Глава 10

Размерност. Лема на Ньотер за нормализация.

Полето F е породено от своите елементи $\xi_1, \dots, \xi_n$ над полето k, ако

$$F = k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left\{ \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{g(\xi_1, \dots, \xi_n)} \,\middle|\, f, g \in k[\xi_1, \dots, \xi_n] \right\}$$

е полето от частни на k-алгебрата $k[\xi_1, \dots, \xi_n]$, породена от $\xi_1, \dots, \xi_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Нека $F \supset k$ е резширение на полета, породено от $\xi_1, \dots, \xi_n$, т.е. $F = k(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Ако $\xi_1, \dots, \xi_d$ са трансцендентни в съвкупност (или алгебрично независими) над k и всяко ξ_i с $d+1 \leq i \leq n$ е алгебрично над $k(\xi_1, \dots, \xi_d)$, то $\xi_1, \dots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на F над k.*

С други думи, максималните трансцендентни над k множества от елементи на F се наричат базиси на трансцендентност на F над k.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Нека полето $F = k(x_1, \dots, x_n)$ е крайнопородено разширение на полето k с базис на трансцендентност $x_1, \dots, x_m$ над k. Тогава:*
(i) всяко трансцендентно над k подмножество $\{w_1, \dots, w_r\} \subset F$ има $r \leq m$ елемента;
(ii) всеки друг базис на трансцендентност $y_1, \dots, y_l$ на F над k има $l = m$ елемента.
Броят на елементите в един, а оттам и във всеки един базис на трансцендентност на $F = k(x_1, \dots, x_n)$ над k се нарича степен на трансцендентност на F над k и се бележи с $\operatorname{tr} \deg_k(F)$.

Доказателство: (i) По определението за базис на трансцендентност $x_1, \dots, x_m$ на F над k, w_1 е алгебрично над $k(x_1, \dots, x_m)$, така че съществува полином $0 \not\equiv f_1(t, x_1, \dots, x_m) \in k[t, x_1, \dots, x_m]$ с $f_1(w_1, x_1, \dots, x_m) = 0$. Въз основа на трансцендентността на w_1 над k, полиномът $f_1(t, x_1, \dots, x_m)$ зависи от поне едно x_i, $1 \leq i \leq m$. След евентуална пермутация на $x_1, \dots, x_m$ можем да считаме, че $f_1(t, x_1, \dots, x_m)$ зависи от x_1 и $f_1(w_1, x_1, \dots, x_m) = 0$ е абгебрична зависимост на x_1 над $k(w_1, x_2, \dots, x_m$. В резултата, степента $[k(w_1, x_1, \dots, x_m) : k(w_1, x_2, \dots, x_m)] < \infty$ е крайна. Твърдим, че F е алгебрично разширение на $k(w_1, x_2, \dots, x_m)$, което е еквивалентно на крайност на степента $[F : k(w_1, x_2, \dots, x_m)]$. Наистина,

$$[F : k(w_1, x_2, \dots, x_m)] =$$
$$[F : k(w_1, x_1, \dots, x_m)][k(w_1, x_1, \dots, x_m) : k(w_1, x_2, \dots, x_m)] < \infty,$$

защото $[F : k(x_1, \dots, x_m)] < \infty$ по определението за базис на трансцендентност $x_1, \dots, x_m$ на F над k и

$$[F : k(w_1, x_1, \dots, x_m)] = \frac{[F : k(x_1, \dots, x_m)]}{[k(w_1, x_1, \dots, x_n) : k(x_1, \dots, x_m)]} < \infty.$$

С индукция по $1 \leq i \leq \min(m, r)$ предполагаме, че полето F е алгебрично над своето подполе $k(w_1, \dots, w_{i-1}, x_i, \dots, x_m)$. Тогава съществува полином $0 \not\equiv f_i(w_1, \dots, w_{i-1}, t, x_i, \dots, x_m) \in k[w_1, \dots, w_{i-1}, t, x_i, \dots, x_m]$ с

$$f_i(w_1, \dots, w_{i-1}, w_i, x_i, \dots, x_m) = 0. \tag{10.1}$$

Полиномът $f_i(w_1, \ldots, w_{i-1}, t, x_i, \ldots, x_m)$ зависи от поне едно x_j с $i \leq j \leq m$, защото $w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i$ са трансцендентни над k. Без ограничение на общността считаме, че f_i зависи от x_i и разглеждаме (10.1) като алгебрична зависимост на x_i над $k(w_1, \ldots, w_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$. В резултат, степента

$$[k(w_1, \ldots, w_i, x_i, \ldots, x_m) : k(w_1, \ldots, w_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)] < \infty \tag{10.2}$$

е крайна. От друга страна, индукционното предположение за алгебричност на F над $k(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_i, \ldots, x_m)$ гарантира крайността на степените

$$[F : k(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_i, \ldots, x_m)] < \infty,$$

$$[k(w_1, \ldots, w_i, x_i, \ldots, x_m) : k(w_1, \ldots, w_{i-1}, x_i, \ldots, x_m)] < \infty,$$

а оттам и на тяхното частно

$$[F : k(w_1, \ldots, w_i, x_i, \ldots, x_m)] < \infty. \tag{10.3}$$

Умножавайки (10.2) с (10.3) получаваме, че

$$[F : k(w_1, \ldots, w_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)] < \infty.$$

Ако допуснем, че $r > m$, то след краен брой стъпки ще получим, че F е алгебрично над $k(w_1, \ldots, w_m)$, което противоречи на тарнсцендентността на $w_1, \ldots, w_r$ над k. Следователно $r \leq m$.
(ii) Ако $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_l$ са базиси на трансцендентност на F над k, то от (i) получаваме $l \leq m$ и $m \leq l$, откъдето $l = m$, Q.E.D.
До края на настоящия въпрос ще предполагаме, че всички разглеждани афинни многообразия $X \subseteq k^n$ са неприводими.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. *Размерността на неприводимо афинно многообразие $X \subseteq k^n$ е степента на трансцендентност*

$$\dim X = \operatorname{tr}\dim_k k(X)$$

на полето на рационалните функции $k(X)$ над k.

