам и изоморфизъм.
Накрая да отбележим, че композициите

$$\gamma^n := \gamma_n^n \dots \gamma_2^n \gamma_1^n : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) \longrightarrow H^n(X, \mathfrak{K}^0) = H^n(X, \mathfrak{S})$$

са търсените хомоморфизми, които се свеждат до изоморфизми за ациклична резолвента $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$, Q.E.D.

Твърдение 13.7. *Всеки хомоморфизъм*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{S} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{A}^\bullet \arrow[d, "\varphi^\bullet"'] \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \arrow[r] & \mathfrak{B}^\bullet \end{tikzcd}$$

на резолвенти на снопове $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ над паракомпактно топологично пространство X индуцира комутативни диаграми от кохомологии

$$\begin{tikzcd} H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) \arrow[r, "\gamma_{\mathfrak{S}}^n"] \arrow[d, "H^n(\varphi^\bullet)"'] & H^n(X, \mathfrak{S}) \arrow[d, "H^n(\varphi)"'] \\ H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet, X)) \arrow[r, "\gamma_{\mathfrak{T}}^n"] & H^n(X, \mathfrak{T}) \end{tikzcd} .$$

В частност, ако $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е изоморфизъм на снопове, а

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet \quad и \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{B}^\bullet$$

са ациклични резолвенти, то

$$H^n(f\varphi^\bullet) : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) \longrightarrow H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet, X))$$

са изоморфизми на кохомологиите.

Доказателство: Нека

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}^n := Im\left(f^{n-1} : \mathfrak{A}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{A}^n\right) = Ker\left(f^n : \mathfrak{A}^n \longrightarrow \mathfrak{A}^{n+1}\right) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{B}}^n := Im\left(g^{n-1} : \mathfrak{B}^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{B}^n\right) = Ker\left(g^n : \mathfrak{B}^n \longrightarrow \mathfrak{B}^{n+1}\right) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N}$$

и $\mathfrak{K}^0_{\mathfrak{A}} := \mathfrak{S}$, $\mathfrak{K}^0_{\mathfrak{B}} := \mathfrak{T}$. Тогава

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & \mathfrak{A}^{n-1} \arrow[r, "f^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & \mathfrak{K}^{n}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{B}} \arrow[r] & \mathfrak{B}^{n-1} \arrow[r, "g^{n-1}"] & \mathfrak{K}^{n}_{\mathfrak{B}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{13.13}$$

са комутативни диаграми от снопове с точни редове. По-точно, твърдим, че $\varphi^{n-1} : \mathfrak{A}^{n-1} \to \mathfrak{B}^{n-1}$ се ограничават до хомоморфизми на снопове $\varphi^{n-1} : \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{B}}$, доколкото $g^{n-1}\varphi^{n-1}(\kappa^{n-1}) = \varphi^n f^{n-1}(\kappa^{n-1}) = \varphi^n(0) = 0$, съгласно определението за хомоморфизъм на резолвенти $\varphi^\bullet : \mathfrak{A}^\bullet \to \mathfrak{B}^\bullet$. Същото определение гарантира комутативността и на десния квадрат от диаграмата (13.13). Сега Следствие 13.5 предоставя комутативна диаграма с точни редове

$$\begin{tikzcd}
0 \to \Gamma(\mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{A}}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_X"'] & \Gamma(\mathfrak{A}^{n-1}, X) \arrow[r, "f^{n-1}_X"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}_X"'] & \Gamma(\mathfrak{K}^{n}_{\mathfrak{A}}, X) \arrow[r, "\partial^0_{\mathfrak{A}}"] \arrow[d, "\varphi^{n}_X"'] & H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{A}}) \ldots \arrow[d, "H^1(\varphi^{n-1})"'] \\
0 \to \Gamma(\mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{B}}, X) \arrow[r] & \Gamma(\mathfrak{B}^{n-1}, X) \arrow[r, "g^{n-1}_X"] & \Gamma(\mathfrak{K}^{n}_{\mathfrak{B}}, X) \arrow[r, "\partial^0_{\mathfrak{B}}"] & H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{B}}) \ldots
\end{tikzcd} \tag{13.14}$$

