Лекция 11

Гладка сингулярна резолвента на постоянния сноп

Да напомним, че върху всяко гладко многообразие M постоянният сноп $M \times \mathbb{R}$ се включва в коверижния комплекс

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{S}^0_\infty \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathfrak{S}^n_\infty \xrightarrow{d^n} \mathfrak{S}^{n+1}_\infty \longrightarrow \cdots, \tag{11.1}$$

съставен от сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$ на гладките сингулярни n-ковериги върху M. По определение, този комплекс е точен в $\mathfrak{S}^0_\infty$. В настоящия въпрос ще установим точността на гореспоменатия ко-верижен комплекс във всяко $\mathfrak{S}^n_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 11.1. *Резолвента на снопа $\mathfrak{S}$ над топологично пространство X е ко-верижен комплекс от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{S}^n \longrightarrow \mathfrak{S}^{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

който е точен във всяко $\mathfrak{S}^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Ако X е паракомпактно топологично пространство и $\mathfrak{S}^n$ са меки (тънки) снопове за $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то резолвентата $0 \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^\bullet$ се нарича мека (тънка).

Ако (11.1) е резолвента на $M \times \mathbb{R}$ и M е паракомпактно многообразие, то съгласно Следствие 10.26, гореспоменатата редица е мека резолвента на $M \times \mathbb{R}$. Точността на (11.1) в $\mathfrak{S}^n_\infty$ за произволно естествено n ще бъде изведена от анулирането на сингулярните хомологии $H_n(U, \mathbb{R}) = 0$ на подходящи подмножества $U \subset \mathbb{R}^m$.

1. Верижни контракции на локални сингулярни вериги

Определение 11.2. *Морфизмът на верижни комплекси*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & Q_n \arrow[r, "\delta_n"] & Q_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

се нарича верижно хомотопен на нула, ако съществуват хомоморфизми

$$c_n : P_n \longrightarrow Q_{n+1},$$

наречени верижни контракции, така че

$$f_n = \delta_{n+1} c_n + c_{n-1} d_n \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ако морфизмът $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ е верижно хомотопен на нула, то индуцираните хомоморфизми на хомологиите

$$H(f_n) : H_n(P_\bullet) \longrightarrow H_n(Q_\bullet),$$

$$H(f_n)(p_n + B_n(P_\bullet)) = f_n(p_n) + B_n(Q_\bullet) = \delta_{n+1}c_n(p_n) + c_{n-1}d_n(p_n) + B_n(Q_\bullet) =$$
$$\delta_{n+1}c_n(p_n) + B_n(Q_\bullet) = B_n(Q_\bullet)$$

са тъждествено нулеви съгласно $p_n \in Z_n(P_\bullet) =: Ker(d_n)$ и $B_n(Q_\bullet) := Im(\delta_{n+1})$. В частност, ако тъждественият морфизъм $\mathrm{Id} : P_\bullet \to P_\bullet$ е верижно хомотопен на нула, то $H_n(P_\bullet) = 0$. Преди да приложим това наблюдение трябва да дадем следните определения:

Определение 11.3. *Подмножеството $U \subset \mathbb{R}^m$ се нарича ограничено, ако съществува отворено кълбо*

$$B^m(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^{m}(y_i - x_i)^2 < r^2\},$$

което съдържа U.
Подмножеството $U \subseteq \mathbb{R}^m$ е изпъкнало, ако заедно с произволни свои точки $p_0, p_1, \dots, p_k \in U$ съдържа всички техни изпъкнали комбинации $\sum_{i=1}^k t_i p_i$ с $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k t_i = 1$.

Лема 11.4. *Подмножеството $U \subseteq \mathbb{R}^m$ е изпъкнало тогава и само тогава, когато заедно с произволни свои точки $p, q \in U$ съдържа цялата отсечка*

$$\{tp + (1-t)q \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$$

с краища p, q.

Доказателство: С индукция по k ще докажем, че ако U съдържа точките $p_0, p_1, \dots, p_k$ и заедно с произволни свои точки съдържа отсечката, определена от тях, то U съдържа цялата изпъкнала обвивка на $p_0, p_1, \dots, p_k$. Наистина, за произволни $t_i \in \mathbb{R}$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^k t_i = 1$ с $t_0 \neq 1$, точката

$$\sum_{i=0}^{k} t_i p_i = t_0 p_0 + (1-t_0)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{1-t_0} p_i\right)$$

принадлежи на U, доколкото $p_0 \in U$ и $\sum_{i=1}^k \frac{t_i}{1-t_0} p_i \in U$ по индукционно предположение като изпъкнала линейна комбинация на $p_1, \dots, p_k$. В случая $t_0 = 1$ от $t_i \geq 0$ следва $t_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq k$ и $p_0 \in U$, Q.E.D.

