Лекция 12

Кохомологии на Де Рам. Лема на Поанкаре.

1. Допирателно разслоение

Определение 12.1. *Нека* $\{\mathfrak{C}^\infty(U), \rho_{VU}\}$ *е предснопът на гладките функции върху многообразие* M, *а*

$$\mathfrak{C}^\infty := \cup_{p\in M} \lim_{\rightarrow} \mathfrak{C}^\infty(U)$$

е асоциираният сноп. Диференциране на слоя $\mathfrak{C}^\infty_p$ *над* $p \in M$ *е* $\mathbb{R}$*-линейно изображение*

$$D_p : \mathfrak{C}^\infty_p \longrightarrow \mathbb{R},$$

изпълняващо условието

$$D_p(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) = D_p(a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)D_p(a^p_V(g_V))$$

за $\forall a^p_U(f_U), a^p_V(g_V) \in \mathfrak{C}^\infty_p$.

Да напомним, че равенството $a^p_U(f_U) = a^p_W(f_W)$ води до $a^p_{U\cap W}\rho_{U\cap W,U}(f_U) = a^p_{U\cap W}\rho_{U\cap W,W}(f_W)$, така че

$$h_{U\cap W} := \rho_{U\cap W,U}(f_U) - \rho_{U\cap W,W}(f_W) \in \mathfrak{C}^\infty(U\cap W)$$

е в ядрото K_p на естествения епиморфизъм $\coprod_{p\in U}\mathfrak{C}^\infty(U) \to \mathfrak{C}^\infty_p := \lim_\rightarrow \mathfrak{C}(U)$. Доколкото K_p се поражда от $t_{V_1} - \rho_{V_2,V_1}(t_{V_1})$ за произволни $t_{V_1} \in \mathfrak{C}^\infty(V_1)$ и околности $V_2 \subseteq V_1$ на p, всеки елемент на K_p се анулира в p и $h_{U\cap W}(p) = f_U(p) - f_V(p) = 0$. Затова равенството $D_p(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) = D_p(a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)D_p(a^p_V(g_V))$ не зависи от избора на локални гладки функции f_U, g_V, представящи $a^p_U(f_U)$, $a^p_V(g_V)$.

Лема-Определение 12.2. *Във всяка точка* p *на гладко многообразие* M, *диференциранията на* $\mathfrak{C}^\infty_p$ *образуват* $\mathbb{R}$*-линейно пространство, което се нарича допирателно пространство към* M *в* p *и се бележи с* T_pM.

Доказателство: Да напомним, че линейните функционали $\left(\mathfrak{C}^\infty_p\right)^*$ върху $\mathfrak{C}^\infty_p$ образуват $\mathbb{R}$-линейно пространство относно поточковото събиране и умножение с реално число. Твърдим, че диференциранията на $\mathfrak{C}^\infty_p$ образуват подпространство на $\left(\mathfrak{C}^\infty_p\right)^*$. За целта да отбележим, че за произволно диференциране $D_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$ и произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ произведението $rD_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$, определено с формулата $(rD_p)(a^p_U(f_U)) := rD_p(a^p_U(f_U))$ е също диференциране, защото

$$(rD_p)(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) = r[D_p(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V))] =$$
$$r[D_p(a^p_U(f_U))g_V(p)+f_U(p)D_p(a^p_V(g_V))] = [rD_p(a^p_U(f_U))]g_V(p)+f_U(p)[rD_p(a^p_V(g_V))] =$$
$$(rD_p)(a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)(rD_p)(a^p_V(g_V))$$

за $\forall a^p_U(f_U), a^p_V(g_V) \in \mathfrak{C}^\infty_p$. Аналогично, ако $D_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$ и $\Delta_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$ са диференцирания, то $D_p + \Delta_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$, $(D_p + \Delta_p)(a^p_U(f_U)) := D_p(a^p_U(f_U)) + \Delta_p(a^p_U(f_U))$ е също диференциране, защото

$$(D_p + \Delta_p)(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) = D_p(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) + \Delta_p(a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) =$$
$$D_p(a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)D_p(a^p_V(g_V)) + \Delta_p(a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)\Delta_p(a^p_V(g_V)) =$$

$$[D_p(a_U^p(f_U)) + \Delta_p(a_U^p(f_U))]g_V(p) + f_U(p)[D_p(a_V^p(g_V)) + \Delta_p(a_V^p(g_V))] =$$
$$(D_p + \Delta_p)(a_U^p(f_U))g_V(p) + f_U(p)(D_p + \Delta_p)(a_V^p(g_V))$$

за $\forall a_U^p(f_U), a_V^p(g_V) \in \mathfrak{C}_p^\infty$. Следователно диференциранията на $\mathfrak{C}_p^\infty$ образуват линейно подпространство T_pM на $\left(\mathfrak{C}_p^\infty\right)^*$, Q.E.D.

Пример 12.3. *В произволна точка $p \in \mathbb{R}^m$ изображенията*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathfrak{C}_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(f_U)) := \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p)$$

за $1 \leq i \leq m$ образуват базис на допирателното пространство $T_p\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$ в p.
Още повече, функциите $\xi_i : T_p\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, които съпоставят на допирателен вектор $D_p \in T_p\mathbb{R}^m$ неговите координати $\xi_i(D_p)$ спрямо базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ на $T_p\mathbb{R}^m$ са гладки функции на D_p.