Непосредствено се проверява, че φ^n_X изобразява $Ker\partial^0_{\mathfrak{A}}$ в $Ker\partial^0_{\mathfrak{B}}$, доколкото $\partial^0_{\mathfrak{B}}\varphi^n_X(\kappa^n) = H^1(\varphi^{n-1})\partial^0_{\mathfrak{A}}(\kappa^n) = H^1(\varphi^{n-1})(0) = 0$ за $\forall \kappa^n \in Ker\partial^0_{\mathfrak{A}} \subset \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{A}}, X)$. В резултат получаваме коректно зададен хомоморфизъм

$$\overline{\varphi^n_X} : \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{A}})/Ker\partial^0_{\mathfrak{A}} \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{B}})/Ker\partial^0_{\mathfrak{B}},$$

$$\overline{\varphi^n_X}(\kappa^n + Ker\partial^0_{\mathfrak{A}}) := \varphi^n_X(\kappa^n) + Ker\partial^0_{\mathfrak{B}},$$

който се включва в диаграмата

$$\begin{tikzcd}
H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, X)) = \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{A}}, X)/Ker\partial^0_{\mathfrak{A}} \arrow[r, "\gamma^n_{1,\mathfrak{S}}"] \arrow[d, "\overline{\varphi^n_X}"'] & H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{A}}) \arrow[d, "H^1(\varphi^{n-1})"'] \\
H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet, X)) = \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{B}}, X)/Ker\partial^0_{\mathfrak{B}} \arrow[r, "\gamma^n_{1,\mathfrak{T}}"] & H^1(X, \mathfrak{K}^{n-1}_{\mathfrak{B}})
\end{tikzcd} \tag{13.15}$$

Използвайки комутативността на диаграмата (13.14) проверяваме, че

$$H^1(\varphi^{n-1})\gamma^n_{1,\mathfrak{S}}(\kappa^n + Ker\partial^0_{\mathfrak{A}}) = H^1(\varphi)\partial^0_{\mathfrak{A}}(\kappa) = \partial^0_{\mathfrak{B}}\varphi^n_X(\kappa^n) =$$

$$\overline{\partial^0_{\mathfrak{B}}}\left(\varphi^n_X(\kappa^n) + Ker\partial^0_{\mathfrak{B}}\right) = \gamma^n_{1,\mathfrak{T}}\overline{\varphi^n_X}(\kappa^n + Ker\partial^0_{\mathfrak{A}})$$

за $\forall \kappa^n \in \Gamma(\mathfrak{K}^n_{\mathfrak{A}}, X)$ и установяваме комутативността на диаграмата (13.15). Аналогично, за $\forall 2 \leq k \leq n$ имаме комутативни диаграми от снопове с точни редове

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-k}"'] & \mathfrak{A}^{n-k} \arrow[r, "f^{n-k}"] \arrow[d, "\varphi^{n-k}"'] & \mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{A}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-k+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{B}} \arrow[r] & \mathfrak{B}^{n-k} \arrow[r, "g^{n-k}"] & \mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{B}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Посредством Следствие 13.5 от тях получаваме комутативни диаграми от кохомологии на снопове с точни редове

$$\begin{tikzcd}
\dots H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{A}}) \arrow[r] \arrow[d, "H^{k-1}(\varphi^{n-k})"'] & H^{k-1}(X,\mathfrak{A}^{n-k}) \arrow[r, "H^{k-1}(f^{n-k})"] \arrow[d, "H^{k-1}(\varphi^{n-k})"'] & H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{A}}) \arrow[r, "\partial^{k-1}_{\mathfrak{A}}"] \arrow[d, "H^{k-1}(\varphi^{n-k+1})"'] & H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{A}})\dots \arrow[d, "H^{k}(\varphi^{n-k})"'] \\
\dots H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{B}}) \arrow[r] & H^{k-1}(X,\mathfrak{B}^{n-k}) \arrow[r, "H^{k-1}(f^{n-k})"] & H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{B}}) \arrow[r, "\partial^{k-1}_{\mathfrak{B}}"] & H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{B}})\dots
\end{tikzcd}.$$

