Лекция 10

Меки снопове и резолвенти

1. Точни редици от снопове и техните редици от глобални сечения

Определение 10.1. *Редицата*

$$\cdots \xrightarrow{f^{n-2}} \mathfrak{S}^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{S}^{n} \xrightarrow{f^{n}} \mathfrak{S}^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots \tag{10.1}$$

от хомоморфизми $f^{n-1} : \mathfrak{S}^{n-1} \to \mathfrak{S}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ на снопове от R-модули е точна в $\mathfrak{S}^n$, ако $Im(f^{n-1}) = Ker(f^n)$. Редицата (10.1) се нарича точна, ако тя е точна във всеки свой член $\mathfrak{S}^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Лема 10.2. *Редицата*

$$\cdots \xrightarrow{f^{n-2}} \mathfrak{S}^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{S}^{n} \xrightarrow{f^{n}} \mathfrak{S}^{n+1} \xrightarrow{f^{n+1}} \cdots$$

от хомоморфизми на снопове от R-модули над фиксирано топологично пространство X е точна в $\mathfrak{S}^n$ тогава и само тогава, когато за всяка точка $x \in X$ редицата от R-модули

$$\cdots \xrightarrow{f^{n-2}} \mathfrak{S}^{n-1}_x \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{S}^{n}_x \xrightarrow{f^{n}} \mathfrak{S}^{n+1}_x \xrightarrow{f^{n+1}}$$

е точна в слоя $\mathfrak{S}^n_x$ на $\mathfrak{S}^n$ над x.

Доказателство: Нека $\pi_n : \mathfrak{S}^n \to X$ е проекцията на $\mathfrak{S}^n$ върху X, а $\mathfrak{S}^n_x := \pi_n^{-1}(x)$ е слоят на $\mathfrak{S}^n$ над $x \in X$. Ако $Im(f^{n-1}) = Ker(f^n)$, то чрез пресичане със слоевете над фиксирана точка $x \in X$ получаваме, че

$$f^{n-1}\left(\mathfrak{S}^{n-1}_x\right) = Im(f^{n-1}) \cap \mathfrak{S}^n_x = Ker(f^n) \cap \mathfrak{S}^n_x = Ker\left(f^n|_{\mathfrak{S}^n_x}\right).$$

Следователно всяка точна редица от снопове е послойно точна.
Обратно, ако $f^{n-1}\left(\mathfrak{S}^{n-1}_x\right) = Ker\left(f^n|_{\mathfrak{S}^n_x}\right)$ над всяка точка $x \in X$, то обединението на тези равенства дава

$$Im\left(f^{n-1}\right) = \cup_{x\in X} f^{n-1}\left(\mathfrak{S}^{n-1}_x\right) = \cup_{x\in X} Ker\left(f^n|_{\mathfrak{S}^n_x}\right) = Ker(f^n).$$

С други думи, послойната точност на редица от хомоморфизми на снопове е достатъчна за точността на тази редица, Q.E.D.
Всяка къса точна редица от предснопове индуцира къса точна редица от асоциираните снопове, съгласно следната

Лема 10.3. *Ако*

$$0 \longrightarrow \{A_U, \rho^{A_U}_{VU}\} \xrightarrow{\{f_U\}} \{B_U, \rho^{B_U}_{VU}\} \xrightarrow{\{g_U\}} \{C_U, \rho^{C_U}_{VU}\} \longrightarrow 0 \tag{10.2}$$

е точна редица от предснопове на модули над топологично пространство X, то редицата от асоциирани снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0 \tag{10.3}$$

е точна.

Доказателство: Нека $a_U^x : A_U \to \mathfrak{A}_x$, $b_U^x : B_U \to \mathfrak{B}_x$ и $c_U^x : C_U \to \mathfrak{C}_x$ са съответните хомоморфизми на директните граници, определящи разглежданите снопове. Ако $fa_U^x(\alpha) = b_U^x f_U(\alpha_U) = 0_{\mathfrak{B}_x}$, то $f_U(\alpha_U) \in Ker b_U^x$, така че съществува околност W на x върху U, за която ограничението $\rho_{WU}^{B_U} f_U(\alpha_U) = 0$. Съгласно определението за хомоморфизъм $\{f_U\}$ на предснопове получаваме, че $f_U \rho_{WU}^{A_U}(\alpha_U) = \rho_{WU}^{B_U} f_U(\alpha_U) = 0$. Следователно $\rho_{WU}^{A_U}(\alpha_U) \in Ker(f_U) = \{0_{A_U}\}$, откъдето $a_U^x(\alpha_U) = a_W^x \rho_{WU}^{A_U}(\alpha_U) = 0$. С други думи, хомоморфизмът на снопове $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ е мономорфизъм.
Непосредствено се установява, че $Im(f) \subseteq Ker(g)$, защото

$$gfa_U^x(\alpha_U) = gb_U^x f_U(\alpha) = c_U^x g_U f_U(\alpha_U) = c_U^x(0_{C_U}) = 0_{\mathfrak{C}_x}$$

за $\forall \alpha_U \in A_U$ съгласно $g_U f_U = \mathbb{O} : A_U \to C_U$. Обратно, ако $b_U^x(\beta_U) \in Ker(g)$, т.е. $gb_U^x(\beta_U) = c_U^x g_U(\beta_U) = 0$, то $\rho_{VU}^{C_U} g_U(\beta_U) = 0_{C_V}$ върху подходяща околност V на x върху U. Вземайки предвид, че хомоморфизмът на предснопове$\{g_U\}$ комутира с хомоморфизмите на ограничение, представяме $g_V \rho_{VU}^{B_U} \beta_U) = \rho_{VU}^{C_U} g_U(\beta_U) = 0_{C_V}$ и стигаме до извода, че $\rho_{VU}^{B_U}(\beta_U) \in Ker(g_V) = Im(f_V)$ съгласно точността на редицата от предснопове (10.2). С други думи, съществува $\alpha_V \in A_V$, така че $f_V(\alpha_V) = \rho_{VU}^{B_U}(\beta_U)$. В резултат, $b_U^x(\beta_U) = b_V^x \rho_{VU}^{B_U}(\beta_U) = b_V^x f_V(\alpha_V) = fa_V^x(\alpha_V)$, откъдето $Ker(g) \subseteq Im(f)$ и редицата от снопове (10.3) е точна в $\mathfrak{B}$.
Накрая, всеки елемент на $\mathfrak{C}$ има вида $c_U^x(\gamma_U) = c_U^x g_U(\beta_U) = gb_U^x(\beta_U)$, благодарение на епиморфността на $\{g_U\} : \{B_U, \rho_{VU}^{B_U}\} \longrightarrow \{C_U, \rho_{VU}^{C_U}\}$. Това доказва точността на (10.3) в $\mathfrak{C}$, Q.E.D.
Следващата лема изучава поведението на глобалните сечения на къса точна редица от снопове.

Лема 10.4. *Нека*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

е къса точна редица на снопове от R-модули над топологично пространство X. Тогава глобалните сечения на тези снопове образуват точната редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X)$$

от R-модули.