Интуитивно, размерността на афинно многообразие е броят на алгебрично независимите променливи, параметризиращи това многообразие. Едномерните многообразия се наирчат криви, а двумерните - повърхнини.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Ако Y е неприводимо афинно подмногообразие на X, то разликата на размерностите*

$$\operatorname{codim}_X(Y) = \dim(X) - \dim(Y)$$

е неотрицателна и се нарича коразмерност на Y спрямо X.
При това, $\operatorname{codim}_X(Y) = 0$ тогава и само тогава, когато многообразията $X = Y$ съвпадат.

Доказателство: Нека $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са произволни пораждащи на афинния координатен пръстен $k[X] = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ като k-алгебра. Тогава полето на рационалните функции $k(X) = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ се поражда от $\xi_1, \ldots, \xi_n$ над k. По определението за размерност $\dim(X) = d$, след евентуална пермутация на $\xi_1, \ldots, \xi_n$ можем да считаме, че $\xi_1, \ldots, \xi_d$ са трансцендентни над k и ξ_i са алгебрични над $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ за $\forall d + 1 \leq i \leq n$.
Тъждественото влагане $\mathrm{Id} : Y \hookrightarrow X$ индуцира обратното включване $I(X) \subseteq I(Y)$ на идеалите на тези афинни многообразия в $k[x_1, \ldots, x_n]$. В резултат получаваме епиморфизъм $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ на афинните координатни пръстени с ядро $I(Y)/I(X)$. Класовете на афинните координати пораждат афинния координатен пръстен като k- алгебра и

$$\mathrm{Id}^* : k[X] = k[x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)] \longrightarrow k[x_1 + I(Y), \ldots, x_n + I(Y)]$$

е естественият епиморфизъм с $\mathrm{Id}^*(x_i + I(X)) = x_i + I(Y)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $\mathrm{Id}^*|_k = \mathrm{Id}_k$. След евентуална пермутация на $x_1, \ldots, x_n$ можем да считаме, че $x_1 + I(X), \ldots, x_d + (X)$ са трансцендентни над k и $x_i + I(X)$ е алгебрично над $k(x_1+I(X), \ldots, x_d+I(X))$ за $\forall d+1 \leq i \leq n$. Пропускайки алгебричната зависимост на $x_i+I(X)$ по модул $I(Y) \supseteq I(X)$ получаваме, че $x_i+I(Y)$ са алгебрични над $k(x_1+I(Y), \ldots, x_n+I(Y))$ за $\forall d+1 \leq i \leq n$. Следователно произволен базис на трансцендентност на $k(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y))$ над k е базис на трансцендентност на $k(Y)$ над k. По този начин, $\dim(Y) = \operatorname{tr deg}_k k(Y) \leq d = \dim(X)$.
Ако $\dim(Y) = \dim(X) = d$, то $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)$ са трансцендентнит над k. В такъв случай е достатъчно да докажем, че

$$\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$$

е изоморфизъм на k-алгебри, за да стигнем до извода, че $\mathrm{Id} : Y \to X$ е бирегулярно и $Y = X$. Вече видяхме, че $Im(\mathrm{Id}^*) = k[Y]$. Ако $\xi \in Ker(\mathrm{Id}^*)$, то използваме алгебричността на ξ над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за да получим

$$a_m\xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots + a_1\xi + a_0 = 0 \tag{10.4}$$

на ξ с коефициенти $a_i \in k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за $\forall 0 \leq i \leq m$. Ако допуснем, че $\xi \neq 0$, то след евентуално деление на (10.4) с подходяща степен на ξ можем да предполагаме, че $a_0(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)) \neq 0$. Прилагайки Id^* към (10.4) получаваме $a_0(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)) = 0$. Това противоречи на трансцендентността на $x_1+I(Y), \ldots, x_d+I(Y)$ и доказва, че $Ker(\mathrm{Id}^*) = \{0\}$. Следователно $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ е изоморфизъм на k-алгебри и $Y = X$, Q.E.D.

Теорема 15. (Лема на Ньотер за нормализация) *Нека k е поле, областта $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ е крайнопородена k-алгебра, а полето от частни F на A има степен на трансцендентност $\operatorname{tr deg}_k(F) = d$ над k. Тогава съществува базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in A$ на F над k, така че алгебрата A е цяла над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$.*

Доказателство: Както обяснихме в началото на доказателството на Лема-Определение 14, степента на трансцендентност d на F над k е максималният брой на трансцендентните над k елементи на произволна пораждаща система $\eta_1, \ldots, \eta_n$ на A като k-алгебра. В частност, $d \leq n$. Ако $d = n$, то $\eta_1, \ldots, \eta_n$ е базис на трансцендентност на F над k с необходимите свойства.
Нека $n > d$. Ще работим с индукция по броя на пораждащите n на A като k-алгебра. Съгласно алгебричността на $\eta_1, \ldots, \eta_n$ над k, съществува полином $0 \not\equiv f(t_1, \ldots, t_n) \in k[t_1, \ldots, t_n]$ с

$$0 = f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_n^{\alpha_n},$$

където $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и сумата е крайна. Избираме достатъчно голямо естествено число N, така че $N > \alpha_i$ за $\forall \alpha$ с $c_\alpha \neq 0$ и $\forall 1 \leq i \leq n$. Полагаме

$$\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}} \quad \text{за } \forall 2 \leq i \leq n.$$

Въвеждаме обратната лексикографска наредба на мономи $x^\alpha >_{\text{invlex}} x^\beta$, която означава $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, $\ldots$, $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$, $\alpha_i > \beta_i$ за някое $1 \leq i \leq n$. Нека $c_\gamma \eta^\gamma$ е максималният относно обратната лексикографска наредба моном на f с ненулев коефициент $c_\gamma \neq 0$. След развиване на

$$0 = f(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \zeta_3 + \eta_1^{N^2}, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}) \tag{10.5}$$

като полином на $\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ и приведение на събираемите от една и съща степен относно η_1, старшият едночлен относно лексикографската наредба е

$$c_\gamma \eta_1^{\gamma_1 + N\gamma_2 + N^3\gamma_3 + \ldots + N^{n-1}\gamma_n}.$$

Разделяйки (10.5) на c_γ получаваме цяла зависимост на η_1 над $k[\zeta_2,\dots,\zeta_n]$. По индукционно предположение пръстенът $k[\zeta_2,\dots,\zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1,\dots,\xi_d]$, където $\xi_1,\dots,\xi_d$ е подходящ базис на трансцендентност на F над k. Оттук и $k[\eta_1,\dots,\eta_n] = k[\eta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n]$ е цял над $k(\xi_1,\dots,\xi_d)$, доколкото $k[\eta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n]$ е цял над $k[\zeta_2,\dots,\zeta_n]$, Q.E.D.