Доказателство: Преди всичко, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ са коректно определени, защото при $a_U^p(f_U) = a_V^p(f_V)$ гладката функция

$$h_{U\cap V} := \rho_{U\cap V,U}(f_U) - \rho_{U\cap V,V}(f_V)$$

върху $U \cap V$ е в ядрото K_p на естествения епиморфизъм $\coprod_{p\in U} \mathfrak{C}^\infty(U) \to \mathfrak{C}_p^\infty = \lim_{\to} \mathfrak{C}^\infty(U)$. Елементите на K_p са крайни суми от вида

$$\kappa = \sum_{j=1}^m \left[g_{V_j} - \rho_{W_jV_j}(g_{V_j})\right] h_j,$$

където $g_{V_j} \in \mathfrak{C}^\infty(V_j)$, $W_j \subseteq V_j$ и $h_j \in \coprod_{p\in W} \mathfrak{C}^\infty(W)$. Доколкото околностите на p върху $\mathbb{R}^m$ образуват насочена система от индекси относно теоретико-множественото включване, съществува околност W_o на p, която се съдържа в W_j за всички $1 \leq j \leq m$. Сега ограничението $\kappa|_{W_o} = \sum_{j=1}^m [\rho_{W_oV_j}(g_{V_j}) - \rho_{W_oW_j}\rho_{W_jV_j}(g_{V_j})]h_j|_{W_o} \equiv 0$, така че $\frac{\partial \kappa}{\partial x_i}(p) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq m$. В частност, $0 = \frac{\partial h_{U\cap V}}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_V}{\partial x_i}(p)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(f_U)) = \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f_V}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_V^p(f_V))$. По-нататък, твърдим, че $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathfrak{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$ са линейни функционали. За целта проверяваме, че

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(f_U) + a_V^p(g_V)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_{U\cap V}^p \rho_{U\cap V,U}(f_U) + a_{U\cap V}^p \rho_{UcapV,V}(g_V)) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p a_{U\cap V}^p(\rho_{U\cap V,U}(f_U) + \rho_{U\cap V,V}(g_V)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_{U\cap V,U}(f_U) + \rho_{U\cap V,V}(g_V))(p) =$$

$$\frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial g_V}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(f_U) + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_V^p(g_V))$$

за $f_U \in \mathfrak{C}^\infty(U)$, $g_V \in \mathfrak{C}^\infty(V)$ и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (ra_U^p(f_U)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(rf_U)) = \frac{\partial (rf_U)}{\partial x_i}(p) =$$

$$r\left[\frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p)\right] = r\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a_U^p(f_U))\right]$$

за $f_U \in \mathfrak{C}^\infty(U)$, $r \in \mathbb{R}$. Още повече, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ са диференцирания, защото

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a^p_U(f_U)a^p_V(g_V)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p ([a^p_{U\cap V}\rho_{U\cap V,U}(f_U)]\,[a^p_{U\cap V}\rho_{U\cap V,V}(g_V)]) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p a^p_{U\cap V}\left([\rho_{U\cap V,U}(f_U)]\,[\rho_{U\cap V,V}(g_V)]\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left([\rho_{U\cap V,U}(f_U)]\,[\rho_{U\cap V,V}(g_V)]\right)(p) =$$

$$\frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p) + f_U(p)\frac{\partial g_V}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a^p_U(f_U))g_V(p) + f_U(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (a^p_V(g_V))$$

за $f_U \in \mathfrak{C}^\infty(U)$, $g_V \in \mathfrak{C}^\infty(V)$.

За линейната независимост на $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ с $1 \leq i \leq m$ да допуснем, че

$$\sum_{i=1}^m r_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \mathbb{O} \tag{12.1}$$

за някакви $r_i \in \mathbb{R}$ и нулевото диференциране $\mathbb{O} : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$, $\mathbb{O}(a^p_U(f_U)) = 0$. Прилагайки (12.1) към координатните функции x_j получаваме, че $r_j = 0$, така че $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^m$ за $1 \leq i \leq m$ са линейно независими. За произволно диференциране $D_p : \mathfrak{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$ ще докажем, че $D_p = \sum_{i=1}^m D_p(a^p_U(x_i - p_i))\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. За целта да напомним, че всяка гладка функция $f_U : U \to \mathbb{R}$, определена върху околност U на p изпълнява формулата на Тейлър с остатъчен член в интегрална форма

$$f_U(x) = f_U(p) + \sum_{i=1}^m (x_i - p_i)\frac{\partial f_U}{\partial x_I}(p) +$$

$$\int_0^1 (1-t)\left[\sum_{1\leq i,j\leq m}(x_i - p_i)(x_j - p_j)\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(x-p))\right] dt.$$

Зародишите $a^p_U(r)$ на константите $r \in \mathbb{R}$ са в ядрото на D_p, доколкото

$$D_p(a^p_U(1)) = D_p(a^p_U(1)a^p_U(1)) = D_p(a^p_U(1)).1 + 1.D_p(a^p_U(1)) = 2D_p(a^p_U(1))$$

и $D_p(a^p_U(r)) = D_p(ra^p_U(1)) = rD_p(a^p_U(1)) = 0$. От друга страна,

$$D_p\left(\int_0^1 (1-t)\left[\sum_{1\leq i,j\leq m}(x_i - p_i)(x_j - _j)\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(x-p))\right] dt\right) =$$

$$\int_0^1 (1-t)\left[\sum_{1\leq i,j\leq m} D_p\left((x_i - p_i)(x_j - p_j)\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(x-p))\right)\right] dt = 0,$$

защото

$$D_p\left((x_i - p_i)(x_j - p_j)\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(x-p))\right) =$$

$$D_p((x_i - p_i)(x_j - p_j))\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p) + [(x_i - p_i)(x_j - p_j)]|_{x=p} D_p\left(\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j}(p + t(x-p))\right) = 0$$

съгласно

$$D_p((x_i - p_i)(x_j - p_j)) = D_p(x_i - p_i)\left[(x_j - p_j)|_{x=p}\right] + \left[(x_i - p_i)|_{x=p}\right] D_p(x_j - p_j) = 0.$$

Следователно

$$D_p(a^p_U(f_U)) = \sum_{i=1}^m D_p a^p_U(x_i - p_i)\frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p)$$

или

$$D_p(a_U^p(f_U)) = \sum_{i=1}^{m} D_p a_U^p(x_i) \frac{\partial f_U}{\partial x_i}(p).$$