Доказателство: Съгласно Твърдение 8.13 (i), хомоморфизмите на снопове $\mathrm{Id} : 0 \to \mathfrak{A}$, $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ и $\mathbb{O} : \mathfrak{C} \to 0$ индуцират хомоморфизмите

$$\{\mathrm{Id}_U\} : \{\Gamma(0,U) = \{0_R\}, \rho_{VU}^0\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{A}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}}\},$$

$$\mathrm{Id}_U\left(\sigma_0^0|_U\right) := \mathbb{O}\sigma_U^0 = \sigma_0^{\mathfrak{A}}|_U,$$

съответно,

$$\{f_U\} : \{\Gamma(\mathfrak{A}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{A}}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{B}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{B}}\},$$

$$f_U\left(\sigma_U^{\mathfrak{A}}\right) := f\sigma_U^{\mathfrak{A}},$$

$$\{g_U\} : \{\Gamma(\mathfrak{B}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{B}}\} \longrightarrow \{\Gamma(\mathfrak{C}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{C}}\}$$

$$g_U\left(\sigma_U^{\mathfrak{B}}\right) := g\sigma_U^{\mathfrak{B}},$$

$$\{\mathbb{O}_U\} : \{\Gamma(\mathfrak{C}, U), \rho_{VU}^{\mathfrak{C}}\} \longrightarrow \{\Gamma(0,U) = \{0_R\}, \rho_{VU}^0\},$$

$$\mathbb{O}_U\left(\sigma_U^{\mathbb{C}}\right) := \mathbb{O}\sigma_U^{\mathbb{C}} = \sigma_0^0|_U,$$

на предсноповете от непрекъснати сечения. (За произволен сноп $\mathfrak{S}$ и произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ сме означили със $\sigma_U^{\mathfrak{S}} : U \to \mathfrak{S}$ някакво непрекъснато сечение на $\mathfrak{S}$ над U, а със $\sigma_0^{\mathfrak{S}} : X \to \mathfrak{S}$, $\sigma_0^{\mathfrak{S}}(x) = \{0_{\mathfrak{S}_x}\}$ нулевото глобално сечение. За простота ще бележим $\sigma^{\mathfrak{S}}_X$ с $\sigma^{\mathfrak{S}}$.) В частност, получаваме редицата

$$0 \xrightarrow{\mathrm{Id}} \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X)$$

от хомоморфизми на глобалните непрекъснати сечения на тези снопове. За точността на тази редица в $\Gamma(\mathfrak{A}, X)$ е достатъчно да отбележим, че

$$Ker(f_X) := \{\sigma^{\mathfrak{A}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, X) \,|\, f\sigma^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{B}}_0\} \subseteq$$

$$\{\sigma^{\mathfrak{A}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, X) \,|\, f\sigma^{\mathfrak{A}}(X) = \sigma^{\mathfrak{B}}_0(X)\} =$$

$$\{\sigma^{\mathfrak{A}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, X) \,|\, \sigma^{\mathfrak{A}}(X) \subseteq Ker(f) = 0\} = \{\sigma^{\mathfrak{A}}_0\}.$$

По-нататък, $Im(f_X) := \{f\sigma^{\mathfrak{A}} \,|\, \sigma^{\mathfrak{A}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, X)\}$ се съдържа в $Ker(g_X) := \{\sigma^{\mathfrak{B}} \in \Gamma(\mathfrak{B}, X) \,|\, g\sigma^{\mathfrak{B}} = \sigma^{\mathfrak{C}}_0\}$, доколкото $gf \equiv 0$ води до $g\left(f\sigma^{\mathfrak{A}}\right) = \sigma^{\mathfrak{C}}_0$. Обратно, ако $g\sigma^{\mathfrak{B}}(x) = 0_{\mathfrak{C}_x}$ за $\forall x \in X$, то $\sigma^{\mathfrak{B}}(x) \in Ker(g) = Im(f)$ гарантира съществуването на $a_x \in \mathfrak{A}_x$ с $f(a_x) = \sigma^{\mathfrak{B}}(x)$. При това, a_x е единствено с това свойство, защото ако $f(a'_x) = f(a_x)$, то $a'_x - a_x \in Ker(f) = 0$. Това дава възможност да зададем коректно определено изображение $\sigma^{\mathfrak{A}} : X \to \mathfrak{A}$, $\sigma^{\mathfrak{A}}(x) := a_x$ за $\forall x \in X$. Произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathfrak{A}$ се трансформира в отворено подмножество $V = f(U) \subseteq \mathfrak{B}$ под действие на отвореното изображение $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Непосредствено се вижда, че $U \subseteq f^{-1}f(U)$. Вземайки предвид, че $f : \mathfrak{A} \to Im(f)$ е изоморфизъм на снопове от R-модули, стигаме до извода, че $f^{-1}f(U) \subseteq U$. Освен това, $f\sigma^{\mathfrak{A}}(x) = f(a_x) = \sigma^{\mathfrak{B}}(x)$ за $\forall x \in X$ дава $\left(\sigma^{\mathfrak{B}}\right)^{-1}(V) = \left(f\sigma^{\mathfrak{A}}\right)^{-1}(V) = \left(\sigma^{\mathfrak{A}}\right)^{-1} f^{-1}f(U) = \left(\sigma^{\mathfrak{A}}\right)^{-1}(U)$, така че $\left(\sigma^{\mathfrak{A}}\right)^{-1}(U)$ е отворено съгласно непрекъснатостта на $\sigma^{\mathfrak{B}} : X \to \mathfrak{B}$. Следователно $\sigma^{\mathfrak{A}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, X)$ и $f\sigma^{\mathfrak{A}} = \sigma^{\mathfrak{B}}$, така че $Ker(g_X) \subseteq Im(f_X)$ и редицата от глобални непрекъснати сечения е точна в $\Gamma(\mathfrak{B}, X)$, Q.E.D.
Разбира се, точната редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X)$$

може да се продължи до редицата

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X) \longrightarrow 0 \tag{10.4}$$

посредством нулевото изображение $\mathbb{O} : \Gamma(\mathfrak{C}, X) \to 0$, но (10.4) не е задължително точна в $\Gamma(\mathfrak{C}, X)$, както се вижда от следния

Пример 10.5. *Нека X е свързано топологично пространство, $\mathfrak{S} = X \times R$ е постоянният сноп със слой асоциативният пръстен с единица R, разгледан като модул над себе си, x и y са две различни точки от X, а $\mathfrak{K} = \cup_{z \in X} \mathfrak{K}_z$ и $\mathfrak{T} = \cup_{z \in X} \mathfrak{T}_z$ са сноповете, определени послойно с равенствата $\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}_y = \{0_R\}$, $\mathfrak{K}_z = R$ за $z \in X \setminus \{x, y\}$ и съответно, $\mathfrak{T}_x = \mathfrak{T}_y = R$, $\mathfrak{T}_z = \{0_R\}$ за $z \in X \setminus \{x, y\}$. Тогава редицата от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K} \xrightarrow{f} \mathfrak{S} = X \times R \xrightarrow{g} \mathfrak{T} \longrightarrow 0 \tag{10.5}$$

с $f|_{\mathfrak{K}_z} = \mathrm{Id}$ за $\forall z \in X \setminus \{x, y\}$ и $g|_{x \times R} = \mathrm{Id}$, $g|_{y \times R} = \mathrm{Id}$ е точна, но редицата от глобални непрекъснати сечения

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(X \times R, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{T}, X) \longrightarrow 0$$

не е точна в $\Gamma(\mathfrak{T}, X)$, доколкото $\Gamma(\mathfrak{K}, X) = \left\{\sigma^{\mathfrak{K}}_0\right\}$, а $\Gamma(X \times R, X) \simeq R$ се влага в $\Gamma(\mathfrak{T}, X) \simeq R \times R$.