Следствие 10.3. *За произволно неприводимо афинно многообразие $X \subseteq k^n$ с размерност $\dim(X) = d$ съществува крайно регулярно доминантно изображение $\xi : X \to k^d$ върху d-мерно афинно пространство.*

Доказателство: Афинният координатен пръстен $k[X]$ е крайнопородена k-алгебра без делители на нулата. Прилагайки Лемата на Ньотер за нормализация получаваме базис на трансцендентност $\xi_1,\dots,\xi_d$ на полето $k(X)$ на рационалните функции върху X, така че $\xi_1,\dots,\xi_d \in k[X]$ и $k[X]$ е цял над $k[\xi_1,\dots,\xi_d]$. Изображението

$$\xi : X \longrightarrow k^d,$$

$$\xi(x) = (\xi_1(x),\dots,\xi_d(x)) \text{ за } \forall x \in X$$

е регулярно съгласно $\xi_1,\dots,\xi_d \in k[X]$. То индуцира влагането $k[\xi_1,\dots,\xi_d] \hookrightarrow k[X]$, така че $\xi : X \to k^d$ е доминантно. Накрая, ξ е крайно, защото $k(X) = k(x_1 + I(X),\dots,x_n + I(X))$ е крайно разширение на $k(\xi_1,\dots,\xi_n)$. По-точно, $k(X)$ е крайнопородено алгебрично разширение на $k(\xi_1,\dots,\xi_d)$.
Да отбележим, че съществуват подходящи афинни координати върху X, така че $\xi : X \to k^d$ е каноничната проекция върху първите d от тях. За целта е достатъчно да допълним $\xi_1,\dots,\xi_d \in k[X]$ до пораждащи $\xi_1,\dots,\xi_d,\xi_{d+1},\dots,\xi_m$ на k-алгебрата $k[X]$ и да разгледаме $(\xi_1,\dots,\xi_m) : X \to k^m$ като влагане на X в k^m, Q.E.D.
Нека A е подпръстен на комутативния пръстен с единица B, а $\mathfrak{p} \triangleleft A$ и $\mathfrak{q} \triangleleft B$ са прости идеали. Ако $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$, то казваме, че $\mathfrak{q}$ лежи над $\mathfrak{p}$. Непосредствено се вижда, че ако $\mathfrak{q}$ е прост идеал в B, то $\mathfrak{q} \cap A$ е прост идеал в A. По-точно, от $a_1a_2 \in \mathfrak{q} \cap A$ за някакви $a_1, a_2 \in A$ следва $a_1 \in \mathfrak{q}$ или $a_2 \in \mathfrak{q}$ съгласно простотата на $\mathfrak{q} \triangleleft B$. Оттук $a_1 \in \mathfrak{q} \cap A$ или $a_2 \in \mathfrak{q} \cap A$.
Да разгледаме геометричен пример за дадената ситуация. Нека $f : X \to Y$ е регулярно доминантно изображение на афинни многообразия. Тогава втората канонична проекция $\pi_2 : \Gamma_f \to Y$ на графика Γ_f на f е доминантно регулярно изображение, индуциращо тъждественото влагане $k[Y] \hookrightarrow k[\Gamma_f]$ на афинните координатни пръстени. Произволно неприводимо афинно подмногообразие $Z \subseteq \Gamma_f$ се изобразява в неприводимо афинно подмногообразие $T = \pi_2(Z) \subseteq Y$. Това означава, че простият идеал $I_{\Gamma_f}(Z) \triangleleft k[\Gamma_f]$ пресича $k[Y]$ в простия идеал $I_Y(T) = I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y]$. Обратно, за всяко неприводимо афинно подмногообразие $T \subseteq Y$ съществува неприводима компонента Z на $\pi_2^{-1}(T)$. С други думи, простият идеал $I_{\Gamma_f}(Z)$ съдържа идеала $I_{\Gamma_f}(\pi_2^{-1}(T)) = I_Y(T)k[\Gamma_f]$ и сечението

$$I_Y(T) = I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] \supseteq I_Y(T)k[\Gamma_f] \cap k[Y] \supseteq I_Y(T).$$

С други думи, $I_Y(T)k[\Gamma_f]$ лежи над $I_Y(T)$ и се съдържа в прсотия идеал $I_{\Gamma_f}(Z)$ над $I_Y(T)$. Следващата лема установява, че прост идеал $\mathfrak{p}$ в подпръстен A на комутативен пръстен с единица B се повдига до прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft B$ над $\mathfrak{p}$ тогава и само тогава, когато разширения идеал $\mathfrak{p}B \triangleleft B$ лежи над $\mathfrak{p}$.

Лема 10.4. *Нека A е подпръстен на комутативния пръстен с единица B, а $\mathfrak{p} \triangleleft A$ е прост идеал. В такъв случай, B съдържа прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft B$, лежащ над $\mathfrak{p}$, тогава и само тогава, когато $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$.*

Доказателство: Ако $\mathfrak{q} \triangleleft B$ е прост идеал, лежащ над $\mathfrak{p}$, то от $\mathfrak{p}B \cap A \subseteq \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}B \cap A$ следва $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$.