Определение 11.5. *За произволно подмножество $S \subset \mathbb{R}^m$ и точка $p \in \mathbb{R}^m \backslash S$, конусът $C_p(S)$ с основа S и връх p е обединението*

$$C_p(S) := \{p + t(s-p) = (1-t)p + ts \,|\, t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

на отсечките, свързващи p с точка $s \in S$.

Непосредствено се вижда, че произволен $(n+1)$-симплекс

$$\Delta = [p_0, p_1, \dots, p_{n+1}] := \left\{\sum_{i=0}^{n+1} t_i p_i \,\middle|\, t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n+1} t_i = 1\right\}$$

е конус с връх p_i над n-симплекса $\Delta_{\widehat{i}} := [p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{n+1}]$ за $\forall 0 \leq i \leq n+1$. По-точно, симплексът Δ се пердставя като обединение

$$\left\{\left(1 - \sum_{j\neq i} t_j\right) p_i + \left(\sum_{j\neq i} t_j\right) \sum_{j\neq i} \frac{t_j}{\sum_{k\neq i} t_k} p_j \,\middle|\, t_j \in \mathbb{R}, t_j \geq 0, 0 < \sum_{j\neq i} t_j \leq 1\right\} \cup \{p_i\},$$

което, от своя страна, съвпада с конуса $C_{p_i}(\Delta_{\widehat{i}})$, доколкото $\sum_{j\neq i} \frac{t_j}{\sum_{k\neq i} t_k} p_j \in \Delta_{\widehat{i}}$. За произволни афинно независими точки $p, p_0, p_1, \dots, p_n$ и произволен сингулярен n-симплекс $\sigma : [p_0, p_1, \dots, p_n] \to U$ в изпъкнало подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^m$, конусът $C_q(\sigma)$ с основа σ и връх $q \in U$ е изображението

$$C_q(\sigma) : [p, p_0, p_1, \ldots, p_n] \longrightarrow U,$$

определено по правилото

$$C_q(\sigma)\left(tp + \sum_{i=0}^{n} t_i p_i\right) := \begin{cases} q & \text{за} \quad t = 1 \\ tq + (1-t)\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{1-t} p_i\right) & \text{за} \quad t \neq 1 \end{cases}$$

при $t, t_i \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} t_i + t = 1$. Тук $\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{1-t} p_i \in [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ съгласно $t_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{1-t} = \frac{1-t}{1-t} = 1$. Освен това, $tq + (1-t)\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{1-t} p_i\right) \in U$ благодарение на $q \in U$, $\sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{1-t} p_i\right) \in U$ и изпъкналостта на U. Изображението $C_q(\sigma)$ е непрекъснато, защото за достатъчно малки $t_i \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ точката $(1 - \sum_{i=0}^{n} t_i)\, q + (\sum_{i=0}^{n} t_i)\, \sigma\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{t_i}{\sum_{j=0}^{n} t_j} p_i\right)$ клони към q, доколкото $\sum_{i=0}^{n} t_i$ клони към 0. По този начин, за всяко изпъкнало подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^m$ и произволна точка $q \in U$ получаваме изображение на сингулярните n-симплекси върху U в сингулярните $(n+1)$-симплекси върху U. По определение, $S_n(U, \mathbb{R})$ е $\mathbb{R}$-линейното пространство с базис сингулярните n-симплекси върху U, така че съществува еднозначно определено $\mathbb{R}$-линейно продължение

$$c_n : S_n(U, \mathbb{R}) \longrightarrow S_{n+1}(U, \mathbb{R}),$$

$$c_n\left(\sum_j r_j \sigma_j\right) := \sum_j r_j C_q(\sigma_j) \quad \text{за } r_j \in \mathbb{R},$$

което ще наричаме изображение на сингулярните конуси. Да отбележим, че върху произволно отворено $U \subseteq \mathbb{R}^m$, c_n се ограничава до линейно изображение $c_n : S_n^\infty(U, \mathbb{R}) \to S_{n+1}^\infty(U, \mathbb{R})$ на гладките сингулярни вериги.