Доказателство: Редицата от снопове (10.5) е точна, доколкото редиците от R-модули

$$, \ 0 \longrightarrow \mathfrak{K}_x = \{0_R\} \longrightarrow R \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathfrak{T}_x = R \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}_y = \{0_R\} \longrightarrow R \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathfrak{T}_y = R \longrightarrow 0 \qquad \text{и}$$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}_z = R \xrightarrow{\mathrm{Id}} R \longrightarrow \mathfrak{T}_z = \{0_R\} \longrightarrow 0$$

за $\forall z \in X \setminus \{x, y\}$ са точни.
Твърдим, че всички непрекъснати сечения $\sigma : X \to X \times R$ са постоянни, т.е. съществува $r \in R$, така че $\sigma(x) = (x, r)$ за $\forall x \in X$. По-точно, произволна точка $(x_o, r) \in \mathfrak{S} = X \times R$ има околност $U_{x_o} \times r$ върху $\mathfrak{S}$, така че $\pi : U_{x_o} \times r \to U_{x_o}$, $\pi(z, r) = z$ е хомеоморфизъм. Ако $\sigma : X \to X \times R$ е глобално непрекъснато сечение с $\sigma(x_o) = (x_o, r)$, то след ляво умножение на $\pi\sigma|_{U_{x_o}} = \mathrm{Id}_{U_{x_o}}$ с $\pi^{-1}|_{U_{x_o}}$ получаваме, че $\sigma|_{U_{x_o}} = \pi^{-1}|_{U_{x_o}}$, т.е. $\sigma(z) = (z, r)$ за $\forall z \in U_{x_o}$. Да означим с $\mathrm{pr}_2 : \mathfrak{S} = X \times R \to R$ проекцията върху втория множител и да разгледаме множеството

$$X_o := \{x \in X \mid \mathrm{pr}_2\sigma(x) = \mathrm{pr}_2(x_o) = r\}.$$

По определение, X_o е затворено подмножество на X. Горните разглеждания доказват, че X_o е отворено в X. Съгласно $x_o \in X_o$, т.е. $X_o \neq \emptyset$ и свързаността на X следва $X_o = X$ или $\sigma(z) = (z, r)$ за $\forall z \in X$. Това установява, че $\Gamma(\mathfrak{S}, X) \simeq R$. Вземайки предвид точността на редицата

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(X \times R, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{T}, X)$$

в $\Gamma(\mathfrak{K}, X)$, установена в Лема 10.4, всички непрекъснати сечения на $\mathfrak{K}$ са постоянни, защото се влагат в $\Gamma(X \times R, X) \simeq R$. Сега $\mathfrak{K}_x = \{0_R\}$ уточнява, че $\Gamma(\mathfrak{K}, X) = \{\sigma_0^{\mathfrak{K}}\}$ се състои само от нулевото сечение.
Остава да докажем, че за произволни $r, s \in R$ сечението $\sigma_{r,s} : X \to \mathfrak{T}$ с $\sigma_{r,s}(x) = (x, r)$, $\sigma_{r,s}(y) = (y, s)$ е непрекъснато относно топологията на $\mathfrak{T}$, в която проекцията $\pi_1 : \mathfrak{T} \to X$ е локален хомеоморфизъм. Непрекъснатостта на $\sigma_{r,s}$ в околност на $z \in X \setminus \{x, y\}$ не буди съмнение. Да изберем околност U_x на x върху X с $y \notin U_x$ и да разгледаме околността $V_{(x,r)} := [(U_x \setminus \{x\}) \times 0_R] \cup (x, r)$ на (x, r) върху $\mathfrak{T}$. Тогава взаимно-еднозначното изображение $\pi_1 : V_{(x,r)} \to U_x$ е хомеоморфизъм като ограничение на отвореното и непрекъснато $\pi_1 : \mathfrak{T} \to X$. Умножавайки отляво $\pi_1\sigma_{r,s}|_{U_x} = \mathrm{Id}_{U_x}$ с $\pi_1^{-1}|_{U_x}$ получаваме, че $\sigma_{r,s}|_{U_x} = \pi_1^{-1}|_{U_x}$, което доказва непрекъснатостта на $\sigma_{r,s}$ около x. Аналогични разсъждения установяват непрекъснатостта на $\sigma_{r,s}$ около y. Произволно отворено подмножество $V \subseteq \mathfrak{T}$ се разбива в обединение $V = \cup_{t \in V} V_t$ на околности V_t на $t \in V$ върху V, за които $\sigma_{r,s}^{-1}(V_t)$ са отворени подмножества на X, хомеоморфни на V_t. В резултат, $\sigma_{r,s}^{-1}(V) = \sigma_{r,s}^{-1}(\cup_{t \in V} V_t) = \cup_{t \in V} \sigma_{r,s}^{-1}(V_t)$ е отворено и $\sigma_{r,s} : X \to \mathfrak{T}$ е непрекъснато. По този начин установяваме, че $\Gamma(\mathfrak{T}, X) \simeq R \times R$, Q.E.D.
Преди да изучим един специален клас от снопове $\mathfrak{A}$, за които точните редици от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

индуцират точни редици

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X) \longrightarrow 0$$

от глобални непрекъснати сечения, да обърнем внимание на следната

Лема 10.6. *Всяка точна редица от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0 \qquad (10.6)$$

индуцира точна редица от глобални прекъснати сечения

$$0 \longrightarrow \Gamma_o(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma_o(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma_o(\mathfrak{C}, X) \longrightarrow 0 \qquad (10.7)$$

Доказателство: Ако глобалното прекъснато сечение $\alpha : X \to \mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ е в ядрото на f_X, то $f_X\alpha(p) = f\alpha(p) = 0$ за $\forall p \in X$, така че $\alpha(p) \in Ker(f) = \cup_{p\in X}\{0_{\mathfrak{A}_x}\}$ и α е нулевото сечение на $\mathfrak{A}$. Това установява точността на (10.7) в $\Gamma_o(\mathfrak{A}, X)$.
От $gf = \mathbb{O} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ следва, че $g_X f_X(\alpha) = gf(\alpha)$ е нулевото сечение на $\mathfrak{C}$, така че $Im(f_X) \subseteq Ker(g_X)$. Обратно, ако $\beta : X \to \mathfrak{B}$ е прекъснато сечение от $Ker(g_X)$, то във всяка точка $p \in X$ е в сила $g_X\beta(p) = g\beta(p) = 0_{\mathfrak{C}_p}$. Оттук $\beta(p) \in Ker(g) = Im(f)$, така че за $\forall p \in X$ съществува $\alpha_p \in \mathfrak{A}_p$ с $f(\alpha_p) = \beta(p)$. С други думи, съществува глобално прекъснато сечение $\alpha : X \to \mathfrak{A}$, $\alpha(p) := \alpha_p$, за което $f_X\alpha = \beta$. С това проверихме, че $Ker(g_X) \subseteq Im(f_X)$ и установихме точността на (10.7) в $\Gamma_o(\mathfrak{B}, X)$.
Накрая, всяко глобално прекъснато сечение $\gamma : X \to \mathfrak{C}$ изобразява точките p от X в точки $\gamma(p) \in \mathfrak{C}_p$ от слоя $\mathfrak{C}_p$ на $\mathfrak{C}$ над p. Съгласно точността на редицата (10.6) в $\mathfrak{C}$, за $\forall\gamma(p) \in \mathfrak{C}_p$ съществува точка $\beta_p \in \mathfrak{B}_p$, така че $g\beta_p = \gamma(p)$. Това дава възможност за определяне на глобално прекъснато сечение $\beta : X \to \mathfrak{B}$, $\beta(p) := \beta_p$ с условието $g_X\beta = g\beta = \gamma$ и доказва точността на (10.7) в $\Gamma_o(\mathfrak{C}, X)$, Q.E.D.

2. Разбиване на единицата върху паракомпактно многообразие

Определение 10.7. *Отвореното покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на топологично пространство X се нарича локално крайно, ако всяка точка $x \in X$ има околност V_x върху X, така че V_x пресича най-много краен брой U_α.*

Определение 10.8. *Отвореното покритие $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ на топологичното пространство X е подпокритие на отвореното покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на X, ако за всяко $\beta \in B$ съществува $\alpha \in A$, така че $V_\beta \subseteq U_\alpha$.*

Определение 10.9. *Подмножеството Z на топологично пространство X се нарича затворено, ако допълнението $X \setminus Z$ е отворено в X.*
Затворената обвивка $\overline{S}$ на подмножество S на топологично пространство X е сечението на всички затворени подмножества на X, съдържащи S.