Обратно, нека $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$. Допълнението $A \setminus \mathfrak{p}$ на простия идеал $\mathfrak{p}$ е мултипликативно затворено подмножество на B, така че можем да образуваме локализацията $B' = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$ на B. От $\mathfrak{p}B \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ следва, че $1 \not\in \mathfrak{p}B'$, защото в противен случай съществува $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ с $s = s.1 \in \mathfrak{p}B' \cap (A \setminus \mathfrak{p})$. Следователно съществува максимален идеал $\mathfrak{p}B' \subseteq \mathfrak{M} \lhd B'$. Нека $\mathfrak{q} = \mathfrak{M} \cap B$. Тогава $B/\mathfrak{q} = B/(\mathfrak{M} \cap B)$ е подпръстен на полето $B'/\mathfrak{M}$, така че $B/\mathfrak{q}$ е област на цялост и идеалът $\mathfrak{q} \lhd B$ е прост. Тогава $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M}$, откъдето $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M} \cap A = (\mathfrak{M} \cap B) \cap A = \mathfrak{q} \cap A$. От друга страна, максималният идеал $\mathfrak{M} \lhd B'$ е собствен и не пресича множеството $A \setminus \mathfrak{p}$ на обратимите елементи на B'. Оттук $\mathfrak{q} \cap A = (\mathfrak{M} \cap B) \cap A = \mathfrak{M} \cap A \subseteq \mathfrak{p}$, така че $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ и простият идеал $\mathfrak{q} \lhd B$ лежи над простия идеал $\mathfrak{p} \lhd A$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 10.5. *Нека B е област на цялост, A е подпръстен на B, B е цял над A и $\mathfrak{p} \lhd A$ е прост идеал. Тогава:*
(i) съществува прост идеал $\mathfrak{q} \lhd B$, лежащ над $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$;
(ii) ако $\mathfrak{q}' \subseteq \mathfrak{q}$ са прости идеали в B, лежащи над $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{q} \cap A$, то $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$.

Доказателство: (i) Да разгледаме естествения хомоморфизъм

$$\varphi : A \longrightarrow A/\mathfrak{p},$$
$$\varphi(a) = a + \mathfrak{p}$$

с ядро $Ker(\varphi) = \mathfrak{p}$ и образ $Im(\varphi) = A/\mathfrak{p}$. Областта $A/\mathfrak{p}$ се влага в своето поле от частни k, а оттам и в алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k. Разглеждаме

$$\varphi : A \longrightarrow \overline{k}$$

като нетъждествено нулев хомоморфизъм в алгебрично затвореното поле $\overline{k}$. Нека F е полето от частни на B. Съгласно Теорема 11 за продължение, съществуват пръстен на нормиране R_o на F, съдържащ A, който има максимален идеал $\mathfrak{M}_o$ и хомоморфизъм на пръстени

$$\Phi : R_o \longrightarrow \overline{k},$$

който продължава $\Phi|_A = \varphi$ и има ядро $Ker(\Phi) = \mathfrak{M}_o$. Твърдим, че B е подпръстен на R_o. Наистина, съгласно Следствие 9.7, цялата обвивка $\overline{A} = \cap_{R \supseteq A} R$ на A е сечението на пръстените на нормиране R на F, съдържащи A. Следователно $\overline{A}$ е подпръстен на R_o. Но подпръстена B на F е цял над A, така че $B \subseteq \overline{A}$, а оттам и $B \subseteq R_o$. Твърдим, че $\mathfrak{q} = \mathfrak{M}_o \cap B$ е прост идеал на B, лежащ над $\mathfrak{q} \cap A = (\mathfrak{M}_o \cap B) \cap A = \mathfrak{M}_o \cap A = Ker(\Phi) \cap A = Ker(\varphi) = \mathfrak{p}$. За целта да отбележим, че фактор-пръстенът $B/\mathfrak{q} = B/(\mathfrak{M}_o \cap B)$ е подпръстен на полето $R_o/\mathfrak{M}_o$, така че $B/\mathfrak{q}$ е област на цялост. Еквивалентно, $\mathfrak{q} \lhd B$ е прост идеал.
(ii) Областта $\widehat{A} = A/\mathfrak{p}$ е подпръстен на областта $\widehat{B} = B/\mathfrak{q}'$ и $\widehat{B}$ е цял над $\widehat{A}$, защото всяка цяла зависимост на $b \in B$ над A се пропуска до цяла зависимост на $\widehat{b} = b + \mathfrak{q}' \in \widehat{A}$ над $A/(\mathfrak{q}' \cap A) = A/\mathfrak{p} = \widehat{A}$. Още повече, идеалът $\widehat{q} = \mathfrak{q}/\mathfrak{q}' \lhd \widehat{B}$ е прост и $\widehat{q} \cap \widehat{A} = (\mathfrak{q} \cap A)/(\mathfrak{q}' \cap A) = \mathfrak{p}/\mathfrak{p} = 0$. Трябва да установим, че $\widehat{q} = 0$. В противен случай съществува $0 \neq x \in \widehat{\mathfrak{q}}$ с цяла зависимост

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

над $\widehat{A} \ni a_i$, $0 \leq i \leq n$. Понеже $x \neq 0$ и B е област, можем да считаме, че $a_0 \neq 0$. Но

$$a_0 = -x(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1) \in \widehat{\mathfrak{q}},$$

съгласно $x \in \widehat{\mathfrak{q}}$ води до $a_0 \in \widehat{\mathfrak{q}} \cap \widehat{A} = \{0\}$. Противоречието доказва $\widehat{\mathfrak{q}} = 0$, а оттам и $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$, Q.E.D.
Да илюстрираме Твърдение 10.5 с геометричен пример. Нека X е неприводимо афинно многообразие над поле k. Тогава афинният координатен пръстен $k[X]$ е карйнопородена k-алгебра без делители на нулата. Прилагайки Лемата на Ньотер за нормализация получаваме базид на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d$ на

полето $k(X)$ на рационалните функции върху X, който се състои от такива регулярни функции $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[X]$, че $k[X]$ е цяло разширение на полиномиалния пръстен $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Влагането $k[\xi_1, \ldots, \xi_d] \hookrightarrow k[X]$ се индуцира от крайното доимнантно регулярно изображени $\xi : X \to k^d$, $\xi(x) = (\xi_1(x), \ldots, \xi_d(x))$ за $\forall x \in X$. За всяко неприводимо афинно монгообразие $T \subseteq k^d$ съществува неприводима компонента Z на праобраза $\xi^{-1}(T)$, която лежи над T, т.е. $\xi(Z) = T$. Ако $Z' \supseteq Z$ са неприводими компоненти на $\xi^{-1}(T)$, то $Z = Z'$.