С други думи, $D_p = \sum_{i=1}^m D_p a_U^p(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ за $1 \leq i \leq m$ е базис на допирателното пространство $T_p\mathbb{R}^m$.
Гладката зависимост на $\xi_i(D_p)$ от $D_p \in T_p\mathbb{R}^m$ следва от равенството $D_p = \sum_{i=1}^m \xi_i(D_p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ и гладката зависимост на $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ от p, Q.E.D.
Нека M е гладко многообразие, а (U, φ) е локална карта върху M. Тогава за всяка точка $p \in U$ и всяка околност V на p върху U имаме изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри

$$\varphi^* : \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)) \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty(V),$$
$$\varphi^*(f) := f\varphi.$$

По-точно, $\varphi^*(f_1 \circ f_2) = (f_1 \circ f_2)\varphi = (f_1\varphi) \circ (f_2\varphi) = \varphi^*(f_1) \circ \varphi^*(f_2)$ за събирането или умножението $\circ$ в $\mathfrak{C}^\infty(\varphi(V))$, съответно, в $\mathfrak{C}^\infty(V)$. Освен това, $\varphi^*(rf) = (rf)\varphi = r(f\varphi) = r\varphi^*(f)$, така че $\varphi^* : \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)) \to \mathfrak{C}^\infty(V)$ е хомоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри. Още повече, дифеоморфизмът $\varphi^{-1} : \varphi(V) \to V$ индуцира хомоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* : \mathfrak{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)),$$
$$(\varphi^{-1})^*(g) := g\varphi^{-1},$$

за който

$$\left(\varphi^{-1}\right)^* \varphi^*(f) = \left(\varphi^{-1}\right)^* (f\varphi) = f\varphi\varphi^{-1} = f$$

върху $\forall f \in \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V))$ и

$$\varphi^*(\varphi^{-1})^*(g) = \varphi^*(g\varphi^{-1}) = g\varphi^{-1}\varphi = g$$

върху $\forall g \in \mathfrak{C}^\infty(V)$. По този начин $\left(\varphi^{-1}\right)^* = (\varphi^*)^{-1}$ и $\varphi^* : \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)) \to \mathfrak{C}^\infty(V)$ е изоморфизъм. Твърдим, че

$$\varphi^* : \mathfrak{C}^\infty_{\mathbb{R}^m, \varphi(p)} \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty_{M,p},$$
$$\varphi^*(a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)})) := a^p_V(f_{\varphi(V)}\varphi)$$

е коректно определен изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри. За целта да разгледаме композицията

$$a(p,\ )\varphi^* : \coprod_{\varphi(p) \in \varphi(V)} \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)) \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty_{M,p}$$

на изоморфизма на $\mathbb{R}$-алгебри

$$\varphi^* : \coprod_{\varphi(p) \in \varphi(V)} \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V)) \longrightarrow \coprod_{p \in V} \mathfrak{C}^\infty(V),$$
$$\varphi^* \left(\sum_V f_{\varphi(V)} \right) := \sum_V f_{\varphi(V)}\varphi$$

с хомоморфизма на директната граница

$$a(p,\ ) : \coprod_{p \in V} \mathfrak{C}^\infty(V) \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty_{M,p}.$$

Неговото ядро се поражда от елементите

$$f_{\varphi(W)} - \rho_{\varphi(V),\varphi(W)} f_{\varphi(W)} \in \coprod_{\varphi(p) \in \varphi(V)} \mathfrak{C}^\infty(\varphi(V))$$

и съвпада с ядрото на епиморфизма

$$a(\varphi(p),\ ): \coprod_{\varphi(p)\in\varphi(V)} \mathfrak{C}^{\infty}(\varphi(V)) \longrightarrow \mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)}.$$

Съгласно Теоремата за хомоморфизмите на $\mathbb{R}$-алгебри, $a(p,\ )\varphi^*$ се пропусква до изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебрата

$$\coprod_{\varphi(p)\in\varphi(V)} \mathfrak{C}^{*\infty}(\varphi(V))/Ker(a(p,\ )\varphi^*) = \coprod_{\varphi(p)\in\varphi(V)} \mathfrak{C}^{\infty}(\varphi(V))/Ker(a(\varphi(p),\ )) = \mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)}$$

с $\mathbb{R}$-алгебрата $\mathfrak{C}^{\infty}_{M,p}$, зададен по правилото $a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)}) \mapsto a^p_V(f_{\varphi(V)}\varphi)$. С други думи,

$$\varphi^* : \mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)} \longrightarrow \mathfrak{C}^{\infty}_{M,p},$$

$$\varphi^*(a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)})) = a^p_V(f_{\varphi(V)}\varphi)$$

е изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри. Сега ще видим, че $\varphi^* : \mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)} \to \mathfrak{C}^{\infty}_{M,p}$ индуцира $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм

$$(d\varphi)_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m,$$

$$(d\varphi)_p(D_p) := D_p\varphi^*.$$

Преди всичко, да отбележим, че

$$D_p\varphi^* : \mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$D_p\varphi^*(a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)}) = D_pa^p_V(f_{\varphi(V)}\varphi)$$

е диференциране на $\mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)}$ за $\forall D_p \in T_pM$. По-точно, $D_p\varphi^*$ е линеен функционал като композиция на $\mathbb{R}$-линейните изображения φ^* и D_p. Да означим съкратено $\overline{f_{\varphi(V)}} := a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)})$, $\overline{g_{\varphi(W)}} := a^{\varphi(p)}_{\varphi(W)}(g_{\varphi(W)})$ и да пресметнем, че

$$D_p\varphi^*\left(\overline{f_{\varphi(V)}}\overline{g_{\varphi(W)}}\right) = D_p\left(\varphi^*\left(\overline{f_{\varphi(V)}}\right)\varphi^*\left(\overline{g_{\varphi(W)}}\right)\right) =$$

$$D_p\left(\varphi^*\left(\overline{f_{\varphi(V)}}\right)\right)g_{\varphi(W)}\varphi(p) + f_{\varphi(V)}\varphi(p)D_p\left(\varphi^*\left(\overline{g_{\varphi(W)}}\right)\right),$$