Определение 10.10. *Топологичното пространство X е компактно, ако всяко отворено покритие $\{U_[\alpha\}_{\alpha\in A}$ има крайно подпокритие.*

Определение 10.11. *Хаусдорфовото топологично пространство X се нарича паракомпактно, ако всяко отворено покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на X има локално крайно подпокритие $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ с компактни затворени обвивки $\overline{V_\beta}$.*
Многообразието M с пълен атлас от карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ е паракомпактно, ако топологията върху M, относно която $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ са хомеоморфизми, е паракомпактна.

Ще нахвърлим конструкцията на гладко разбиване на единицата върху паракомпактно многообразие. За целта ни трябват няколко помощни твърдения.

Лема 10.12. *Нека C е компактно подмножество на гладко многообразие M, а V е отворено подмножество на M, съдържащо C. Тогава съществува гладка функция $\psi : M \to [0, 1]$, която е тъждествено нулева извън V и тъждествено равна на единица в C.*

Идея на доказателството: Първо се конструира гладка, навсякъде неотрицателна функция $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, която е тъждествено равна на 1 върху компактно подмножество $A \subset \mathbb{R}^m$ и тъждествено равна на нула върху затворено подмножество $B \subset \mathbb{R}^m$, непресичащо A. По-точно, за произволни реални числа $0 < a < b$, функцията

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)} & \text{за } x \in (a,b) \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е гладка и навсякъде неотрицателна. Да разгледаме функцията

$$F_{a,b}x := \frac{\int_x^b f_{a,b}(t)dt}{\int_a^b f_{a,b}(t)dt}.$$

Непосредствено се вижда, че $F_{a,b}x$ взема стойности в интервала $[0,1]$, $F_{a,b}(x) = 1$ за $\forall x \leq a$ и $F_{a,b}(x) = 0$ за $\forall x \geq b$. Сега

$$G_{a,b} : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1],$$

$$G_{a,b}(x_1, \ldots, x_m) := F_{a,b}(x_1^2 + \ldots x_m^2)$$

е гладка функция със стойност 1 в затвореното кълбо

$$\overline{B^m(\check{o}, a)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq a^2\}, \quad B^m(\check{o}, a) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < a\}$$

и стойност 0 в допълнението $\mathbb{R}^m \setminus B^m(\check{o}, b)$ на отвореното кълбо $B^m(\check{o}, b)$. За произволни концентрични сфери S' и S, така че S' е във вътрешността на S, съществува гладка функция $G_{S',S} : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ със стойност 1 във вътрешността на S' и стойност 0 извън S. Функцията $G_{S',S}$ се получава от $G_{a,b}$ чрез модификация посредством линеен оператор в $\mathbb{R}^m$. Произволно компактно подмножество $A \subset \mathbb{R}^m$ се покрива с краен брой отворени кълба $B_1, \ldots, B_n$ в $\mathbb{R}^m$, така че затворените обвивки $\overline{B_i}$ не пресичат затвореното подмножество $B \subset \mathbb{R}^m$ с $B \cap A = \emptyset$. Свиваме сферите $S_i := \partial B_i$ до концентрични сфери S_i', така че съответните отворени кълба B_i' с $\partial B_i' = S_i'$ образуват покритие на A. Да означим с $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ някаква гладка функция със стойност 1 в B_i' и стойност 0 в $\mathbb{R}^m \setminus B_i$. Тогава гладката функция

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := 1 - (1 - \varphi_1)(1 - \varphi_2) \ldots (1 - \varphi_n)$$

взема стойности в $[0,1]$ и е тъждествено равна на 1 върху A и на 0 върху B. За произволно компактно подмножество C на многообразие M с $\dim M = m$ и отворено подмножество $V \subseteq M$, съдържащо C, да разгледаме пълен атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ върху M. За всяко компактно подмножество C_α на U_α съществува гладка функция $f_\alpha : \mathbb{R}^m \to [0,1]$, която има стойност 1 върху $\varphi_\alpha(C_\alpha)$ и носител

$$\operatorname{Supp}(f_\alpha) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^m \mid f_\alpha(x) \neq 0\}},$$

съдържащ се във $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тогава

$$F_\alpha(p) := \begin{cases} f_\alpha \varphi_\alpha(p) & \text{за } p \in U_\alpha \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е гладка функция върху M със стойности в $[0,1]$, тъждествено равна на 1 върху C_α и на 0 върху $M \setminus U_\alpha$. Доколкото C е компактно, а V е отворено, съществуват краен брой карти $U_1, \ldots, U_n$ и техни компактни подмножества $C_1, \ldots, C_n$, така че

$$C \subseteq \cup_{i=1}^n C_i, \quad C_i \subseteq U_i, \quad \cup_{i=1}^n U_i \subseteq V.$$

Ако $F_i : M \to [0,1]$ е гладка функция със стойност 1 върху C_i и стойност 0 върху $M \setminus U_i$, то

$$\psi := 1 - (1 - F_1)(1 - F_2) \ldots (1 - F_n)$$

е гладка функция върху M със стойности в $[0,1]$, тъждествено равна на върху C и на 0 върху $M \setminus V$, Q.E.D.
За да формулираме и докажем следващата лема, да дадем още едно

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.13. *Топологичното пространство X се нарича нормално, ако за произволни непресичащи се затворени подмножества $A \subset X$ и $B \subset X$ съществуват непресичащи се отворени подмножества $U \subset X$, $V \subset X$, така че $A \subset U$, $B \subset V$.*
Многообразието M с пълен атлас от карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ е нормално, ако топологията върху M, относно която $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$ са хомеоморфизми, е нормална.

ЛЕМА 10.14. *Всяко паракомпактно топологично пространство X е нормално.*

Доказателство: Нека A и B са затворени непресичащи се подмножества на X. За всяка точка $p \in A$ ще докажем, че съществува околност $U_p \subset X$ и отворено подмножество $V_p \subset X$, съдържащо B и непресичащо U_p. За целта използваме, че X е Хаусдорфово и за всяка точка $q \in B$ избираме непресичащи се околности U_q на p и V_q на q. Тогава отворените подмножества V_q за $\forall q \in B$ и $X \setminus B$ образуват покритие на X. Съгласно паракампактността на X това покритие има локално крайно подпокритие $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$. Обединението

$$V_p := \cup_{W_\alpha \cap B \neq \emptyset} W_\alpha$$

е околност на B. Нека N_p е околност на p, която пресича краен брой W_α с $W_\alpha \cap B \neq \emptyset$, например $W_1, \dots, W_n$ за някакво $n \in \mathbb{N}$. За произволно W_i избираме $q_i \in B$, така че $W_i \subseteq V_{q_i}$. Тогава околността

$$U_p := (\cap_{i=1}^n U_{q_i}) \cap N_p$$

на p и околността $V_p := \cup_{W_\alpha \cap B \neq} W_\alpha$ на B отделят p от B, т.е. $U_p \cap V_p = \emptyset$.
Сега да разгледаме отвореното покритие на X, съставено от всички U_p, $p \in A$, построени по-горе и допълнението $X \setminus A$. Съществува локално крайно подпокритие $(N_\beta)_{\beta \in B}$ на това покритие. Отвореното множество

$$U := \cup_{N_\beta \cap A \neq \emptyset} N_\beta$$

е околност на A. За $\forall q \in B$ съществува околност B_q, която пресича най-много краен брой N_β с $N_\beta \cap A \neq \emptyset$, например, $N_1(q), \dots, N_{m_q}(q)$. Всяко $N_j(q)$ се съдържа в някое U_{p_j}, така че

$$W_q := \left(\cap_{j=1}^{m_q} V_{p_j}\right) \cap B_q$$

е околност на $q \in B$, непресичаща U. Обединението

$$V := \cup_{q \in B} W_q$$

е околност на B, непресичаща U, Q.E.D.
За съществуването на разбиване на единицата е нужна и следната