Полагайки

$$\gamma^n_{k,\mathfrak{S}} := \partial^{k-1}_{\mathfrak{A}} : H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{A}}) \longrightarrow H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{A}})$$

и

$$\gamma^n_{k,\mathfrak{T}} := \partial^{k-1}_{\mathfrak{B}} : H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{B}}) \longrightarrow H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{B}})$$

получаваме комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{A}}) \arrow[r, "\gamma^n_{K,\mathfrak{S}}"] \arrow[d, "H^{k-1}(\varphi^{n-k+1})"'] & H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{A}}) \arrow[d, "H^{k}(\varphi^{n-k})"'] \\
H^{k-1}(X,\mathfrak{K}^{n-k+1}_{\mathfrak{B}}) \arrow[r, "\gamma^n_{k,\mathfrak{T}}"] & H^{k}(X,\mathfrak{K}^{n-k}_{\mathfrak{B}})
\end{tikzcd}$$

за $\forall 2 \le k \le n$. Сглобявайки (13.15) с тези диаграми получаваме комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd}
H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet,X)) \arrow[r, "\gamma^n_{\mathfrak{S}}:=\gamma^n_{n,\mathfrak{S}}\cdots\gamma^n_{2,\mathfrak{S}}\gamma^n_{1,\mathfrak{S}}"] \arrow[d, "H^n(\varphi^\bullet)"'] & H^n(X,\mathfrak{S}) \arrow[d, "H^n(\varphi)"'] \\
H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet,X)) \arrow[r, "\gamma^n_{\mathfrak{T}}:=\gamma^n_{n,\mathfrak{T}}\cdots\gamma^n_{2,\mathfrak{T}}\gamma^n_{1,\mathfrak{T}}"] & H^n(X,\mathfrak{T})
\end{tikzcd} \tag{13.16}$$

за $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

В частност, ако $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ е изоморфизъм на снопове, то всички $H^n(\varphi) : H^n(X,\mathfrak{S}) \to H^n(X,\mathfrak{T})$ са изоморфизми на кохомологиите съгласно Твърдение 13.3. Още повече, ако резолвентите $0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ и $0 \longrightarrow \mathfrak{T} \longrightarrow \mathfrak{B}^\bullet$ са ациклични, то Твърдение 13.6 гарантира, че $\gamma^n_{\mathfrak{S}} : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet,X)) \to H^n(X,\mathfrak{S})$ и $\gamma^n_{\mathfrak{T}} : H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet,X)) \to H^n(X,\mathfrak{T})$ са изоморфизми. Сега от комутативността на диаграмата (13.16) следва, че и

$$H^n(\varphi^\bullet) : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet,X)) \longrightarrow H^n(\Gamma(\mathfrak{B}^\bullet,X))$$

са изоморфизми, Q.E.D.

4. Теорема на де Рам

Нека M е свързано паракомпактно гладко многообразие. Съгласно Следствие 12.13, сноповете $\mathfrak{A}^k$ на гладките диференциални k-форми върху M образуват тънка резолвента $0 \longrightarrow M\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ на постоянния сноп. От Лема 10.22 знаем, че всеки тънък сноп над паракомпактно топологично пространство е мек, а меките снопове са ациклични по Следствие 10.20 и Определение ?? за кохомологии с коефициенти в сноп. Следователно $0 \longrightarrow M\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^\bullet$ е ациклична резолвента на $M\times\mathbb{R}$. От друга страна, в Следствие 11.9 установихме, че сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$ на гладките сингулярни n-ковериги над гладко многообразие M образуват резолвента $0 \longrightarrow M\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{S}^\bullet_\infty$ на постоянния сноп

$M \times \mathbb{R}$. Следствие 10.26 гарантира, че над паракомпактно многообразие M сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$ са меки за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В частност, $0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{S}^\bullet_\infty$ е също ациклична резолвента на $M \times \mathbb{R}$. Ще построим хомоморфизъм

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \times \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M\times\mathbb{R}}"'] & \mathfrak{A}^\bullet \arrow[d, "I^\bullet"'] \\ 0 \arrow[r] & M \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{S}^\bullet_\infty \end{tikzcd} \tag{13.17}$$