за да твърдим, че $D_p\varphi^*$ е диференциране на $\mathfrak{C}^{\infty}_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)}$. Освен това, изображението $(d\varphi)_p$ е $\mathbb{R}$-линейно, доколкото

$$(d\varphi)_p(D_p + \Delta_p) = (D_p + \Delta_p)\varphi^* = D_p\varphi^* + \Delta_p\varphi^* = (d\varphi)_p(D_p) + (d\varphi)_p(\Delta_p)$$

за произволни $D_p, \Delta_p \in T_pM$ и

$$(d\varphi)_p(rD_p) = (rD_p)\varphi^* = r(D_p\varphi^*) = r(d\varphi)_p(D_p)$$

за $\forall r \in \mathbb{R}$. Сега да отбележим, че

$$(d\varphi^{-1})_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow T_pM,$$

$$(d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\delta_{\varphi(p)}) := \delta_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})^*$$

е обратното изображение на $(d\varphi)_p$, защото

$$\left(d\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(d\varphi)_pD_p = \left(d\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}(D_p\varphi^*) = D_p\varphi^*(\varphi^{-1})^* = D_p$$

за $\forall D_p \in T_pM$ и

$$(d\varphi)_p\left(d\varphi^{-1}\right)_{\varphi(p)}\delta_{\varphi(p)} = (d\varphi)_p\delta_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})^* = \delta_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})^*\varphi^* = \delta_{\varphi(p)}$$

за $\forall \delta_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$. С това получаваме следната

ЛЕМА 12.4. *Нека M е гладко многообразие, (U,φ) е локална карта върху M, а p е точка от U. Тогава $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$ индуцира изоморфизъм на $\mathbb{R}$-алгебри*

$$\varphi^* : \mathfrak{C}^\infty_{\mathbb{R}^m,\varphi(p)} \longrightarrow \mathfrak{C}^\infty_{M,p},$$
$$\varphi^*\left(a^{\varphi(p)}_{\varphi(V)}(f_{\varphi(V)})\right) = a^p_V(f_{\varphi(V)}\varphi)$$

върху съответните слоеве на сноповете от гладки функции и $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм

$$(d\varphi)_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$$
$$(d\varphi)_p(D_p) = D_p\varphi^*$$

на допирателните пространства. В частност, ако $\dim M = m$, то във всяка точка $p \in M$ допирателното пространство T_pM е с размерност m.

Върху непресичащото се оебдинение $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ на допирателните пространства T_pM към гладко многообразие M ще въведем структура на гладко многообразие. За целта ще започнем с въвеждане на гладка структура върху $TU := \cup_{p\in U} T_pM$ за произволна локална карта (U,φ) върху M. По-точно, да означим с $(d\varphi)_U$ фамилията от $\mathbb{R}$-линейни изоморфизми $\{(d\varphi)_p\}_{p\in U}$, задаваща взаимно-еднозначно съответствие

$$(d\varphi)_U : TU = \cup_{p\in U} T_pM \longrightarrow \cup_{\varphi(p)\in\varphi(U)} T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m = T\varphi(U).$$

За произволен допирателен вектор $D_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ да напомним, че координатите $\xi_i(D_{\varphi(p)})$ на $D_{\varphi(p)}$ спрямо базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(p)}$, $1 \le i \le m$ на $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m$ са гладки функции на $D_{\varphi(p)}$ и да разгледаме изображението

$$\psi_{\varphi(U)} : T\varphi(U) = \cup_{\varphi(p)\in\varphi(U)} T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m,$$

зададено с формулата

$$\psi_{\varphi(U)}(D_{\varphi(p)}) = (p, \xi_1(D_{\varphi(p)}), \ldots, \xi_m(D_{\varphi(p)})).$$

Изображението $\psi_{\varphi(U)}$ е гладко, взаимно-еднозначно и обратното му изображение

$$\psi^{-1}_{\varphi(U)} : U \times \mathbb{R}^m \longrightarrow T\varphi(U) = \cup_{\varphi(p)\in\varphi(U)} T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m,$$
$$\psi^{-1}_{\varphi(U)}(p, r_1, \ldots, r_m) = \sum_{i=1}^m r_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\varphi(p)}$$

е също гладко. С други думи, $\psi_{\varphi(U)} : T\varphi(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ е дифеоморфизъм Композирайки с локалните координати $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ получаваме дифеоморфизъм

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m})\psi_{\varphi(U)} : T\varphi(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

който задава гладка структура върху $T\varphi(U)$. Да означим

$$\psi_U := \psi_{\varphi(U)}(d\varphi)_U : TU \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m.$$

Чрез взаимно-еднозначното изображение ψ_U определяме топология върху TU, обявявайки за отворени всички подмножества от вида $\psi_U^{-1}(V)$, където V са отворени подмножества на $U \times \mathbb{R}^m$. Аналогично, въвеждаме гладка структура върху TU, разглеждайки

$$(\varphi, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m})\psi_U : TU \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

като глобална координатна карта.

Горните разглеждания доказват, че произволен пълен атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ върху гладко многообразие M задава пълен атлас $(TU_\alpha, (\varphi_\alpha, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m})\psi_{U_\alpha})_{\alpha\in A}$ върху TM, така че $TM := \cup_{p\in M} T_pM$ е гладко многообразие. Естествената проекция $\pi : TM \to M$, $\pi(D_p) = p$ за $\forall D_p \in T_pM$ е гладко изображение върху M, чиито слоеве $\pi^{-1}(p) = T_pM$ са m-мерни линейни пространства над $\mathbb{R}$ за $m = \dim M$.