ЛЕМА 10.15. *Нека $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ е локално крайно покритие на нормално топологично пространство X. Тогава за $\forall \alpha \in A$ съществува отворено подмножество $V\alpha \subset U_\alpha$, така че затворената обвивка $\overline{V_\alpha}$ се съдържа в U_α и $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ е покритие на X.*

Доказателство : Нека Φ е множеството от всички функции φ, които на $\alpha \in A$ съпоставят $\varphi(\alpha) = U_\alpha$ или отворено подмножество $V_\alpha \subset U_\alpha$ с $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, така че $(\varphi(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X. Въвеждаме частична наредба във Φ, считайки че $\varphi \leq \varphi'$ точно когато $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ за всички $\varphi(\alpha) = V_\alpha$. За всяко линейно наредено подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ определяме

$$\psi^* := \cap_{\psi \in \Psi} \psi(\alpha)$$

и твърдим, че $\psi^* \in \Phi$. По-точно, фамилията $(\psi(\alpha))_{\psi \in \Psi}$ се състои от най-много две отворени подмножества, съгласно линейната нареденост на Ψ. Следователно $\psi^*(\alpha) = U_\alpha$ или $\psi^*(\alpha) = V_\alpha$ за отворено подмножество $V_\alpha \subset X$ с $\overline{V_\alpha} \subset W_\alpha$. Освен това, $(\psi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X, защото за всяка точка $p \in X$ съществуват краен брой отворени подмножества $U_1(p), \dots, U_{m_p}(p)$ от покритието $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, които съдържат p. Ако ψ_p е функцията върху A със стойности $\psi_p(\alpha) := \psi^*(\alpha)$ за $\alpha = 1, \dots, m_p$ и $\psi_p(\alpha) := U_\alpha$ за всички останали $\alpha \in A \setminus \{1, \dots, m_p\}$, то $(\psi_p(\alpha))_{\alpha \in A}$ се получава от $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ чрез свиване на неповече от краен брой U_α и всяко такова свиване води до покритие на X. Следователно $(\psi_p(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X, откъдето $(\psi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X и $\psi^* \in \Phi$. По определение, ψ^* е точна горна граница на Ψ, така че можем да приложим Лемата на Цорн и да получим съществуването на максимален елемент $\varphi^* \in \Phi$.
Остава да докажем, че $\varphi^*(\alpha) = V_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$. Ако допуснем, че $\varphi^*(\beta) = U_\beta$ за някое $\beta \in A$, то

$$Z_\beta := X \setminus (\cup_{\alpha \neq \beta} \varphi^*(\alpha))$$

е затворено подмножество на U_β, доколкото $(\varphi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X. Вземайки предвид, че топологичното пространство X е нормално и $U_\beta \neq \overline{U_\beta}$, получаваме съществуването на отворено подмножество $V_\beta \subset U_\beta$ с $Z_\beta \subset V_\beta \subset \overline{V_\beta} \subset U_\beta$. Тогава функцията φ_o с $\varphi_o(\beta) := V_\beta$ и $\varphi_o(\alpha) := \varphi^*(\alpha)$ за $\forall \alpha \in A \setminus \{\beta\}$ е строго по-голяма от φ^*, което противоречи на максималността на $\varphi^* \in \Phi$ и доказва, че $\varphi^*(\alpha) = V_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$, Q.E.D.

Лема-Определение 10.16. *Нека M е нормално многообразие, а $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ е локално крайно покритие на M с компактни затворени обвивки $\overline{U_\alpha}$ за $\forall \alpha \in A$. Тогава съществува фамилия $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ от гладки функции*

$$\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

с компактни носители

$$\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) := \overline{\{p \in M \,|\, \varphi_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha,$$

така че $\varphi_\alpha \geq 0$ за $\forall \alpha \in A$ и $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha = 1$.
Фамилията от гладки функции $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ се нарича разбиване на единицата върху M, съгласувано с локално крайното покритие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Доказателство: Съгласно Лема 10.15 съществува подпокритие $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ на $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ с компактни затворени обвивки $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Прилагаме Лема 10.12 към $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ и получаваме гладки функции $\psi_\alpha : M \to [0,1]$ с компактен носител $\mathrm{Supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, вземащи стойност 1 върху V_α и неотрицателни върху цялото многообразие M. Сумата $\psi := \sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha$ е коректно определена благодарение на локалната крайност на покритието $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Непосредствено се вижда, че ψ е гладка функция върху M със строго положителна стойност $\psi(p) > 0$ във всяка точка $p \in M$. Гладките функции

$$\varphi_\alpha := \frac{\psi_\alpha}{\psi} = \frac{\psi_\alpha}{\sum_{\alpha \in A} \psi_\alpha}$$

образуват търсеното разбиване на единицата върху M, съгласувано с локално крайното покритие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, Q.E.D.

3. Определение и свойства на меките снопове

Нека $\pi : \mathfrak{S} \to X$ е сноп над топологично пространство X, а $\{\Gamma(\mathfrak{S}, U), \rho_{VU}\}$ е предснопът на непрекъснатите сечения на $\mathfrak{S}$. За всяко подмножество $S \subseteq$

X, фамилията от отворените подмножества $U \subseteq X$, съдържащи S, образува насочена система от индекси, така че директната граница

$$\Gamma(\mathfrak{S}, S) := \lim_{\rightarrow} \Gamma(\mathfrak{S}, U) = \left(\coprod_{S \subset U} \Gamma(\mathfrak{S}, U) \right) / K_S$$

е коректно определена. Тук K_S се поражда от $\sigma_U - \rho_{VU}(\sigma_U)$ за произволни отворени подмножества $V \subseteq U \subseteq X$, съдържащи S. Да означим с

$$a^S : \Gamma(\mathfrak{S}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}, S),$$
$$a^S(\sigma) := \sigma + K_S \quad \text{за } \forall \sigma \in \Gamma(\mathfrak{S}, X)$$

съответния хомеоморфизъм на директната граница $\Gamma(\mathfrak{S}, S)$.

Определение 10.17. *Снопът $\pi : \mathfrak{S} \to X$ над паракомпактно топологично пространство X се нарича мек, ако за всяко затворено подмножество $S \subseteq X$ хомоморфизмът*

$$a^S : \Gamma(\mathfrak{S}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}, S)$$

е епиморфизъм.

Твърдение 10.18. *Ако $\pi_1 : \mathfrak{A} \to X$ е мек сноп над паракомпактно топологично пространство X и*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

е точна редица от снопове над X, то съответната редица от непрекъснати сечения

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, X) \xrightarrow{f_X} \Gamma(\mathfrak{B}, X) \xrightarrow{g_X} \Gamma(\mathfrak{C}, X) \longrightarrow 0$$

е също точна.