Теорема 16. (Теорема за повдигане)*Нека B е област на цялост, A е подпръстен на B и B е цял над A. Ако $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ са прости идеали в A и $\mathfrak{q}_1 \triangleleft B$ е прост идеал над $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap A$, то съществува прост идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft B$ над $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_2 \cap A$, така че $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.*

Доказателство: Да разгледаме областта $\overline{B} = B/\mathfrak{q}_1$ и нейния подпръстен $\overline{A} = A/(\mathfrak{q}_1 \cap A) = A/\mathfrak{p}_1$. Както вече обяснихме в доказателството на Твърдение 10.5, $\overline{B}$ е цял над $\overline{A}$ и $\overline{\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$ е прост идеал в $\overline{A}$. Съгласно Твърдение **??**(i), съществува прост идеал $\mathfrak{r} \triangleleft \overline{B}$ над $\mathfrak{r} \cap \overline{A} = \overline{\mathfrak{p}}_2$. Повдигането

$$\mathfrak{q}_2 = \{b \in B \,|\, \overline{b} = b + \mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{r}\}$$

на $\mathfrak{r}$ до подмножество на B е идеал в B. Още повече, този идеал е прост и съдържа $\mathfrak{q}_1$. Непосредствено се проверява, че $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$, Q.E.D.

Геометрично, нека X е неприводимо афинно многообразие с афинен координатен пръстен $k[X]$ и $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на $k(X)$ над k, съставен от такива регулярни функции $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[X]$, за които $k[X]$ е цял над $R = k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Да разгледаме крайното доминантно регулярно изображение $\xi : X \to k^d$, което индуцира тъждественото влагане $\xi^* : R \hookrightarrow k[X]$. Произволно неприводимо афинно подмногообразие $Z \subset X$ се изобразява чрез ξ в неприводимо афинно подмногообразие $Y = \xi(Z) \subseteq k^d$. Крайното регулярно сюрективно изображение $\xi : Z \to Y$ отговаря на издърпването на съответните прости идеали, т.е. $(\xi^*)^{-1} I_X(Z) = I_{k^d}(Y)$ за $I_X(Z) \triangleleft k[X]$, $I_{k^d}(Y) \triangleleft R$. Твърдението на Теорема 16 има следната геометрична интерпретация : Ако $Y_2 \subset Y_1 \subseteq k^d$ са неприводими афинни многообразия и $Z_1 \subseteq X$ е неприводимо афинно подмногообразие, то $\xi^{-1}(Y_2) \cap Z_1 \neq \emptyset$, така че всяка неприводима компонента Z_2 на $\xi^{-1}(Y_2) \cap Z_1$ е неприводимо афинно подмногообразие на Z_1, което лежи над Y_2.

Нека A е подпръстен на комутативния пръстен с единица B и $\mathfrak{a} \triangleleft A$ е идеал. Ще казваме, че $x \in B$ е цял над $\mathfrak{a}$, ако е корен на полином

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

с коефициенти $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathfrak{a}$.

Твърдение 10.6. *Нека B е област на цялост, която е цяла над своя подпръстен A и $\mathfrak{a}$ е идеал в A. Тогава множеството на елементите на B, които са цели над $\mathfrak{a}$ е радикалът $r(\mathfrak{a}B)$ на $\mathfrak{a}B \triangleleft B$.*

Доказателство: Ако $x \in B$ е цял над $\mathfrak{a}$, то $x^n = -a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0 \in \mathfrak{a}B$ съгласно $a_i \in \mathfrak{a}$. С други думи, $x \in r(\mathfrak{a}B)$.

Обратно, ако $x \in r(\mathfrak{a}B)$, то $x^n \in \mathfrak{a}B$ за някое естествено число n. Достатъчно е да проверим, че x^n е цял над $\mathfrak{a}$, защото тогава цялата зависимост

$$(x^n)^m + a_{m-1}(x^n)^{m-1} + \ldots + a_1 x^n + a_0 = 0$$

на x^n над $\mathfrak{a}$ може да се разглежда като цяла зависимост на x над $\mathfrak{a}$. Да заменим x^n с x и да считаме, че $x \in \mathfrak{a}B$. Без ограничение на общността $x \neq 0$.

Подмножеството

$$\mathfrak{b} = \left\{ y \in A\left[\frac{1}{x}\right] \;\middle|\; xy \in \mathfrak{a}A\left[\frac{1}{x}\right] \right\}$$

е идеал в $A\left[\frac{1}{x}\right]$. Твърдим, че $1 \in \mathfrak{b}$. В противен случай съществува максимален идеал $\mathfrak{M} \triangleleft A\left[\frac{1}{x}\right]$, съдържащ $\mathfrak{p}$. Нека $k = A\left[\frac{1}{x}\right]/\mathfrak{M}$ е съответното поле от остатъци, а $\overline{k}$ е алгебричната обвивка на k. Тогава естественият хомоморфизъм $\pi_{\mathfrak{M}} : A\left[\frac{1}{x}\right] \to k$ с ядро $Ker(\pi_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}$ и образ $Im(\pi_{\mathfrak{M}}) = k$ може да се разглежда като хомоморфизъм

$$\varphi : A\left[\frac{1}{x}\right] \longrightarrow \overline{k}$$

с ядро $Ker(\varphi) = \mathfrak{M}$ в алгебрично затвореното поле $\overline{k}$. Ако F е полето от частни на B, то по Теоремата за продължение съществува пръстен на нормиране $R_o \supseteq A\left[\frac{1}{x}\right]$ на F с максимален идеал $\mathfrak{M}_o$ и хомоморфизъм