За всяка точка $p \in M$ съществува координатна околност $U_\alpha \ni p$ и дифеоморфизъм

$$\psi_{U_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) = TU_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m,$$

така че композицията

$$, \ T_pM \xrightarrow{\psi_{U_\alpha}} p \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{R}^m$$

$$\mathrm{pr}_2\psi_{U_\alpha}(D_p) = (\xi_1(D_p\varphi_\alpha^*), \dots, \xi_m(D_p\varphi_\alpha^*))$$

на ограничението на ψ_{U_α} върху T_pM с каноничната проекция

$$\mathrm{pr}_2 : p \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\mathrm{pr}_2(p, r_1, \dots, r_m) = (r_1, \dots, r_m)$$

е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм.
За да формулираме направените по-горе наблюдения трябва да дадем следното

Определение 12.5. *Гладко векторно разслоение V от ранг r е гладко многообразие V с гладка проекция $\pi : V \to M$ върху гладко многообразие M, така че слоят $V_x := \pi^{-1}(x)$ над произволна точка $x \in M$ е линейно пространство над $\mathbb{R}$ с размерност r и всяка точка $x \in M$ има околност U_x върху M с тривиализиращ дифеоморфизъм*

$$\psi_{U_x} : \pi^{-1}(U_x) \longrightarrow U_x \times \mathbb{R}^r,$$

чието ограничение върху слоя V_x, композирано с проекцията $\mathrm{pr}_2 : x \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм

$$\mathrm{pr}_2 \circ \psi_{U_x} : \pi^{-1}(x) \longrightarrow x \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r.$$

Двойката (U_x, ψ_{U_x}) се нарича локална тривиализация на $\pi : V \to X$ около $x \in X$, V се нарича пространство на разслоението, а M е база на разслоението.

Систематизирайки горните разглеждания получаваме следното

Следствие 12.6. *Непресичащото се обединение $TM = \cup_{p\in M} T_pM$ на допирателните пространства към гладко m-мерно многообразие M е гладко векторно разслоение от ранг m относно топологията и гладката структура, индуцирани от произволен пълен атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ върху M.*

2. Диференциални форми върху гладко многообразие. Кохомологии на де Рам.

Ако M е гладко многообразие с допирателно разслоение $TM = \cup_{p\in M} T_pM$, то векторното разслоение $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$, чиито слоеве са пространствата T_p^*M на $\mathbb{R}$-линейните функционали върху T_pM се нарича ко-допирателно разслоение. Да означим с $\wedge^k T^*M$ векторните разслоения над M, чиито слоеве над $p \in M$ са външните степени $\wedge^k T_p^*M$ на съответните ко-допирателни пространства T_p^*M в тези точки. За удобство да положим $\wedge^0 T^*M = \mathfrak{C}^\infty$ да бъде снопът на гладките функции върху M.

Определение 12.7. *Нека $\pi : V \to M$ е гладко векторно разслоение над гладко многообразие M, а U е отворено подмножество на M. Гладките изображения $\sigma : U \to V$ с $\pi\sigma = \mathrm{Id}_U$ се наричат гладки сечения на V над U.*
Гладките сечения на допирателното разслоение TM на гладко многообразие M се наричат гладки векторни полета върху M.

Лема 12.8. *Гладките сечения на гладко векторно разслоение $\pi : V \to M$ образуват пълен предсноп върху M.*

Доказателство: За произволни гладки сечения $\sigma : U \to V$ и $\tau : U \to V$ на V над отворено подмножество $U \subseteq M$, определяме поточково събиране $\sigma+\tau : U \to V$, $(\sigma+\tau)(p) := \sigma(p)+\tau(p)$ и умножение $r\sigma : U \to V$, $(r\sigma)(p) := r\sigma(p)$ с реално число $r \in \mathbb{R}$. По този начин, множеството $\mathfrak{C}^\infty(U)$ на гладките сечения $U \to V$ образува линейно пространство над $\mathbb{R}$. Заедно с хомоморфизмите на ограничение $\rho_{WU} : \mathfrak{C}^\infty(U) \to \mathfrak{C}^\infty(W)$, тези $\mathbb{R}$-модули образуват предсноп $\{\mathfrak{C}^\infty(U), \rho_{WU}\}$ над M. За произволни отворени подмножества $U_\alpha \subseteq M$ с $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = U$ и $\sigma, \tau \in \mathfrak{C}^\infty(U)$ с $\rho_{U_\alpha,U}(\sigma) = \rho_{U_\alpha,U}(\tau)$ за $\forall \alpha \in A$ следва $\sigma = \tau$ съгласно $\sigma(p) = \rho_{U_\alpha,U}(\sigma)(p) = \rho_{U_\alpha,U}(\tau)(p) = \tau(p)$ за произволна точка $p \in U$ и произволно отворено множество U_α, съдържащо p. От друга страна, всяка фамилия $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in A}$ от гладки сечения $\sigma_\alpha : U_\alpha \to V$, които са съгласувани помежду си, $\rho_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\alpha}(\sigma_\alpha) = \rho_{U_\alpha\cap U_\beta,U_\beta}(\sigma_\beta)$ за $\forall \alpha,\beta \in A$ съществува сечение $\sigma : U = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha \to V$, определено с формулата $\sigma(p) := \sigma_\alpha(p)$ за $\forall p \in U$ и някакво $\alpha = \alpha(p) \in A$ с $U_\alpha \ni p$. Коректността на σ следва от $\sigma_\alpha(p) = \sigma_\beta(p)$ за $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Равенствата $\pi\sigma_\alpha = \mathrm{Id}_{U_\alpha}$ за проекцията $\pi : V \to M$ дават $\pi\sigma = \mathrm{Id}_U$. Доколкото гладкостта е локално свойство, гладките сечения $\sigma_\alpha : U_\alpha \to V$ индуцират гладко сечение $\sigma : U \to V$. С това проверихме условията от Определение 8.16 за пълен предсноп, Q.E.D.