Доказателство: Съгласно Лема 10.4, достатъчно е да докажем, че

$$g_X : \Gamma(\mathfrak{B}, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{C}, X),$$
$$g_X(b) := gb \quad \text{за } \forall b \in \Gamma(\mathfrak{B}, X)$$

е епиморфизъм. За целта да изберем непрекъснато сечение $c \in \Gamma(\mathfrak{C}, X)$ и да отбележим, че за всяка точка $x \in X$ съществуват околност $U_x \subset X$ и непрекъснато сечение $b_x \in \Gamma(\mathfrak{B}, U_x)$, така че $g_{U_x} b_x = g b_x = \rho''_{U_x V}(c)$. По-точно, произволна околност U'_x на x върху X се изобразява в околност $c(U'_x)$ на $c(x)$ върху $\mathfrak{C}$ и се издърпва до отворено подмножество $g^{-1}c(U'_x)$ на $\mathfrak{B}$. Да изберем точка $\beta_x \in g^{-1}c(x)$ и околност V_x на β_x върху $\mathfrak{B}$, така че проекцията $\pi_2 : \mathfrak{B} \to X$ се ограничава до хомеоморфизъм $\pi_2 : V_x \to U_x := \pi_2(V_x)$. Ако $\pi_3 : \mathfrak{C} \to X$ е проекцията на снопа $\mathfrak{C}$, то в комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_2"'] & c(U_x) \arrow[dl, "\pi_3"] \\ U_x & \end{tikzcd}$$

изображенията $g : V_x \to c(U_x)$ и $\pi_3 : c(U_x) \to U_x$ са също хомеоморфизми. Още повече, $\pi_3^{-1} = c : U_x \to c(U_x)$. Твърдим, че $b_x := \pi_2^{-1} : U_x \to V_x$ е локално непрекъснато сечение на $\mathfrak{B}$ с $g b_x = c|_{U_x}$. Наистина, $\pi_2 b_x = \mathrm{Id}_{U_x}$, а след обръщане на $\pi_2|_{V_x} = \pi_3 g|_{V_x}$ получаваме, че

$$b_x|_{U_x} = \pi_2^{-1}|_{U_x} = g^{-1}|_{c(U_x)} \pi_3^{-1}|_{U_x} = g^{-1}|_{c(U_x)} c|_{U_x},$$

т.е. $(g b_x)|_{U_x} = c|_{U_x}$. По този начин получаваме отворено покритие $X = \cup_{x \in X} U_x$ и фамилия от локални непрекъснати сечения $b_x \in \Gamma(\mathfrak{B}, U_x)$, така че $g b_x = c|_{U_x}$.

Трябва да докажем, че сеченията $(b_x)_{x\in X}$ се слепват по подходящ начин до глобално непрекъснато сечение $b \in \Gamma(\mathfrak{B}, X)$. Съгласно паракомпактността на X, съществува локално крайно подпокритие $(V_x)_{x\in X}$ на $(U_x)_{x\in X}$ с компактни затворени обвивки $\overline{V_x}$. Да разгледаме множеството Φ на двойките (b_S, S), където $S = \cup \overline{V_x}$ е обединение на затворените обвивки $\overline{V_x}$ за някакви точки $x \in X$, а $b_S \in \Gamma(\mathfrak{B}, S)$ и $gb_S = c|_S$. Въвеждаме частична наредба във Φ, считайки че $(b_S, S) \leq (b'_{S'}, S')$, ако $S \subseteq S'$ и $b'_{S'}|_S = b_S$. Тогава всяко линейно наредено подмножество $(b_{S_\alpha}, S_\alpha)_{\alpha\in A}$ на Φ има точна горна граница (b_{S_o}, S_o). По-точно, за $S_o := \cup_{\alpha\in A} S_\alpha$ съществува $b_{S_o} \in \Gamma(\mathfrak{B}, S_o)$, благодарение на съгласуваността на $(b_{S_\alpha})_{\alpha\in A}$. С други думи, за $\forall \alpha, \beta \in A$ е в сила $(b_\alpha, S_\alpha) \leq (b_\beta, S_\beta)$ или $(b_\beta, S_\beta) \leq (b_\alpha, S_\alpha)$, което води до $b_\beta|_{S_\alpha}$, съответно, $b_\alpha|_{S_\beta} = b_\beta$. Съгласно Лемата на Цорн съществува максимален елемент (b_S, S) на Φ.
Остава да установим, че $S = X$. Ако S е собствено подмножество на X, то съществува $x \in X \setminus S$. Да изберем околност N_x на x, която пресича краен брой отворени подмножества $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$ от локално крайното покритие $(V_x)_{x\in X}$. Тогава затворената обвивка $\overline{N_x}$ не се съдържа изцяло в S и пресича S най-много в $\overline{V_{x_1}}, \dots \overline{V_{x_k}}$, така че $\overline{N_x} \cap S = \overline{N_x} \cap (\overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_k}})$ е затворено подмножество на X. След евентуално свиване на N_x можем да считаме, че $N_x \subseteq V_x$. Във всяка точка $y \in S \cap \overline{N_x}$ имаме

$$g(b_S - b_x)(y) = gb_S(y) - gb_x(y) = c(y) - c(y) = 0_{0_{\mathfrak{C}_y}}.$$

Ограничавайки точната редица от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

върху $S \cap \overline{N_x}$ получаваме точна редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, S \cap \overline{N_x}) \xrightarrow{f_{S\cap\overline{N_x}}} \Gamma(\mathfrak{B}, S \cap \overline{N_x}) \xrightarrow{g_{S\cap\overline{N_x}}} \gamma(\mathfrak{C}, S \cap \overline{N_x}) \ .$$

Сега $b_S - b_x \in Ker(g_{S\cap\overline{N_x}}) = Im(f_{S\cap\overline{N_x}})$ осигурява съществуването на $a_{S\cap\overline{N_x}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, S \cap \overline{N_x})$ с $fa_{S\cap\overline{N_x}} = (b_S - b_x)|_{S\cap\overline{N_x}}$. По предположение, снопът $\pi_1 : \mathfrak{A} \to X$ е мек, а $S \cap \overline{N_x}$ е затворено подмножество на X, така че $a_{S\cap\overline{N_x}} \in \Gamma(\mathfrak{A}, S \cap \overline{N_x})$ се продължава до глобално непрекъснато сечение $a \in \Gamma(\mathfrak{A}, X)$. Това дава възможност да определим $b_{S\cup\overline{N_x}} \in \Gamma(\mathfrak{B}, S \cup \overline{N_x})$ по правилото

$$b_{S\cup\overline{N_x}}(y) := \begin{cases} b_S(y) & \text{за} \quad y \in S, \\ b_x(y) + fa(y) & \text{за} \quad y \in \overline{N_x}. \end{cases}$$

Съгласно $gb_{S\cup\overline{N_x}} = c|_{S\cup\overline{N_x}}$, съществуването на $b_{S\cup\overline{N_x}}$ противоречи на максималността на $(b_S, S) \in \Phi$ и установява, че $S = X$, Q.E.D.

Следствие 10.19. *Ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са меки снопове над паракомпактно топологично пространство X и*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

е точна редица от снопове над X, то снопът $\mathfrak{C}$ е също мек.

Доказателство: За произволно затворено подмножество $S \subseteq X$ имаме точна редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, S) \xrightarrow{f_S} \Gamma(\mathfrak{B}, S) \xrightarrow{g_S} \Gamma(\mathfrak{C}, S) \longrightarrow 0 \ ,$$

доколкото за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$, съдържащо S, Твърдение 10.18 предоставя точна редица

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{A}, U) \xrightarrow{f_U} \Gamma(\mathfrak{B}, U) \xrightarrow{g_U} \Gamma(\mathfrak{C}, U) \longrightarrow 0$$

от непрекъснати сечения над U. За всяко $c_S \in \Gamma(\mathfrak{C}, S)$ съществува $b_S \in \Gamma(\mathfrak{B}, S)$, така че $g_S b_S = g b_S = c_S$. По предположение, снопът $\mathfrak{B}$ е мек, така че съществува продължение $b \in \Gamma(\mathfrak{B}, X)$ на b_S. Тогава $c := gb \in \Gamma(\mathfrak{C}, X)$ е продължение на c_S, с което се установява, че и снопът $\mathfrak{C}$ е мек, Q.E.D.