Твърдение 11.6. *Нека $U \subset \mathbb{R}^m$ е ограничено и изпъкнало подмножество, а q е точка от U. Тогава за всяко естествено число n изображението на сингулярните конуси*

$$c_n : S_n(U, \mathbb{R}) \longrightarrow S_{n+1}(U, \mathbb{R}),$$

$$c_n\left(\sum_j r_j \sigma_j\right) := \sum_j r_j C_q(\sigma_j)$$

е верижна контракция на $\mathrm{Id} : S_n(U, \mathbb{R}) \to S_n(U, \mathbb{R})$, *така че* $H_n(U, \mathbb{R}) = 0$. *Ограничението $c_n : S_n^\infty(U, \mathbb{R}) \to S_{n+1}^\infty(U, \mathbb{R})$ е верижна контракция на* $\mathrm{Id} : S_n^\infty(U, \mathbb{R}) \to S_n^\infty(U, \mathbb{R})$, *откъдето следва анулиране $H_n^\infty(U, \mathbb{R}) = 0$ на гладките сингулярни хомологии.*

Доказателство: Да напомним действието на граничния оператор

$$\partial_n : S_n(U, \mathbb{R}) \longrightarrow S_{n-1}(U, \mathbb{R})$$

върху сингулярен n-симплекс $\sigma : [p_0, p_1, \ldots, p_n] \to U$. То се задава с формулата $\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \varepsilon_i^n$, където $\varepsilon_i^n : [p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}] \to [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ са влаганията на стандартния $(n-1)$-симплекс $[p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}]$ като i-та стена в $[p_0, p_1, \ldots, p_n]$, т.е. ε_i^n са еднозначно определените афинни продължения на съответствията $\varepsilon_i^n(p_j) := p_j$ за $\forall j < i$ и $\varepsilon_i^n(p_j) := p_{j+1}$ за $\forall j \geq i$. Трябва да проверим, че

$$\mathrm{Id}_{S_n(U, \mathbb{R})} = \partial_{n+1} c_n + c_{n-1} \partial_n \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доколкото $S_n(U,\mathbb{R})$ са свободни $\mathbb{R}$-модули (т.е. линейни пространства над $\mathbb{R}$) и всички разглеждани изображения са $\mathbb{R}$-линейни, достатъчно е да установим равенството

$$\partial_{n+1}c_n(\sigma) = \partial_{n+1}C_q(\sigma) = \sigma - c_{n-1}\partial_n(\sigma)$$

за произволен сингулярен n-симплекс $\sigma : [p_0, p_1, \dots, p_n] \to U$. Пресмятаме непосредствено, че нулевата стена

$$C_q(\sigma)\varepsilon_0^{n+1}\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) = C_q(\sigma)\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) = \sigma\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right)$$

на конуса $C_q(\sigma)$ съвпада със σ. За всяко $1 \leq i \leq n+1$ имаме

$$C_q(\sigma)\varepsilon_i^{n+1}\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) = C_q(\sigma)\left(t_0p + \sum_{j=0}^{i-2} t_{j+1}p_j + \sum_{j=i}^n t_jp_j\right)$$

с $C_q(\sigma)\varepsilon_i^{n+1}(p_0) = q$ и

$$C_q(\sigma)\varepsilon_i^{n+1}\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) = t_0q + (1-t_0)\sigma\left(\sum_{j=0}^{i-2}\frac{t_{j+1}}{1-t_0}p_j + \sum_{j=i}^n \frac{t_j}{1-t_0}p_j\right) =$$

$$t_0q + (1-t_0)\sigma\varepsilon_{i-1}^n\left(\sum_{j=1}^n \frac{t_j}{1-t_0}p_j\right) = C_q\left(\sigma\varepsilon_{i-1}^n\right)\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right) = c_{n-1}\left(\sigma\varepsilon_{i-1}^n\right)\left(\sum_{i=0}^n t_ip_i\right).$$

По този начин получаваме $c_n(\sigma)\varepsilon_0^{n+1} = \sigma$ и $c_n(\sigma)\varepsilon_i^{n+1} = c_{n-1}\left(\sigma\varepsilon_{i-1}^n\right)$ за $\forall 1 \leq i \leq n+1$, така че

$$\partial_{n+1}c_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i c_n(\sigma)\varepsilon_i^{n+1} = \sigma + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i c_{n-1}\left(\sigma\varepsilon_{i-1}^n\right) =$$

$$\sigma - \sum_{j=0}^n (-1)^j c_{n-1}\left(\sigma\varepsilon_j^n\right) = \sigma - c_{n-1}\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j\sigma\varepsilon_j^n\right) = \sigma - c_{n-1}\partial_n(\sigma), \qquad \text{Q.E.D.}$$