Определение 12.9. *Пълният предсноп $\{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\}$ на гладките сечения $U \to \wedge^k T^*M$ се нарича предсноп на гладките диференциални k-форми върху M.*

Твърдение 12.10. *Върху всяко отворено подмножество U на гладко многообразие M съществуват $\mathbb{R}$-линейни изображения*

$$d_U^k : \mathfrak{A}^k(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(U),$$

наречени външни диференциали, така че

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(U) \xrightarrow{d_U^0} \mathfrak{A}^1(U) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d_U^{k-1}} \mathfrak{A}^k(U) \xrightarrow{d_U^k} \mathfrak{A}^{k+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

са ко-верижни комплекси от $\mathbb{R}$-линейни пространства, точни в $\mathfrak{A}^0(U)$. Още повече,

$$\{d_U^k\} : \{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\} \longrightarrow \{\mathfrak{A}^{k+1}(U), \rho_{WU}\}$$

са хомоморфизми на предснопове, които индуцират ко-верижен комплекс

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathfrak{A}^1 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}} \mathfrak{A}^k \xrightarrow{d^k} \mathfrak{A}^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

от асоциираните снопове, който е точен в $\mathfrak{A}^0$.

Доказателство: Ще започнем с определянето на $d_U^k : \mathfrak{A}^k(U) \to \mathfrak{A}^{k+1}(U)$ върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^m$. За целта да означим с $(dx_i)_p \in T_p^*\mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq m$ дуалния базис на $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^m$ и да разгледаме гладките сечения

$$dx_i : U \longrightarrow T^*U = \cup_{p\in U} T_p^*\mathbb{R}^m,$$

$$dx_i(p) := (dx_i)_p \quad \text{за } \forall p \in U$$

на ко-допирателното разслоение $T^*\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$ над $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Тогава $\mathfrak{A}^1(U)$ е свободен $\mathfrak{C}^\infty(U)$-модул с базис $\{dx_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$. За произволно естествено k елементите $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \mathfrak{A}^k(U)$ с $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ образуват $\mathfrak{C}^\infty(U)$-базис на $\mathfrak{A}^k(U)$. Определяме

$$d_U^0 : \mathfrak{A}^0(U) = \mathfrak{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^1(U)$$

по правилото

$$d_U^0(f) := \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

за произволна гладка функция $f : U \to \mathbb{R}$. За $k \in \mathbb{N}$ полагаме

$$d_U^k : \mathfrak{A}^k(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(U),$$

$$d_U^k \left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) := \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

при $f_{i_1\ldots i_k} \in \mathfrak{C}^\infty(U)$. Така зададените $d_U^k : \mathfrak{A}^k(U) \to \mathfrak{A}^{k+1}(U)$, $k \geq 0$ са $\mathbb{R}$-линейни изображения със свойството

$$d_U^{k+1} d_U^k \left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) =$$

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

доколкото $\frac{\partial^2 f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x_j \partial x_l}$ и $dx_l \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_l$. По този начин, за всяко отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^m$ получаваме ко-верижен комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(U) \xrightarrow{d_U^0} \mathfrak{A}^1(U) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d_U^{k-1}} \mathfrak{A}^k(U) \xrightarrow{d_U^k} \mathfrak{A}^{k+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

от линейни пространства над $\mathbb{R}$. Съгласно локалния характер на външния диференциал върху $\mathbb{R}^m$, $\{d_U^k\} : \{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\} \to \{\mathfrak{A}^{k+1}(U), \rho_{WU}\}$ образуват хомоморфизми на предснопове.

Произволно отворено подмножество $U \subseteq M$ на гладко многообразие M може да се покрие с отворени подмножества $U_\alpha \subseteq U$, върху които са определени координатни хомеоморфизми $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$. Линейните изоморфизми $(d\varphi_\alpha)_p : T_pM \to T_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m$, $p \in U_\alpha$ от Лема 12.4 сглобяват локален дифеоморфизъм

$$d\varphi_\alpha : \cup_{p\in U_\alpha} T_pM \longrightarrow \cup_{p\in U_\alpha} T_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m,$$

съгласно наличието на локални тривиализации $\cup_{p\in U_\alpha} T_pM \to U_\alpha \times \mathbb{R}^m$, както и $\cup_{p\in U_\alpha} T_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ и дифеоморфизъм $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$, след евентуално свиване на U_α. Тези $d\varphi_\alpha$ индуцират дифеоморфизми

$$d\varphi_\alpha^* : \cup_{p\in U_\alpha} T^*_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow \cup_{p\in U_\alpha} T_p^*M,$$

а оттам и

$$d\varphi_\alpha^* : \cup_{p\in U_\alpha} \wedge^k T^*_{\varphi_\alpha(p)}\mathbb{R}^m \longrightarrow \cup_{p\in U_\alpha} \wedge^k T_p^*M$$

за $\forall k \in \mathbb{N}$. В резултат получаваме $\mathbb{R}$-линейни изоморфизми $d\varphi_\alpha^* : \mathfrak{A}^k(U_\alpha) \to \mathfrak{A}^k(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ и определяме

$$d_{U_\alpha}^k : \mathfrak{A}^k(U_\alpha) \longrightarrow \mathfrak{A}^{k+1}(U_\alpha),$$

$$d_{U_\alpha}^k := (d\varphi_\alpha^*)\, d_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}^k\, (d\varphi_\alpha^*)^{-1}$$

по протежение на диаграмата

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}^k(\varphi_\alpha(U_\alpha)) \arrow[r, "d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}"] \arrow[d, "d\varphi_\alpha^*"'] & \mathfrak{A}^{k+1}(\varphi_\alpha(U_\alpha)) \arrow[d, "d\varphi_\alpha^*"'] \\ \mathfrak{A}^k(U_\alpha) \arrow[r, "d^k_{U_\alpha}"] & \mathfrak{A}^{k+1}(U_\alpha) \end{tikzcd} .$$

Непосредствено се проверява, че

$$d^{k+1}_{U_\alpha} d^k_{U_\alpha} = (d\varphi^*_\alpha)\, d^{k+1}_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}\, (d\varphi^*_\alpha)^{-1}\, (d\varphi^*_\alpha)\, d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}\, (d\varphi^*_\alpha)^{-1} =$$
$$(d\varphi^*_\alpha)\, d^{k+1}_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}\, (d\varphi^*_\alpha)^{-1} = 0$$