на тези две ациклични резолвенти. За целта да започнем с конструирането на $\mathbb{R}$-линейни изображения

$$I^n_U : \mathfrak{A}^n(U, \mathbb{R}) \longrightarrow S^n_\infty(U, \mathbb{R})$$

от гладките n-форми $\mathfrak{A}^n(U, \mathbb{R})$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$ в гладките сингулярни n-ковериги $S^n_\infty(U, \mathbb{R})$ върху U. Съгласно линейността на I^n_U, достатъчно е да пресметнем $I^n_U(\omega)$ за $\omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$, където $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m = \dim_{\mathbb{R}} M$, а $f : U \to \mathbb{R}$ е гладка функция върху U. От своя страна, $I^n_U(\omega) \in S^n_\infty(U, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(S^\infty_n(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ е $\mathbb{R}$-линейно изображение, така че се определя еднозначно от стойностите си $I^n_U(\omega)(\sigma) \in \mathbb{R}$ върху гладките сингулярни n-симплекси $\sigma : \Delta^n \to U$. Полагаме

$$I^n_U(\omega)(\sigma) := \int_{\sigma(\Delta^n)} \omega = \int_{\Delta^n} \sigma^*(\omega).$$

Сега ще се убедим, че фамилията $\{I^n_U\}_{U \subseteq M}$ образува морфизъм на предснопа $\{\mathfrak{A}^n(U, \mathbb{R}), \rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU}\}$ на гладките диференциални n-форми в предснопа $\{S^n_\infty(U, \mathbb{R}), \rho^{\mathfrak{S}^\bullet_\infty}_{VU}\}$ на гладките сингулярни n-ковериги. С други думи, твърдим, че $\rho^{\mathfrak{S}^\bullet_\infty}_{VU} I^n_U = I^n_V \rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU}$ за произволни $V \subseteq U$. Съгласно $\mathbb{R}$-линейността на I^n_U и $\mathbb{R}$-линейността на $I^n_U(\omega)$ за $\omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$, $f : U \to \mathbb{R}$, достатъчно е да проверим съвпадението на двете страни върху гладък сингулярен n-симплекс Наистина,

$$\left[\rho^{\mathfrak{S}^\bullet_\infty}_{VU} I^n_U(\omega)\right](\tau) = \left[i^*_{UV} I^n_U(\omega)\right](\tau) = I^n_U(\omega)(i_{UV}(\tau)) = \int_{i_{UV}\tau(\Delta^n)} \omega = \int_{\Delta^n} (i_{UV}\tau)^* \omega =$$

$$\int_{\Delta^n} \tau^* i^*_{UV}(\omega) = \int_{\Delta^n} \tau^* \rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU}(\omega) = \int_{\tau(\Delta^n)} \rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU}(\omega) = \left[I^n_V \rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU}(\omega)\right](\tau),$$

където $i_{UV} : V \to U$ е тъждественото влагане, индуциращо хомоморфизмите на ограничение $\rho^{\mathfrak{S}^\bullet_\infty}_{VU} = i^*_{UV}$ и $\rho^{\mathfrak{A}^\bullet}_{VU} = i^*_{UV}$. По-нататък, за произволни $\omega = f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} \in \mathfrak{A}^n(U, \mathbb{R})$ и $\tau \in S^\infty_{n+1}(U, \mathbb{R})$ Теоремата на Стокс дава

$$\left[I^{n+1}_U d^n_U(\omega)\right](\tau) = \int_{\tau(\Delta^{n+1})} d^n_U(\omega) = \int_{(\partial^{U,\infty}_{n+1}\tau)(\Delta^n)} \omega =$$

$$I^n_U(\omega)(\partial^{U,\infty}_{n+1}\tau) = \left[d^n_{U,\infty} I^n_U(\omega)\right](\tau).$$