2. Точност на ко-верижния комплекс на гладките сингулярни снопове

Следствие 11.7. *Всяко ограничено и изпъкнало подмножество $U \subset \mathbb{R}^m$ има нулеви гладки сингулярни кохомологии*

$$H^n_\infty(U,\mathbb{R}) = 0 \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказателство: Съгласно Твърдение 11.6, U има нулеви гладки сингулярни хомологии $H_n^\infty(U,\mathbb{R}) = 0$ при $\forall n \in \mathbb{N}$. За произволен гладък сингулярен ко-цикъл $\varphi^n \in Z^n(S^\bullet_\infty(U,\mathbb{R}))$ твърдим съществуването на гладка ко-верига $\psi^{n-1} \in S^{n-1}_\infty(U,\mathbb{R})$, така че $d^{n-1}\left(\psi^{n-1}\right) = \psi^{n-1}\partial_n = \varphi^n$. Съгласно описанието на верижните комплекси от линейни пространства, дадено в Твърдение 3.8 (ii), гладките сингулярни $(n-1)$-вериги върху U се разлагат в директна сума

$$S^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R}) = B^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R})\coprod H^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R})\coprod B^\infty_{n-2}(U,\mathbb{R}) = B^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R})\coprod B^\infty_{n-2}(U,\mathbb{R}).$$

Върху гладките сингулярни ко-граници $B^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R}) = Im(\partial_n)$ определяме

$$\psi^{n-1} : B^\infty_{n-1}(U,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi^{n-1}\left(\partial_n\xi_n\right) := \varphi^n(\xi_n) \quad \text{за } \xi_n \in S_n^\infty(U,\mathbb{R}).$$

Ако $\partial_n\xi_n = \partial_n\xi'_n$, то $\xi'_n - \xi_n \in Ker(\partial_n) = Im(\partial_{n+1})$ съгласно $H_n^\infty(U,\mathbb{R}) = 0$, така че $\xi'_n - \xi_n = \partial_{n+1}\eta_{n+1}$ за подходящо $\eta_{n+1} \in S^\infty_{n+1}(U,\mathbb{R})$ и $\varphi^n(\xi'_n) = \varphi^n(\xi_n + \partial_{n+1}\eta_{n+1}) = \varphi^n(\xi_n) + \varphi^n\partial_{n+1}\eta_{n+1} = \varphi^n(\xi_n) + d^n(\varphi^n)(\eta_{n+1}) = \varphi^n(\xi_n)$, вземайки

предвид, че $d^n(\varphi^n) = 0$. Следователно $\psi^{n-1} : B^{\infty}_{n-1}(U,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ е коректно определен линеен функционал. Продължаваме ψ^{n-1} до линеен функционал $\psi^{n-1} : S^{\infty}_{n-1}(U,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, полагайки $\psi^{n-1}|_{B^{\infty}_{n-2}(U,\mathbb{R})} = \mathbb{O}|_{B^{\infty}_{n-2}(U,\mathbb{R})}$. По този начин получаваме $\psi^{n-1} \in S^{n-1}_{\infty}(U,\mathbb{R})$ с $\psi^{n-1}\partial_n = \varphi^n$, Q.E.D.
Възможността за лесно получаване на $H^n_{\infty}(U,\mathbb{R}) = 0$ от $H^{\infty}_n(U,\mathbb{R}) = 0$ използва съществено факта, че коефициентите $\mathbb{R}$ образуват поле. За произволен пръстен R, връзката между хомологии и кохомологии е значително по-сложна и се описва от така наречената Формула за Универсалните Коефициенти.
Точността на ко-верижния комплекс (11.1) във всеки сноп $\mathfrak{S}^n_{\infty}$ следва от следната

Лема 11.8. *Нека*

$$\{S^0_U, \rho^0_{VU}\} \xrightarrow{d^0_U} \{S^1_U, \rho^1_{VU}\} \xrightarrow{d^1_U} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}_U} \{S^n_U, \rho^n_{VU}\} \xrightarrow{d^n_U} \{S^{n+1}_U, \rho^{n+1}_{VU}\} \xrightarrow{d^{n+1}_U} \cdots$$

е коверижен комплекс от предснопове над топологично пространство X, така че за всяка точка $x \in X$ и всяка околност V_x на x върху X съществува околност $U_x \subseteq V_x$, върху която

$$S^0_{U_x} \xrightarrow{d^0_{U_x}} S^1_{U_x} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^n_{U_x} \xrightarrow{d^n_{U_x}} S^{n+1}_{U_x} \longrightarrow \cdots$$

е точна редица. Тогава редицата

$$\mathfrak{S}^0 \xrightarrow{d^0} \mathfrak{S}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathfrak{S}^n \xrightarrow{d^n} \mathfrak{S}^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

от асоциираните снопове е точна.