и $d^k_{U_\alpha}$ комутират с хомоморфизмите на ограничение, доколкото $d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}$ имат това свойство. Следователно

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha} d^k_{U_\alpha} \left(\rho_{U_\alpha, U}(\omega^k)\right) = d^k_{U_\alpha} \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U}(\omega^k) = (d\varphi^*_\alpha)\, d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}\, (d\varphi^*_\alpha)^{-1}\, \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U}(\omega) =$$
$$\left(d\varphi^*_\beta\right) d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})^* d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} [d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})^*]^{-1} \left(d\varphi^*_\beta\right)^{-1} \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U}(\omega^k) =$$
$$\left(d\varphi^*_\beta\right) d^k_{\varphi_\beta(U_\beta)} \left(d\varphi^*_\beta\right)^{-1} \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U}(\omega) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta} d^k_{U_\beta} \left(\rho_{U_\beta, U}(\omega)\right)$$

съгласно $d\varphi^*_\alpha = d\varphi^*_\beta d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})^*$ и комутативността на диаграмата

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{A}^k(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) & \xrightarrow{d^k_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}} & \mathfrak{A}^{k+1}(\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})^*} & & \Big\downarrow {\scriptstyle d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})^*} \\
\mathfrak{A}^k(\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)) & \xrightarrow{d^k_{\varphi_\beta(U_\beta)}} & \mathfrak{A}^{k+1}(\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta))
\end{array} .$$

Използвайки пълнотата на предсноповете на гладките диференциални форми, получаваме $\mathbb{R}$-линейни изображения $d^k_U : \mathfrak{A}^k(U) \to \mathfrak{A}^{k+1}(U)$ върху всички отворени подмножества $U \subseteq M$. Още повече, d^k_U комутират с хомоморфизмите на ограничение и образуват хомоморфизми на предсноппове $\{d^k_U\} : \{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\} \to \{\mathfrak{A}^{k+1}(U), \rho_{WU}\}$ върху M, които се ограничават до ко-верижни комплекси

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(U) \xrightarrow{d^0_U} \mathfrak{A}^1(U) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}_U} \mathfrak{A}^k(U) \xrightarrow{d^k_U} \mathfrak{A}^{k+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

върху всички отворени подмножества $U \subseteq M$. Ако $\mathfrak{A}^k$ са асоциираните снопове на $\{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\}$, то съгласно Твърдение 8.13 (ii), $\{d^k_U\}_{U \subseteq M}$ индуцират хомоморфизми на снопове

$$d^k : \mathfrak{A}^k \longrightarrow \mathfrak{A}^{k+1},$$
$$d^k(a^x_{U,k}(\omega^k_U)) := a^x_{U,k+1}(d^k_U(\omega^k_U))$$

за $\omega^k_U \in \mathfrak{A}^k(U)$ и хомоморфизмите на директните граници $a^x_{U,k} : \mathfrak{A}^k(U) \to \mathfrak{A}^k_x$ при $x \in U$. Доколкото $d^{k+1} d^k(a^x_{U,k}(\omega^k_U)) = d^{k+1} a^x_{U,k+1}(d^k_U(\omega^k_U)) = a^x_{U,k+2} d^{k+1}_U d^k_U(\omega^k_U) = a^x_{U,k+2}(0) = 0$, така получените d^k образуват ко-верижен комплекс от снопове на $\mathbb{R}$-линейни пространства

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathfrak{A}^1 \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}} \mathfrak{A}^{k-1} \xrightarrow{d^k} \mathfrak{A}^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \cdots$$

над гладкото многообразие M, Q.E.D.

Определение 12.11. *Нека M е гладко свързано многообразие, а $\{\mathfrak{A}^k(U), \rho_{WU}\}$ са предсноповете на гладките диференциални k-форми върху M за $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Кохомологиите на ко-верижния комплекс*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(M) \xrightarrow{d^0_M} \mathfrak{A}^1(M) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}_M} \mathfrak{A}^k(M) \xrightarrow{d^k_M} \mathfrak{A}^{k+1}(M) \xrightarrow{d^{k+1}_M} \cdots$$

се наричат кохомологии на де Рам на M и се бележат с $H^k_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{R})$. По-точно:

$$H^0_{DR}(M,\mathbb{R}) := Ker(d^0_M) = \mathbb{R},$$
$$H^k_{DR}(M,\mathbb{R}) := Ker(d^k_M)/Im(d^{k-1}_M) \quad \text{за } \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Лема на Поанкаре

В настоящия параграф ще установим точността на ко-верижния комплекс от снопове

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0 \xrightarrow{d^0} \mathfrak{A}^1 \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}} \mathfrak{A}^k \xrightarrow{d^k} \mathfrak{A}^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} \cdots$$

във всяко $\mathfrak{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$. За целта ще използваме следната

Лема 12.12. (Лема на Поанкаре) *Ако*

$$U := \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < 1 \right\}$$

е отворено единично кълбо в $\mathbb{R}^m$, а $\mathfrak{A}^k(U)$ са гладките диференциални k-форми върху U, то съществуват ко-верижни контракции

$$c^k : \mathfrak{A}^k(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{k-1}(U)$$

на идентитета на ко-верижния комплекс $\mathfrak{A}^\bullet(U)$, така че редицата

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(U) \xrightarrow{d^0_U} \mathfrak{A}^1(U) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d^{k-1}_U} \mathfrak{A}^k(U) \xrightarrow{d^k_U} \mathfrak{A}^{k+1}(U) \longrightarrow \cdots$$

е точна в $\mathfrak{A}^k(U)$ за $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказателство: Вътрешното диференциране с гладко векторно поле $X = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ върху U се определя като $\mathbb{R}$-линейното изображение

$$i_X : \mathfrak{A}^k(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^{k-1}(U),$$
$$i_X \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) :=$$
$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} f_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s}(X) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