$$\Phi : R_o \longrightarrow \overline{k}$$

с ядро $Ker(\Phi) = \mathfrak{M}_o$, продължаващ $\Phi|_{A\left[\frac{1}{x}\right]} = \varphi$. Ясно е, че $x^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, така че $\Phi(x^{-1}\mathfrak{a}) = 0$. От друга страна, x е цял над A, така че принадлежи на цялата обвивка $\overline{A}$ на A в полето от частни F на B. Следователно $x \in \overline{A} = \cap_{R\supseteq A} R$ е във всички пръстени на нормиране R на F, съдържащи A и, в частност, $x \in R_o$. Следователно $x^{-1} \not\in \mathfrak{M}_o$ и $\Phi(x^{-1}) \neq 0$. Оттук $\Phi(\mathfrak{a}) = 0$. Областта B също се съдържа в R_o, защото е цяла над A и се съдържа в цялата обвивка $\overline{A} = \cap_{R\supseteq A} R \subseteq R_o$. Следователно $\Phi(\mathfrak{a}B) = 0$. Понеже $x \in \mathfrak{a}B$, оттук следва $\Phi(x) = 0$ или $x \in \mathfrak{M}_o$, което противоречи на $x^{-1} \in A\left[\frac{1}{x}\right] \subseteq R_o$. С това установихме, че $1 \in \mathfrak{b}$.
Сега от $1 \in \mathfrak{b}$ получаваме, че $x \in \mathfrak{a}A\left[\frac{1}{x}\right]$ и следователно

$$x = -a_{n-1} - a_{n-2}x^{-1} - \ldots - a_0 x^{1-n}$$

за подходящи $a_i \in \mathfrak{a}$. Умножавайки с x^{n-1} получаваме, че x е цял над $\mathfrak{a}$, Q.E.D.
За да докажем Теоремата за спускане ни трябва следната

Лема 10.7. *Нека A е целозатворена област на цялост с поле от частни F, K е разширение на F и x е елемент на K, който е цял над A. Тогава минималният полином на x над F е от вида*

$$g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_1 + b_0$$

с $b_i \in A$ за $\forall 0 \leq i \leq m-1$.
Още повече, ако $x \in K$ е цял над простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft A$, то $b_i \in \mathfrak{p}$ за $\forall 0 \leq i \leq m-1$.

Доказателство: Нека $x \in K$ е корен на полинома

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 \in A[t]$$

над A със старши коефициент 1, а

$$g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_1 t + b + 0 \in F[t]$$

е минималният полином на x над F. Тогава $g(t)$ е неразложим над F и дели $f(t)$ в $F[t]$. Нека $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ са корените на $g(t) = 0$ в подходящо разширение E на K, а B е цялата обвивка на A в E. Тогава B е област, цяла над A. В качеството си на корени на $f(t) \in A[t]$ със старши коефициент 1, елементите $x = x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ са цели над A и принадлежат на B. По формулите на Виет получаваме $b_1, \ldots, b_{m-1} \in B$. Но по предположение, $b_1, \ldots, b_{m-1} \in F$, така че $b_1, \ldots, b_{m-1} \in B \cap F = A$, защото $B \cap F$ е цялата обвивка на A във F и A е целозатворен във F по предположение.
Ако $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{p}$, то горните разсъждения показват, че $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ са цели над $\mathfrak{p}$ елементи на B. Съгласно Лема 10.6 получаваме $x = x_1, x_2, \ldots, x_m \in$

$r(\mathfrak{p}B)$, а оттам и $b_1, \ldots, b_{m-1} \in r(\mathfrak{p}B)$. Съществува достатъчно голямо естествено число N, така че $b_1^N, \ldots, b_{m-1}^N \in \mathfrak{p}B$. Комбинирайки с $b_1^N, \ldots, b_{m-1}^N \in A$ получаваме, че $b_1^N, \ldots, b_{m-1}^N \in \mathfrak{p}B \cap A$. Остава да установим, че $\mathfrak{p}B \cap A = \mathfrak{p}$. В Лема 10.4 доказахме, че това е еквивалентно на съществуването на прост идеал $\mathfrak{q} \lhd B$ над $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Понеже областта B е цяла над своя подпръстен A, можем да приложим Твърдение 10.5(i) и да довършим доказателството, Q.E.D.

Теорема 17. (Теорема за спускане) *Нека B е област, която е цяла над своя целозатворен подпръстен A, $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$ са прости идеали в A, а $\mathfrak{q}_1$ е прост идеал в B, лежащ над $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap A$. Тогава съществува прост идеал $\mathfrak{q}_2 \subseteq \mathfrak{q}_1$, лежащ над $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q}_2 \cap A$.*

Доказателство: Нека $B_1 = (B \setminus \mathfrak{q}_1)^{-1}B$ е локализацията на B относно (допълнението) на простия идеал $\mathfrak{q}_1$. Твърдим, че $\mathfrak{p}_2 B_1 \cap A = \mathfrak{p}_2$. Включването $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}_2 B_1 \cap A$ е ясно. Всяко $x \in \mathfrak{p}_2 B_1 \cap A$ може да се прдестави във вида $x = \frac{y}{s}$ чрез подходящи $y \in \mathfrak{p}_2 B$ и $s \in B \setminus \mathfrak{q}_1$. Съгласно Твърдение 10.6, елементът $y \in \mathfrak{p}_2 B = r(\mathfrak{p}_2 B)$ е цял над $\mathfrak{p}_2$. Нека

$$g(t) = t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \ldots + b_1 t + b_0$$

е минималният полином на y над полето от частни F на A. От Лема 10.7 следва, че $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \in \mathfrak{p}_2$. Непосредствено се вижда, че $s = \frac{y}{x}$ е корен на полинома

$$h(t) = t^m + \left(\frac{b_{m-1}}{x}\right) t^{m-1} + \ldots + \left(\frac{b_1}{x^{m-1}}\right) t + \frac{b_0}{x^m} \in F[t]$$