Следствие 10.20. *Ако*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}^0 \xrightarrow{f^0} \cdots \longrightarrow \mathfrak{S}^{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} \mathfrak{S}^n \xrightarrow{f^n} \mathfrak{S}^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

е точна редица от меки снопове над паракомпактно топологично пространство X, то редицата от глобални непрекъснати сечения

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^0, X) \xrightarrow{f_X^0} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^{n-1}, X) \xrightarrow{f_X^{n-1}} \Gamma(\mathfrak{S}^n, X) \xrightarrow{f_X^n} \Gamma(\mathfrak{S}^{n+1}, X) \longrightarrow \cdots$$

е също точна.

Доказателство: Нека

$$\mathfrak{K}^i := Ker\left[f^i : \mathfrak{S}^i \longrightarrow \mathfrak{S}^{i+1}\right]$$

за $\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогава $\mathfrak{K}^0$ е нулевият сноп над X, така че $\mathfrak{K}^0$ е мек. За всяко $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ използваме точността на дадената редица, $Im(f^i) = Ker(f^{i+1})$ и получаваме точната редица от снопове

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}^i \longrightarrow \mathfrak{S}^i \xrightarrow{f^i} \mathfrak{K}^{i+1} \longrightarrow 0$$

за всички $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. С индукция по i прилагаме Следствие 10.19 към тези редици и стигаме до заключението, че сноповете $\mathfrak{K}^i$ са меки за $\forall i \in \mathbb{N}$. Съгласно Твърдение 10.18 оттук получаваме точни редици

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{K}^i, X) \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^i, X) \xrightarrow{f_X^i} \Gamma(\mathfrak{K}^{i+1}, X) \longrightarrow 0$$

от глобални непрекъснати сечения. Това дава възможност да стигнем до извода, че $Ker\left(f_X^{i+1}\right) = \Gamma(\mathfrak{K}^{i+1}, X) = Im\left(f_X^i\right)$ за $\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ установява точността на редицата

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^0, X) \xrightarrow{f_X^0} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{S}^{n-1}, X) \xrightarrow{f_X^{n-1}} \Gamma(\mathfrak{S}^n, X) \xrightarrow{f_X^n} \Gamma(\mathfrak{S}^{n+1}, X) \longrightarrow \cdots,$$

Q.E.D.

4. Сноповете на гладките сингулярни ковериги са меки

Определение 10.21. *Снопът $\pi : \mathfrak{F} \to X$ над паракомпактно топологично пространство X се нарича тънък, ако за всяко локално крайно покритие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ на X с компактни затворени обвивки $\overline{U_\alpha}$ съществува фамилия от морфизми на снопове*

$$\eta_\alpha : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

с носители

$$\mathrm{Supp}(\eta_\alpha) := \overline{\{\xi \in \mathfrak{F} \mid \eta_\alpha(\xi) \neq 0\}} \subseteq \pi^{-1}(U_\alpha),$$

така че $\sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}}$.
Фамилията $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ се нарича разбиване на единицата върху снопа $\mathfrak{F}$, съгласувано с покритието $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ на X.

Лема 10.22. *Всеки тънък сноп $\pi : \mathfrak{F} \to X$ над паракомпактно топологично пространство X е мек.*

Доказателство: Нека S е затворено подмножество на X, а $\xi_S \in \Gamma(\mathfrak{F}, S)$. Тогава съществува отворено покритие $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ на S и непрекъснати сечения $\sigma_\alpha \in \Gamma(\mathfrak{F}, U_\alpha)$, така че $\xi_S|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$. Полагаме $U_0 := X \setminus S$ и избираме $\sigma_0 \in \Gamma(\mathfrak{F}, U_0)$ като ограничението на нулевото сечение на $\pi : \mathfrak{F} \to X$. Съгласно паракомпактността на X можем да считаме, че така полученото покритие $(U_\alpha)_{\alpha \in A \cup \{0\}}$ на X е локално крайно и има компактни затворени обвивки $\overline{U_\alpha}$. Тогава съществува разбиване на единицата $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A \cup \{0\}}$ върху $\mathfrak{F}$, съгласувано с покритието $(U_\alpha)_{\alpha \in A \cup \{0\}}$. В резултат, $\eta_\alpha \sigma_\alpha \in \Gamma(\mathfrak{F}, U_\alpha)$ и $\eta_\alpha \sigma_\alpha$ се анулират в околност на $\overline{U_\alpha} \setminus U_\alpha$, така че можем да ги продължим по нулев начин до $\eta_\alpha \sigma_\alpha \in \Gamma(\mathfrak{F}, X)$. Това дава

$$\widetilde{\xi} := \sum_{\alpha \in A \cup \{0\}} \eta_\alpha \sigma_\alpha \in \Gamma(\mathfrak{F}, X)$$

с ограничение $\widetilde{\xi}|_S = \xi_S$, защото

$$\xi_S = \left(\sum_{\alpha \in A \cup \{0\}} \eta_\alpha \right) \xi_S = \sum_{\alpha \in A \cup \{0\}} \eta_\alpha \xi_S|_{U_\alpha} = \sum_{\alpha \in A \cup \{0\}} \eta_\alpha \sigma_\alpha|_{U_\alpha} = \widetilde{\xi}|_S, \qquad \text{Q.E.D.}$$

Определение 10.23. *Нека M е гладко многообразие, а $\{S^n_\infty(U, \mathbb{R}), \rho_{VU}\}$ е предснопът на гладките сингулярни n-ковериги върху M с реални коефициенти. Асоциираният сноп*

$$\mathfrak{S}^n_\infty := \cup_{x \in M} (\mathfrak{S}^n_\infty)_x = \cup_{x \in M} \lim_{\to} S^n_\infty(U, \mathbb{R}) = \cup_{x \in M} \left[\coprod_{x \in U} S^n_\infty(U, \mathbb{R}) \right] / K^n_x$$

на $\{S^n_\infty(U, \mathbb{R}), \rho_{VU}\}$ се нарича сноп на гладките сингулярни n-ковериги върху M.

Да отбележим, че диференциалите $d^n_U : S^n_\infty(U, \mathbb{R}) \to S^{n+1}_\infty(U, \mathbb{R})$ комутират с хомоморфизмите на ограничение $\rho_{VU} : S^*_\infty(U, \mathbb{R}) \to S^*_\infty(V, \mathbb{R})$ съгласно

$$\rho_{VU} d^n_U(\varphi^n) = \rho_{VU}(\varphi^n \partial_{n+1}) = \varphi^n \partial_{n+1}|_{S^\infty_{n+1}(V, \mathbb{R})} = d^n_V \left(\varphi^n|_{S^\infty_n(V, \mathbb{R})} \right) = d^n_V \rho_{VU}(\varphi^n)$$

за $\forall \varphi^n \in S^n_\infty(U, \mathbb{R}) := Hom_{\mathbb{R}}(S^\infty_n(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$. Следователно

$$\{d^n_U\} : \{S^n_\infty(U, \mathbb{R}), \rho_{VU}\} \to \{S^{n+1}_\infty(U, \mathbb{R}), \rho_{VU}\}$$

е хомоморфизъм на предснопове и съществува хомоморфизъм на снопове

$$d^n : \mathfrak{S}^n_\infty \longrightarrow \mathfrak{S}^{n+1}_\infty,$$
$$d^n(a^x_{U,n}(\varphi^n_U)) := a^x_{U,n+1}(d^n_U(\varphi^n_U)),$$

където $\varphi^n_U \in S^n_\infty(U, \mathbb{R})$, $x \in U$ и $a^x_{U,n} : S^n_\infty(U, \mathbb{R}) \to (\mathfrak{S}^n_\infty)_x := \lim_\to S^n_\infty(U, \mathbb{R})$ са хомоморфизмите на директните граници. Твърдим, че $Im(d^n) \subseteq Ker(d^{n+1})$, така че за произволно гладко многообразие M съществува ко-верижен комплекс от снопове

$$0 \longrightarrow M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{S}^0_\infty \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathfrak{S}^n_\infty \xrightarrow{d^n} \mathfrak{S}^{n+1}_\infty \longrightarrow \cdots \tag{10.8}$$