Доказателство: Съгласно Лема 10.2, достатъчно е да докажем, че за всяка фиксирана точка $x \in X$ и всеки елемент $a^x_{V,n}(s^n_V) \in \mathfrak{S}^n_x \cap Ker(d^n)$ съществува $a^x_{W,n-1}(s^{n-1}_W) \in \mathfrak{S}^{n-1}_x$, така че $d^{n-1}a^x_{W,n-1}(s^{n-1}_W) = a^x_{W,n}\left(d^{n-1}_W s^{n-1}_W\right) = a^x_{V,n}(s^n_V)$, където $a^x_{V,n} : S^n_V \to \mathfrak{S}^n_x$ са хомоморфизмите на директните граници. От $d^n a^x_{V,n}(s^n_V) = a^x_{V,n+1}(d^n_V s^n_V) = 0$ следва, че $d^n_V s^n_V$ се анулира върху някаква околност $W \subseteq V$ на x върху V. Нека U е такава околност на x върху W, за която $Ker(d^n_U) = Im(d^{n-1}_U)$. Тогава от $\rho_{UV} d^n_V s^n_V = d^n_U \rho_{UV} s^n_V = 0$ получаваме съществуването на $s^{n-1}_U \in S^{n-1}_U$ с условието $d^{n-1}_U s^{n-1}_U = \rho_{UV} s^n_V$. В резултат, $d^{n-1}a^x_{U,n-1}(s^{n-1}_U) = a^x_{U,n}(d^{n-1}_U s^{n-1}_U) = a^x_{U,n}\rho_{UV} s^n_V = a^x_{V,n}(s^n_V)$, Q.E.D.

Следствие 11.9. *Сноповете $\mathfrak{S}^n_{\infty}$ на гладките сингулярни n-ковериги над гладко многообразие M образуват резолвента*

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{S}^0_{\infty} \xrightarrow{d^0} \mathfrak{S}^1_{\infty} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \mathfrak{S}^n_{\infty} \xrightarrow{d^n} \mathfrak{S}^{n+1}_{\infty} \longrightarrow \cdots$$

на постоянния сноп $M \times \mathbb{R}$.

Доказателство: Съгласно Лема 11.8 и Следствие 11.7, достатъчно е да установим, че всяка точка $x \in M$ и всяка околност V_x на x върху M има околност $U_x \subseteq V_x$, която е дифеоморфна на ограничено и изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^m$ за $m = \dim M$. За целта да изберем локална карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ върху M, така че $x \in U_\alpha$. След евентуална транслация можем да считаме, че $\varphi_\alpha(x) = \check{o} \in \mathbb{R}^m$. Съществува достатъчно малко $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, така че отвореното кълбо $B^m(\check{o},\varepsilon) := \left\{ t \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^m t_i^2 < \varepsilon^2 \right\}$ се съдържа в околността $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_x)$ на $\check{o}$ върху $\mathbb{R}^m$. Кълбото $B^m(\check{o},\varepsilon)$ е изпъкнало, доколкото за произволни точки $t = (t_1,\ldots,t_m)$ и $t' = (t'_1,\ldots,t'_m)$ от $B^m(\check{o},\varepsilon)$ отсечката $\{st + (1-s)t' \mid 0 \le s \le 1\}$

с краища t и t' се съдържа в $B^m(\check{o}, \varepsilon)$. Наистина, съгласно неравенството на триъгълника имаме

$$||st + (1-s)t'|| \leq ||st|| + ||(1-s)t'|| = s||t|| + (1-s)||t'|| < s\varepsilon + (1-s)\varepsilon = \varepsilon.$$

Следователно $U_x := \varphi_\alpha^{-1}(B^m(\check{o}, \varepsilon))$ е околност на x върху V_x, която е дифеоморфна на ограничена и изпъкнала околност $B^m(\check{o}, \varepsilon)$ на $\check{o}$ върху $\mathbb{R}^m$, Q.E.D.