и $h(t)$ е минималният полином на s над F. От друга страна, $s \in B$ е цял над A, така че $c_i = \frac{b_i}{x^{m-i}} \in A$ за $\forall 0 \leq i \leq m-1$, съгласно Лема 10.7. За да установим, че $x \in \mathfrak{p}_2$, да допуснем противното и да отбележим, че от $b_i = c_i x^i \in \mathfrak{p}_2$ с $x \not\in \mathfrak{p}_2$ следва $c_i \in \mathfrak{p}_2$ за $\forall 0 \leq i \leq m-1$, благодарение на простотата на идеала $\mathfrak{p}_2 \lhd A$. Но тогава

$$s^m = -c_{m-1}s^{m-1} - \ldots - c_1 s - c_0 \in \mathfrak{p}_2 B \subseteq \mathfrak{q}_1,$$

а оттам и $s \in \mathfrak{q}_1$ за простия идеал $\mathfrak{q}_1 \lhd B$. Това противоречи на избора на $s \in B \setminus \mathfrak{q}_1$ и доказва $x \in \mathfrak{p}_2$, т.е. $\mathfrak{p}_2 B_1 \cap A = \mathfrak{p}_2$.
Сега можем да приложим Лема 10.4 и да получим съществуването на прост идеал $\mathfrak{q} \lhd B_1$, лежащ над $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{q} \cap A$. Твърдим, че $\mathfrak{q}_2 := \mathfrak{q} \cap B$ е прост идеал на B. Още повече, $\mathfrak{q}_2 \subseteq \mathfrak{q}_1$, защото $\mathfrak{q}$ е собствен идеал на B_1, Q.E.D.

Твърдение 10.8. *Всяка факториална област е целозатворена.*

Доказателство: Нека A е факториална област, F е полето от частни на A и $x = \frac{f}{g} \in F$ с $f, g \in A$ е цял над A. Без ограничение на общността можем да считаме, че f и g са взаимно прости, т.е. нямат общи неразложими монжители. Ако

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

е цялата зависимост на x над A, то от

$$f^n = -a_{n-1}f^{n-1}g - \ldots - a_1 f g^{n-1} - a_0 g^n = g(-a_{n-1}f^{n-1} - \ldots - a_1 f g^{n-2} - a_0 g^{n-1})$$

следва, че g дели f^n. В резултат, $g \in A$ е обратимо в A и $x = fg^{-1} \in A$. С други думи, областта A е целозатворена, Q.E.D.

Твърдение 10.9. *Нека X е неприводимо афинно многообразие, $0 \neq \mathfrak{p} \lhd k[X]$ е минимален ненулев прост идеал в афинния координатен пръстен на X, а $Y = V_X(\mathfrak{p})$ е неприводимото афинно подмногообразие, отговарящо на $\mathfrak{p}$. Тогава*

$$\dim(Y) = \dim(X) - 1.$$

Доказателство: Нека $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg k(X) = d$. Съгласно Лемата на Ньотер за нормализация - Теорема 15, съществува базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[X]$ на полето на рационалните функции $k(X)$ над k, така че афинният координатен пръстен $k[X]$ е цял над полиномиалния пръстен $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Областта $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ е целозатворена, защото е факториална. Това ни позволява да приложим Теорема 17 и да получим, че $\mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_d] \triangleleft k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ е минимален ненулев прост идеал в $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. (Идеалът $\mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ е ненулев, защото ако цялата зависимост на $0 \neq x \in \mathfrak{p}$ над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ има корени $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{p}$ и $0 \neq x_1 \ldots x_m \in \mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$.)
Във факториалната област $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, минималният ненулев прост идеал $\mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ е главен, $\mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_n] = \langle f \rangle$ и породен от неразложим над k полином $f(\xi_1, \ldots, \xi_d) \in k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. След евентуално преименоване на променливите можем да считаме, че f зависи от ξ_d. Тогава образите $\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{d-1}}$ на $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ в областта $k[\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_d}] = k[\xi_1, \ldots, \xi_d]/(\mathfrak{p} \cap k[\xi_1, \ldots, \xi_d])$ са алгебрично независими, а $\overline{\xi_d}$ е алгебричен над $k(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{d-1}})$. Но афинният координатен пръстен $k[Y] = k[X]/\mathfrak{p}$ е алгебричен над своя подпръстен $k[\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_d}]$, така че полето $k(Y)$ на рационалните функции върху Y е алгебрично над полето от частни $k(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_d})$ на $k[\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_d}]$. Следователно

$$\dim(Y) = \operatorname{tr}\deg_k k(Y) = \operatorname{tr}\deg_k k(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_d}) = d - 1,$$

съгласно трансцендентността на $\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{d-1}}$ над k и алгебричността на $\overline{\xi_d}$ над $k(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_{d-1}})$, Q.E.D.
Всяка строго растяща редица $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d$ от неприводими афинни многообразия X_i ще наричаме верига от неприводими подмногообразия с дължина d. Веригата $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d$ е уплътнение на всяка своя подверига $X_{i_0} \subsetneqq X_{i_1} \subsetneqq X_{i_2} \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_{i_\delta}$ с $0 \leq i_0 < i_1 < \ldots < i_\delta \leq d$. Една верига е наситена, ако няма уплътнения до различни от самата нея. Комбинаторната размерност на неприводимо афинно многообразие X е максималната дължина на наситена верига от неприводими афинни подмногообразия.
По аналогия с комбинаторната размерност на неприводимо афинно монгообразие определяме размерността на Крул на комутативен пръстен с единица R. Растящите редици $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_d$ от прости идеали в R ще наричаме вериги от прости идеали с дължина d. Веригата $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_d$ е уплътнение на своите подвериги $\mathfrak{p}_{i_0} \subsetneqq \mathfrak{p}_{i_1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_{i_\delta}$ с $0 \leq i_0 < i_1 \ldots < i_\delta \leq d$. Една верига от прости идеали в R е наситена, ако няма уплътнения, различни от себе си. Размерността на Крул на R е максималната дължина на наситена верига от прости идеали в R.