Това установява комутативността на диаграмите

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}^n(U, \mathbb{R}) \arrow[r, "d^n_U"] \arrow[d, "I^n_U"'] & \mathfrak{A}^{n+1}(U, \mathbb{R}) \arrow[d, "I^{n+1}_U"'] \\ S^n_\infty(U, \mathbb{R}) \arrow[r, "d^n_{U,\infty}"] & S^{n+1}_\infty(U, \mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и показва, че

$$\{I_U^\bullet\} : \{\mathfrak{A}^\bullet(U,\mathbb{R}), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}^\bullet}\} \longrightarrow \{S_\infty^\bullet(U,\mathbb{R}), \rho_{VU}^{\mathfrak{S}_\infty^\bullet}\}$$

е хомоморфизъм на ко-верижни комплекси от предснопове. В резултат, индуцираните хомоморфизми на снопове $I^n : \mathfrak{A}^n \to \mathfrak{S}_\infty^n$ образуват хомоморфизъм

$$I^\bullet : \mathfrak{A}^\bullet \longrightarrow \mathfrak{S}_\infty^\bullet$$

на точни редици от снопове съгласно

$$I^{n+1} d^n a_{U,\mathfrak{A}^n}^x (\omega_U^n) = I^{n+1} a_{U,\mathfrak{A}^{n+1}}^x d_U^n (\omega_U^n) = a_{U,\mathfrak{S}_\infty^{n+1}}^x I_U^{n+1} d_U^n (\omega_U^n) =$$
$$a_{U,\mathfrak{S}_\infty^{n+1}}^x d_{U,\infty}^n I_U^n (\omega_U^n) = d_\infty^n a_{U,\mathfrak{S}_\infty^n}^x I_U^n (\omega_U^n) = d_\infty^n I^n a_{U,\mathfrak{A}^n}^x (\omega_U^n)\,.$$

Още повече, диаграмата

$$\begin{tikzcd}
M \times \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M\times\mathbb{R}}"'] & \mathfrak{A}^0 \arrow[d, "I^0"'] \\
M \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathfrak{S}_\infty^0
\end{tikzcd}$$

е комутативна, доколкото

$$I^0 : \mathfrak{A}^0 \longrightarrow \mathfrak{S}_\infty^0,$$
$$I^0 a_{U,\mathfrak{A}^0}^x(f) = f(x) \quad \text{за } \forall f \in \mathfrak{A}^0(U,\mathbb{R}), \forall x \in M,$$

оставя на място постоянните реално-значни функции върху M. С това получаваме, че (13.17) е хомоморфизъм на ациклични резолвенти на $M \times \mathbb{R}$, продължаващ $\mathrm{Id}_{M\times\mathbb{R}} : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$. Съгласно Твърдение 13.7, индуцираните изображения на кохомологиите

$$H^n(I^\bullet) : H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, M)) \longrightarrow H^n(\Gamma(\mathfrak{S}_\infty^\bullet, M))$$

са изоморфизми на $\mathbb{R}$-линейни пространства за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. По определение, предснповете $\{\mathfrak{A}^n(U,\mathbb{R}), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}^n(U,\mathbb{R})}\}$ на гладките диференциални n-форми са пълни, в качеството си на съставени от гладките сечения на гладките векторни разслоения $\wedge^n T^* M \to M$ (виж Лема **??**). Следователно $\{\mathfrak{A}^n(U,\mathbb{R}), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}^n(U,\mathbb{R})}\}$ са изоморфни на $\{\Gamma(\mathfrak{A}^n, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}^n}\}$ и кохомологиите на де Рам

$$H_{\mathrm{DR}}^n(M,\mathbb{R}) \simeq H^n(\Gamma(\mathfrak{A}^\bullet, M)).$$

С това получаваме следната

Теорема 13.8. (де Рам) *Върху всяко свързано паракомпактно гладко многообразие M, кохомологиите на де Рам са изоморфни на кохомологиите на ко-верижния комплекс от глобални непрекъснати сечения на сноповете от гладки сингулярни ко-вериги, разглеждани като $\mathbb{R}$-линейни пространства. Именно,*

$$H_{\mathrm{DR}}^n(M,\mathbb{R}) \simeq H^n(\Gamma(\mathfrak{S}_\infty^\bullet, M))$$

за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$