където $dx_{i_s}(X) = \xi_{i_s}(x)$ е стойността на $dx_{i_s} \in T^*U$ върху X. Да фиксираме гладкото векторно поле

$$X_o := \sum_{i=1}^m x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

върху U. Да разгледаме също еднозначно определените линейни изображения

$$L^k : \mathfrak{A}^k(U) \longrightarrow \mathfrak{A}^k(U),$$

трансформиращи $\mathbb{R}$-базиса $\{f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k} \mid f_{i_1 \ldots i_k} \in \mathfrak{C}^\infty(U), 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m\}$ на $\mathfrak{A}^k(U)$ в

$$L^k \left(f_{i_1 \ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) := \left[\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1 \ldots i_k}(tx) dt \right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Твърдим, че $\{L^k\} : \mathfrak{A}^\bullet(U) \to \mathfrak{A}^\bullet(U)$ е морфизъм на ко-верижния комплекси от $\mathbb{R}$-линейни пространства

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{A}^0(U) \xrightarrow{d_U^0} \mathfrak{A}^1(U) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{d_U^{k-1}} \mathfrak{A}^k(U) \xrightarrow{d_U^k} \mathfrak{A}^{k+1}(U) \xrightarrow{d_U^{k+1}} \cdots .$$

С други думи, диаграмите

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}^k(U) \arrow[r, "d_U^k"] \arrow[d, "L^k"'] & \mathfrak{A}^{k+1}(U) \arrow[d, "L^{k+1}"'] \\ \mathfrak{A}^k(U) \arrow[r, "d_U^k"] & \mathfrak{A}^{k+1}(U) \end{tikzcd}$$

са комутативни за всяко $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Съгласно $\mathbb{R}$-линейността на диференциала d_U^k, за целта е достатъчно да проверим, че

$$L^{k+1} d_U^k \left(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) = L^{k+1} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) =$$
$$\left[\int_0^1 t^k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) dt \right] dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$
$$d \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = d_U^k L^k \left(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right).$$

От друга страна,
$$L^k \left(i_{X_o} d_U^k + d_U^{k-1} i_{X_o} \right) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{A}^k(U)}$$
от $\mathbb{R}$-линейността на участващите в това тъждество изображения и
$$L^k \left(i_{X_o} d_U^k + d_U^{k-1} i_{X_o} \right) \left(f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) =$$
$$L^k \left[i_{X_o} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) + d_U^{k-1} \left(f i_{X_o} (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \right) \right] =$$
$$L^k \left[\sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) - \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge i_{X_o}(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) + \right.$$
$$\left. \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge i_{X_o}(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) + f d_U^{k-1} i_{X_o}(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \right] =$$
$$L^k \left[\left(\sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \right.$$
$$\left. f d_U^{k-1} \left(\sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} x_{i_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) \right] =$$
$$L^k \left[\left(\sum_{j=1}^m x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \right.$$
$$\left. f \left(\sum_{s=1}^k (-1)^{s-1} dx_{i_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) \right] =$$

$$L^k\left[\left(kf+\sum_{j=1}^m x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\right]=$$
$$\left\{\int_0^1 t^{k-1}\left[kf(tx)+\sum_{j=1}^m tx_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\right]dt\right\}dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_{i_k}=$$
$$\left[\int_0^1\frac{d}{dt}\left(t^kf(tx)\right)dt\right]dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}=f(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}.$$

В резултат получаваме, че

$$\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}^k(U)}=L^ki_{X_o}d_U^k+L^kd_U^{k-1}i_{X_o}=(L^ki_{X_o})d_U^k+d_U^{k-1}(L^{k-1}i_{X_o}),$$

което означава, че

$$c^k:=L^{k-1}i_{X_o}:\mathfrak{A}^k(U)\longrightarrow\mathfrak{A}^{k-1}(U)$$

са ко-верижни контракции на $\mathrm{Id}_{\mathfrak{A}^k(U)}$, Q.E.D.

Следствие 12.13. *Сноповете $\mathfrak{A}^k$ на гладките диференциални k-форми над паракомпактно гладко многообразие M образуват тънка резолвента*

$$0\longrightarrow M\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathfrak{A}^0\xrightarrow{d^0}\mathfrak{A}^1\longrightarrow\cdots$$
$$\cdots\xrightarrow{d^{k-1}}\mathfrak{A}^k\xrightarrow{d^k}\mathfrak{A}^{k+1}\xrightarrow{d^{k+1}}\cdots$$

на постоянния сноп $M\times\mathbb{R}$.

Доказателство: Достатъчно е да установим, че сноповете $\mathfrak{A}^k$ са тънки, след което да приложим Лемата на Поанкаре и Лема 11.8. Нека $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ е локално крайно покритие на M с компактни затворени обвивки $\overline{U_\alpha}$, а $(\psi_\alpha)_{\alpha\in A}$ е разбиване на единицата върху M, съгласувано с покритието $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. За $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\forall\alpha\in A$ изображението

$$\eta_\alpha^k:\mathfrak{A}^k\longrightarrow\mathfrak{A}^k,$$
$$\eta_\alpha^k(a_U^x(\omega_U^k)):=a_U^x(\psi_\alpha(\omega_U^k))$$

е хомоморфизъм на снопове с носител $\mathrm{Supp}(\eta_\alpha^k)\subseteq\pi_k^{-1}(U_\alpha)$, където $\pi_k:\mathfrak{A}^k\to M$ е проекцията на $\mathfrak{A}^k$. Освен това,

$$\left(\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha^k\right)(a_U^x(\omega_U^k))=\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha^k(a_U^x(\omega_U^k))=$$
$$\sum_{\alpha\in A}a_U^x(\psi_\alpha(\omega_U^k))=a_U^x\left(\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha(\omega_U^k)\right)=a_U^x\left(\left(\sum_{\alpha\in A}\psi_\alpha\right)\omega_U^k\right)=a_U^x(\omega_U^k),$$

така че $\left(\eta_\alpha^k\right)_{\alpha\in A}$ са разбивания на единицата върху $\mathfrak{A}^k$, съгласувани с покритието $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. По определение, това означава, че сноповете $\mathfrak{A}^k$ са тънки за $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, Q.E.D.