Теорема 18. *(i) Нека X е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k. Тогава размерността $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg_k k(X) = d$ на X съвпада с комбинаторната размерност.*
Още повече, всяка наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на X има дължина d и размерността на Крул на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X е d.
(ii) Нека областта $A = k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайнопородена алгебра над алгебрично затворено поле k. Тогава всяка наситена верига от прости идеали в A има една и съща дължина d, равна на размерността на Крул на A и степента на трансцендентност на полето от частни на A над k е d.

Доказателство: (i) Съгласно Лема-Определение 14, всяка верига $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_r$ от неприводими афинни подмногообразия на X има размерности $\dim(X_0) < \dim(X_1) < \dim(X_2) < \ldots < \dim(X_r) \leq d$. Достатъчно е да установим, че всяка наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на X има дължина $r = d$ и членовете и X_i са с размерност $\dim(X_i) = i$ за

$\forall 0 \leq i \leq d$. Това ще даде съвпадение на $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg_k k(X) = d$ с комбинаторната размерност на X. Взаимно еднозначното съответствие между неприводимите афинни подмногообразия $X_i \subset X$ и простите идеали $I_X(X_i) \triangleleft k[X]$ в афинния координатен пръстен на X, установено в Следствие **??**, води до взаимно еднозначно съответствие между наситените вериги $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d$ от неприводими афинни подмногообразия на X и наситените вериги $I_X(X_d) \subsetneqq I_X(X_{d-1}) \subsetneqq \ldots \subsetneqq I_X(X_1) \subsetneqq I_X(X_0)$ от прости идеали в $k[X]$. По този начин, комбинаторната размерност на X съвпада с размерността на Крул на $k[X]$.
Ако веригата $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_r$ от неприводими подмногообразия на X е наситена, то X_0 е точка. В противен случай, всяка точка $p \in X_0$ дава уплътнение $\{p\} \subsetneqq X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d$ на $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_d$. Аналогично, в наситена верига $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_r$ трябва $X_r = X$, защото в противен случай можем да построим уплътнение $X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_r \subsetneqq X$. За произволни последователни членове $X_i \subsetneqq X_{i+1}$ на наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на X твърдим, че $\dim(X_{i+1}) = \dim(X_i) + 1$. Наистина, идеалът $I_{X_{i+1}}(X_i) \triangleleft k[X_{i+1}]$, отговарящ на неприводимото афинно многообразие X_i в афинния координатен пръстен $k[X_{i+1}]$ е минимален ненулев прост идеал. Съгласно Твърдение 10.9 имаме $\dim(X_i) = \dim(X_{i+1}) - 1$. Сега е ясно, че $\dim(X_0) = 0$, $\dim(X_i) = \dim(X_0) + (i-1) = i$ за $\forall 1 \leq i \leq r$ и $r = \dim(X_r) = \dim(X) = D$.
(ii) Областта $A = k[a_1, \ldots, a_n]$, породена от $a_1, \ldots, a_n$ над алгебрично затвореното поле k съвпада с афинния координатен прсътен $k[X]$ на неприводимо афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над k. (Виж Твърдение **??**.) Както вече отбелязахме в доказателството на (i), размерността на Крул на $A = k[X]$ съвпада с комбинаторната размерност на X и със степента на трансцендентност d на полето от частни $k(X)$ на $k[X]$ над k. При това, всяка наситена верига от прости идеали в $A = k[X]$ отговаря на наситена верига от неприводими афинни подмногоборазия на X и има дължина d, Q.E.D.
Нека X е неприводимо афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, с афинен координатен пръстен $k[X]$. Разглеждаме точка $p \in X$ с локален пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$. От Теорема 18 следва, че $k[X]$ има размерност на Крул $\dim k[X] = \dim(X)$ и локалният пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ има размерност на Крул $\dim \mathcal{O}_{p,X} = \dim(X)$. По-точно, простите идеали $\mathfrak{p}'$ в $\mathcal{O}_{p,X}$ са локализациите $\mathfrak{p}' = (k[X] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1}\mathfrak{p}$ на простите идеали $\mathfrak{p} \triangleleft k[X]$, съдържащи се в максималния идеал $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ на точката p. Съответните $V_X(\mathfrak{p}) \subseteq X$ са неприводимите афинни подмногообразия на X, съдържащи точката p. Понеже всяка наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на X има една и съща дължина $d = \dim(X)$, всяка точка $p \in X$ може да се включи в наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на X. С други думи, всеки максимален идеал $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[X]$ съдържа наситена верига от d прости идеала. В резултат, максималният идеал $\mathfrak{M}_{p,X} = (k[X] \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{M}_p$ на локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ съдържа наситена верига от d прости идеала и $\dim \mathcal{O}_{p,X} = \dim(X)$.
По-общо, ако Y е неприводимо афинно подмногообразие на неприводимо афинно многообразие X, то размерността на Крул на локалния пръстен $\mathcal{O}_{p,X}$ е

$$\dim \mathcal{O}_{p,X} = \dim(X) - \dim(Y).$$

Наистина, простите идеали $\mathfrak{p}' \triangleleft \mathcal{O}_{Y,X}$ са от вида $\mathfrak{p}' = (k[X] \setminus I_X(Y))^{-1}\mathfrak{p}$ за някакъв прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft k[X]$ с $\mathfrak{p} \subseteq I_X(Y)$. Съответните афинни многооблазия $V_X(\mathfrak{p})$ са подмногообразия на X, съдържащи Y. Всяка наситена верига от неприводими афинни подмногообразия на Y съдържа $\dim(Y) + 1$ елемента, включително с подмногообразието Y. Понеже наситените вериги от неприводими афинни подмногообразия на X се състои от $\dim(X) + 1$ елемента, включително с X, то наситените вериги

$$Y \underset{\neq}{\subseteq} Z_1 \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} Z_t = X$$

от неприводими афинни подмногообразия Z_i на X, съдържащи строго Y са с дължина

$$t = [\dim(X) + 1] - [\dim(Y) + 1] = \dim(X) - \dim(Y).$$

оттук $\dim \mathcal{O}_{Y,X} = t = \dim(X) - \dim(Y)$.