Наистина,

$$d^{n+1} a^x_{U,n+1}(d^n_U \varphi^n_U) = a^x_{U,n+2} d^{n+1}_U d^n_U \varphi^n_U = 0$$

за всяка точка $x \in M$, всяка околност U на x върху M и всяка гладка сингулярна n-коверига $\varphi^n_U \in S^n_\infty(U, \mathbb{R})$ върху U.
За $n = 0$ да отбележим, че гладките сингулярни 0-ковериги

$$S^0_\infty(U, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(S^\infty_0(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(S_0(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

са във взаимно-еднозначно съответствие с функциите $U \to \mathbb{R}$. Следователно $\Gamma(\mathfrak{S}^0_\infty, U)$ са $\mathbb{R}$-алгебрите на функциите $U \to \mathbb{R}$. Ядрото на $d^0 : \mathfrak{S}^0_\infty = \mathfrak{S}^0 \to \mathfrak{S}^1_\infty$

е точно постоянният сноп $M \times \mathbb{R}$, така че редицата от снопове (10.8) е точна в $\mathfrak{S}^0_\infty = \mathfrak{S}^0$. В следващия въпрос ще докажем точността на (10.8) във всяко $\mathfrak{S}^n_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Лема 10.24. *Над паракомпактно гладко многообразие M снопът $\mathfrak{S}^0$ е мек.*

Доказателство: За произволно затворено подмножество $S \subseteq M$, да отбележим, че $\sigma_S \in \Gamma(\mathfrak{S}^0, S)$ са функциите $\sigma_S : S \to \mathbb{R}$. Да определим $\sigma : M \to \mathbb{R}$, полагайки

$$\sigma(p) := \begin{cases} \sigma_S(p) & \text{за} \quad p \in S, \\ 0 & \text{за} \quad p \in M \setminus S. \end{cases}$$

Тогава $\sigma|_S = \sigma_S$, така че снопът $\mathfrak{S}$ е мек, Q.E.D.
За да докажем, че сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty \to M$ на гладките сингулярни n-ковериги върху паракомпактно многообразие M са меки за $\forall n \in \mathbb{N}$, ще използваме следната

Лема 10.25. *Ако $\pi_2 : \mathfrak{M} \to M$ е сноп от модули над мек сноп $\pi_1 : \mathfrak{R} \to M$ от $\mathbb{R}$-алгебри върху паракомпактно многообразие M, то снопът $\mathfrak{M}$ е също мек.*

Доказателство: Нека $\xi_S \in \Gamma(\mathfrak{M}, S)$ за някакво затворено подмножество $S \subseteq M$. Тогава съществува отворено подмножество $U \subseteq M$, съдържащо S и непрекъснато сечение $\xi_U \in \Gamma(\mathfrak{M}, U)$, което продължава ξ_S. Нека $\rho \in \Gamma(\mathfrak{R}, S \cup (M \setminus U))$ се определя по формулата

$$\rho(x) := \begin{cases} 1 & \text{за} \quad x \in S \\ 0 & \text{за} \quad x \in M \setminus U \end{cases}.$$

По предположение, снопът $\mathfrak{R}$ е мек, така че съществува глобално непрекъснато продължение $\widetilde{\rho} \in \Gamma(\mathfrak{R}, M)$ на ρ. В резултат, $\widetilde{\rho}\xi_S \in \Gamma(\mathfrak{M}, M)$ се оказва коректно определено глобално непрекъснато продължение на $\widetilde{\rho}\xi_S|_S = \xi_S$, което се анулира върху $M \setminus U$, Q.E.D.
Сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, на гладките сингулярни n-ковериги върху гладко многообразие M имат стурктура на $\mathfrak{S}^0_\infty$-модули. По-точно, върху произволно отворено подмножество $U \subseteq M$, линейното пространство $S^n_\infty(U, \mathbb{R})$ над $\mathbb{R}$ има структура на $S^0_\infty(U, \mathbb{R})$-модул, която се определя последния начин. За произволен гладък сингулярен n-симплекс $\sigma \in S^\infty_n(U, \mathbb{R})$ забелязваме, че

$$\tau_i(\sigma) := \sigma\varepsilon^n_n \dots \varepsilon^{i+1}_{i+1}\varepsilon^i_{i-1} \dots \varepsilon^2_1\varepsilon^1_0$$

са сингулярни 0-симплекси за всички $0 \leq i \leq n$. Именно, за произволен стандартен 0-симплекс $\Delta^0 = \{p\}$ имаме

$$\begin{gathered} \varepsilon^1_0(\Delta^0) \subseteq \Delta^1, \\ \varepsilon^2_1(\Delta^0) \subseteq \varepsilon^2_1(\Delta^1) \subseteq \Delta^2, \dots, \\ \varepsilon^i_{i-1}\varepsilon^{i-1}_{i-2} \dots \varepsilon^2_1\varepsilon^1_0(\Delta^0) \subseteq \varepsilon^i_{i-1}(\Delta^{i-1}) \subseteq \Delta^i, \\ \varepsilon^{i+1}_{i+1}\varepsilon^i_{i-1} \dots \varepsilon^1_0(\Delta^0) \subseteq \varepsilon^{i+1}_{i+1}(\Delta^i) \subseteq \Delta^{i+1}, \dots \\ \varepsilon^n_n\varepsilon^{n-1}_{n-1} \dots \varepsilon^1_0(\Delta^0) \subseteq \varepsilon^n_n(\Delta^{n-1}) \subseteq \Delta^n, \end{gathered}$$

откъдето

$$\tau_i(\sigma)(\Delta^0) = \sigma\varepsilon^n_n \dots \varepsilon^{i+1}_{i+1}\varepsilon^i_{i-1} \dots \varepsilon^1_0(\Delta^0) \subseteq \sigma(\Delta^n)$$

е точка от U. За $\varphi^n_U \in S^n_\infty(U, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(S^\infty_n(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ и $\varphi^0_U \in S^0_\infty(U, \mathbb{R}) = S^0(U, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(S_0(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ нека $\varphi^0_U \cup \varphi^n_U = \varphi^n_U \cup \varphi^0_U$ е $\mathbb{R}$-линейното продължение на съответствието, съпоставящо на произволен гладък сингулярен n-симплекс σ реалното число

$$(\varphi^0_U \cup \varphi^n_U)(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi^0_U(\tau_i(\sigma))\varphi^n_U(\sigma).$$

В резултат, над всяка точка p от гладко многообразие M слоят $\mathfrak{S}^n_{\infty,p}$ придобива структура на $\mathfrak{S}^0_{\infty,p} = \mathfrak{S}^0_p$-модул, определена по правилото

$$a^p_{U,n}(\varphi^n_U)a^p_{V,0}(\varphi^0_V) = a^p_{V,0}(\varphi^0_V)a^p_{U,n}(\varphi^n_U) := a^p_{U\cap V,n}\left(\rho_{U\cap V,U}(\varphi^n_U) \cup \rho_{U\cap V,V}(\varphi^0_V)\right).$$

Непосредственото приложение на Лема 10.25 към снопа $\mathfrak{S}^0_\infty$ на гладките сингулярни 0-ковериги върху паракомпактно многообразие M и сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$ от $\mathfrak{S}^0_\infty$-модули над M дава следното

Следствие 10.26. *Сноповете $\mathfrak{S}^n_\infty$ на гладките сингулярни n-ковериги над паракомпактно многообразие M са меки за всяко неотрицателно цяло n.*